Devoir surveillé n°4

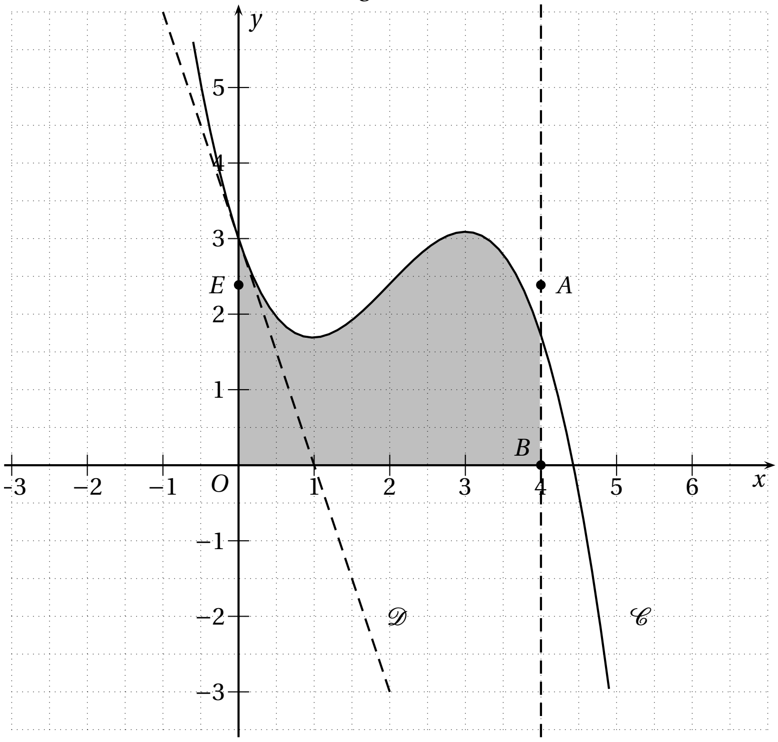
Statistiques – Calcul intégral – Équations de plans et de droites

Exercice 4.1 (5 points).

Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soient f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et $\mathscr{C}$ sa courbe tracée sur la figure 4.1 de la présente page. La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On appelle B, A et E les points de coordonnées respectives $(4\,;0)$, $\left(4\,;\frac{179}{75}\right)$ et $\left(0\,;\frac{179}{75}\right)$. Ces trois points n'appartiennent pas à la courbe $\mathscr{C}$.

FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.1



Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient. **Cocher sur l'énoncé, à rendre avec la copie, la réponse exacte**

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.*

1. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal à :

   ☐ $\dfrac{-1}{3}$ ☐ 5 ☐ -3

2. Sachant que l'aire grisée sur la figure est égale à l'aire du rectangle $OBAE$, la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$ est :

   ☐ $\dfrac{179}{75}$ ☐ $\dfrac{716}{75}$ ☐ $-\dfrac{179}{75}$

3. Sur l'intervalle $[0\,;4]$, l'équation $f'(x)=0$

   ☐ possède deux solutions distinctes. ☐ ne possède pas de solution. ☐ possède une unique solution.

4. Sur $[-1\,;2]$, la valeur moyenne de g, la fonction définie par $g(x)=6x^2+3$, est :

   ☐ -8 ☐ 0 ☐ 9

5. H est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^2+1$. On a :

   ☐ $H(0)=1$ ☐ $H(0)=\dfrac{4}{3}$ ☐ $H(0)=-\dfrac{4}{3}$

Exercice 4.2 (4 points).
Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer, pour chacune des fonctions f suivantes définies sur $]0 ; +\infty[$, la primitive F vérifiant la condition indiquée :
   (a) $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ et $F(1) = 0$;
   (b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ et $F(2) = 1$.
2. Déterminer pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, une primitive :
   (a) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$;
   (b) $g(x) = (5x-1)^3$;
   (c) $h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Exercice 4.3 (5 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Le tableau suivant donne la production mondiale de sucre brut en millions de tonnes :

année x_i	1 920	1 940	1 960	1 970	1 980	1 990
production y_i	16,8	29,9	55,4	72	88	113,9

1. Dans le premier repère de la figure 4.3 page 64, représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.
   Un ajustement affine semble-t-il pertinent ? Argumenter.
2. On pose $z_i = \sqrt{y_i}$.
   (a) Reproduire sur sa copie et compléter le tableau suivant (*on arrondira les résultats au dixième*) :

x_i	1 920	1 940	1 960	1 970	1 980	1 990
z_i						

   (b) Dans le second repère de la figure 4.4 page 64, construire le nuage des points de coordonnées $(x_i ; z_i)$ associé à cette nouvelle série double.
   La forme du nuage permet-elle d'envisager un ajustement affine ? Argumenter.
   (c) Donner l'équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients au centième*) et la tracer.
   (d) À l'aide de cette équation estimer :
   - l'année x où la production atteindra 120 millions de tonnes ;
   - la production qu'on pouvait prévoir en 1 995 (arrondie au dixième).

   (e) La production de sucre en 1 995 a été de 116,4 millions de tonnes.
   Quelle est l'erreur commise en pourcentage avec la prévision du 2d ?
   L'ajustement est-il fiable ?

Exercice 4.4 (5 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(9 ; -2 ; 0)$ et $B(-12 ; 4 ; 2)$.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Soit $M(x ; y ; z)$. Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x-9}{-21} = \frac{y+2}{6} = \frac{z}{2}$.
   (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
2. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives :
   $$\mathscr{P}_1 : 2x + 6y + 3z = 6 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P}_2 : 2x + 3y + 12z = 12.$$
   (a) Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
   (b) Montrer que A et B appartiennent à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$.
   (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
   (d) Représenter dans le repère de la figure 4.5 page 65, en vert, la trace de $\mathscr{P}_1$ sur chacun des plans de coordonnées et, en bleu, celle de $\mathscr{P}_2$.
   (e) En déduire, en rouge, la représentation de la droite (AB).

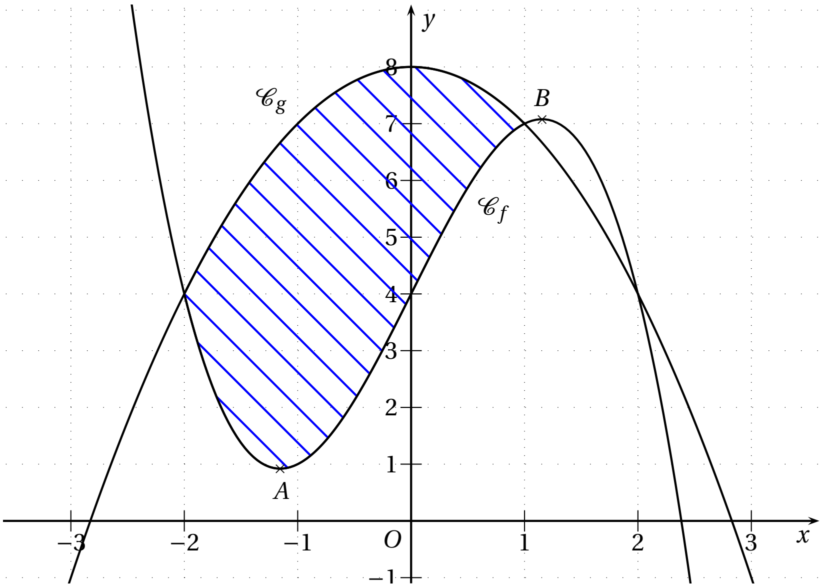
Exercice 4.5 (6 points).

On a tracé, sur le graphique 4.2 de la présente page, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les courbes représentatives de f et de g, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 4x + 4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 8$$

On appelle f' la fonction dérivée de f. A et B sont les sommets de $\mathscr{C}_f$.

FIGURE 4.2 – Graphique de l'exercice 4.5



1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 et la tracer sur la figure.
3. Déterminer les valeurs exactes des abscisses de A et de B.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α comprise dans l'intervalle $[2; 3]$.
   (b) Donner une valeur approchée de α au dixième.
   (c) Dresser alors le tableau de signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
5. Soit F une primitive de f. À l'aide de ce qui précède et sans calcul, déterminer les variations de F.
6. (a) Déterminer $\mathscr{A}$, l'aire du domaine hachuré, en unités d'aire.
   (b) Sachant qu'une unité vaut 1,5 cm sur les abscisses et 0,75 cm sur les ordonnées, déterminer $\mathscr{A}$ en cm^2.

FIGURE 4.3 – Repère de l'exercice 4.3, question 1

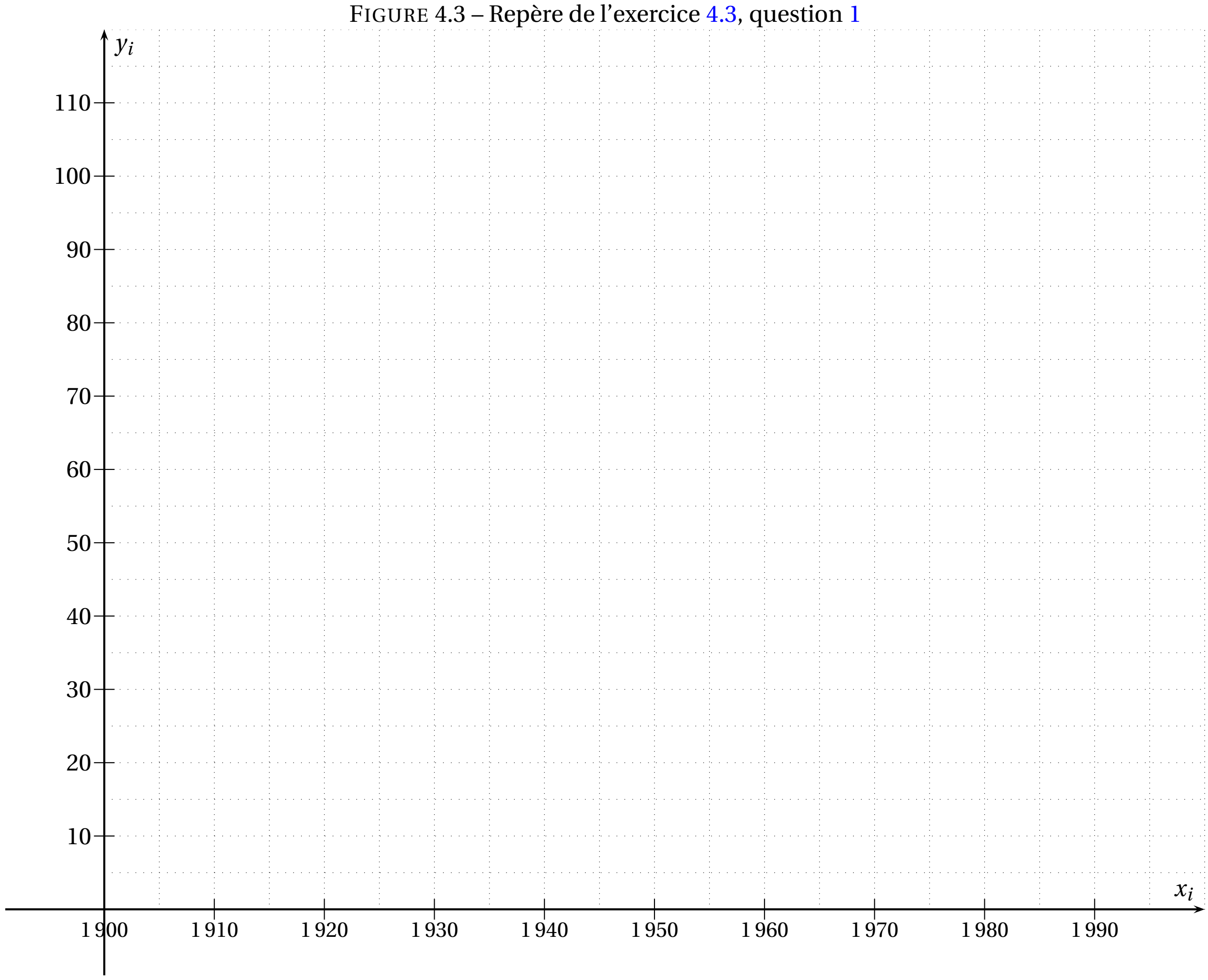


FIGURE 4.4 – Repère de l'exercice 4.3, question 2b

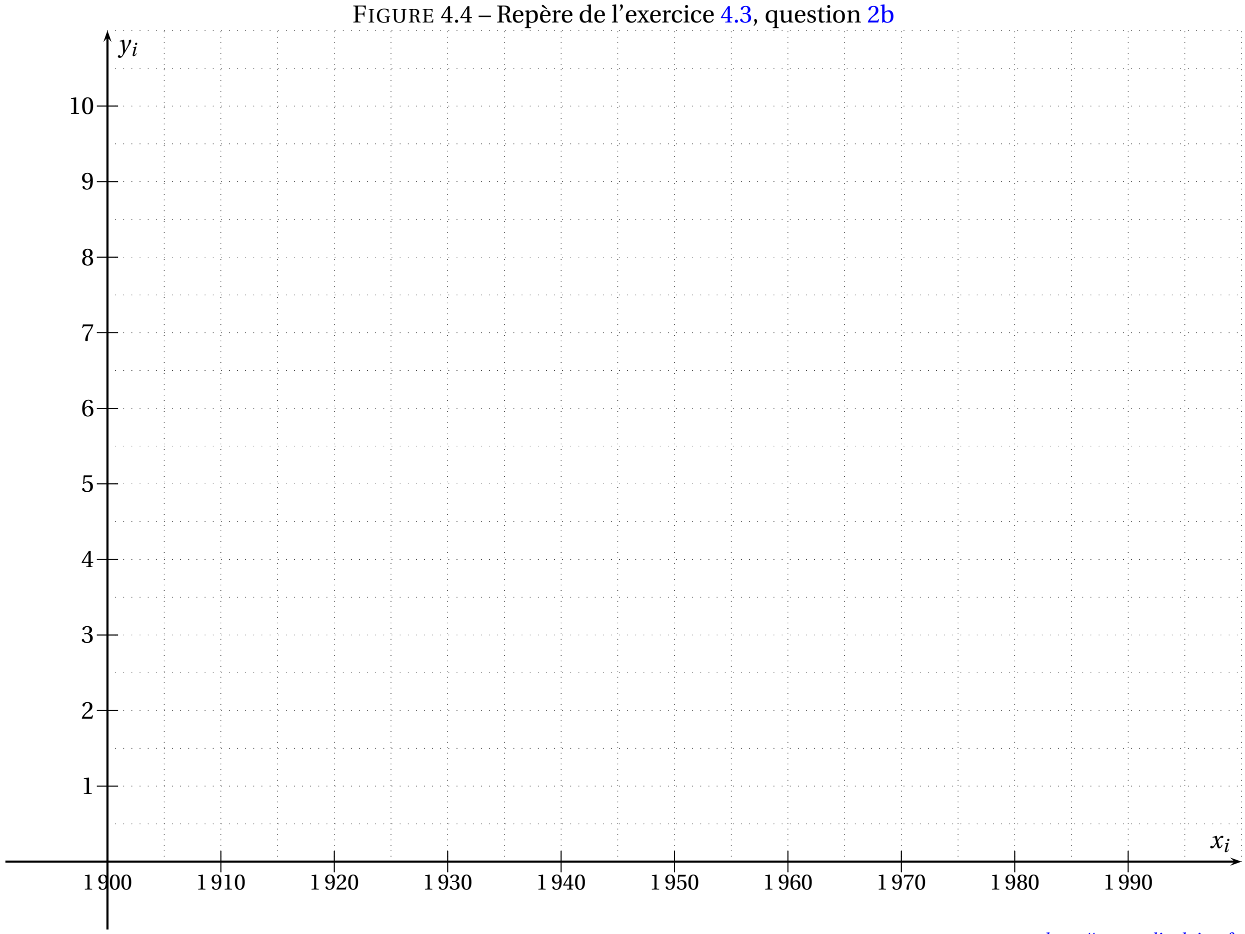


FIGURE 4.5 – Figure de l'exercice 4.4