Mathématiques en Première ES

David ROBERT

2008–2009

Sommaire

Chapitre 1

Second degré

Sommaire

1.1 Activités

Activité 1.1. 1. Soit f la fonction carré. Dresser le tableau de variation de f et déterminer son minimum et les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)^2$.
   (a) Soit a et b deux réels tels que $-3 \leq a < b$. Compléter :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \leq & a+3 & < & b+3 & & \\ \dots & \dots & (a+3)^2 & \dots & (b+3)^2 & & \text{car } \dots\dots\dots \end{array}$$

   Donc f est .... sur ....

   (b) En procédant de la même manière, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty; -3]$.

   (c) Dresser le tableau de variation de f puis en déduire le minimum de la fonction et les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses variations et dresser son tableau de variation, déterminer son extremum et les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   - $f(x) = (x-1)^2$
   - $f(x) = (x+2)^2 - 1$
   - $f(x) = (x-0,5)^2 + 2$
   - $f(x) = 3 - (x+1)^2$

Activité 1.2. 1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$ et $g(x) = (x+3)^2 - 4$.
   (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = g(x)$.

   (b) En déduire le tableau des variations de f et son extremum.

   (c) En déduire les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$ et le signe de f selon les valeurs de x.

2. Mêmes questions avec les fonctions f et g suivantes :
   - $f(x) = 2x^2 - x - 1$ et $g(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$

- $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ et $g(x) = -(x-1)^2 - 3$
- $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

Activité 1.3 (Cas général).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels. On appellera cette forme, la *forme développée*.
Les activités précédentes ont montré que lorsqu'on pouvait obtenir $f(x)$ sous la forme $f(x) = \alpha(x+\beta)^2 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels, alors on pouvait en déduire les variations de f, son extremum, les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ et le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x. On appellera cette forme, la *forme canonique*.
On cherche dans cette activité à obtenir les valeurs de α, β et γ dans le cas général.

1. En développant la forme canonique, montrer que α, β et γ sont les solutions du système :
$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = 2\alpha\beta \\ c = \alpha\beta^2 + \gamma \end{cases}$$
2. En déduire que :
$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = \dfrac{b}{2a} \\ \gamma = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

1.2 Trinôme

1.2.1 Définition, forme développée

Définition 1.1. On appelle *trinôme* toute expression qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la *forme développée* du trinôme.

1.2.2 Forme canonique

Théorème 1.1. *Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(x+\beta)^2 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

Preuve. L'activité 1.3 a montré que $\alpha = a$, $\beta = \frac{b}{2a}$ et $\gamma = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. ♢

Remarque. Pour alléger les écritures, et parce que cette quantité aura un rôle important plus tard, on notera : $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique devient alors :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \qquad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac}$$

1.2.3 Racines et discriminant

Définitions 1.2. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$. On appelle :
- *racine* du trinôme tout réel solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- *discriminant* du trinôme, noté Δ, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 1.2. *Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.*
- *Si $\Delta < 0$, alors le trinôme* ***n'a pas de racine****.*
- *Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a* ***une unique racine*** *: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a* ***deux racines*** *: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$*

Remarques.
- Le signe de Δ permet *discriminer* les équations de type $ax^2 + bx + c = 0$ qui ont zéro, une ou deux solutions, c'est la raison pour laquelle on l'appelle le *discriminant*[1].
- Si $\Delta = 0$ les formules permettant d'obtenir x_1 et x_2 donnent $x_1 = x_0$ et $x_2 = x_0$; pour cette raison, on appelle parfois x_0 la *racine double* du trinôme.

Preuve. On a vu que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ donc $(\mathscr{E}) : ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

1. Discriminer. *v. tr.* Faire la discrimination, c'est-à-dire l'action de distinguer l'un de l'autre deux objets, ici des équations

- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ alors ax^2+bx+c est égal à la somme de deux quantités positives (la seconde strictement) donc $ax^2+bx+c > 0$ et $(\mathscr{E})$ n'a pas de solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$.
- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ alors $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ donc $ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$. $(\mathscr{E})$ a une unique solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$.
- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ alors ax^2+bx+c est de la forme $a(A^2-B^2)$ donc :
  $ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow (A^2-B^2) = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)$
  donc deux solutions :
  1. $x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.
     Donc, si $a > 0$, $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, si $a < 0$, $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  2. $x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.
     Donc,si $a > 0$, $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, si $a < 0$, $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  Donc, dans tous les cas, $\mathscr{E}$ a deux solutions qui sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$.

♢

1.2.4 Forme factorisée, signe d'un trinôme

Propriété 1.3. *Soit ax^2+bx+c un trinôme.*
- *Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2 alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.*
- *Si le trinôme a une racine x_0 alors $ax^2+bx+c = a(x-x_0)(x-x_0) = a(x-x_0)^2$.*
- *Si le trinôme n'a pas de racine, il n'a pas de forme factorisée.*

Cette écriture, lorsqu'elle existe, est appelée forme factorisée *du trinôme.*

Preuve. On a obtenu les formes factorisées dans la démonstration précédente. ♢

Propriété 1.4. *Soit ax^2+bx+c un trinôme.*
- *Si le trinôme n'a pas de racine, ax^2+bx+c est strictement du signe de a pour tout x.*
- *Si le trinôme a une racine, ax^2+bx+c est strictement du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$ et s'annule en $-\frac{b}{2a}$.*
- *Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2, ax^2+bx+c est :*
  · *strictement du signe de a quand $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$;*
  · *strictement du signe opposé de a quand $x \in]x_1; x_2[$;*
  · *s'annule en x_1 et en x_2.*

On peut aussi énoncer cette propriété de la façon synthétique suivante :

Propriété 1.5. *Un trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent.*

Preuve. On a vu que $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

- Dans le cas où $\Delta < 0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est la somme de deux quantités positives, la seconde strictement, donc le signe de ax^2+bx+c est strictement celui de a.
- Dans le cas où $\Delta = 0$, $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, donc le signe de ax^2+bx+c est celui de a. Plus précisement : il ne s'annule qu'en $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et est sinon strictement du signe de a.
- Dans le cas où $\Delta > 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines. En supposant que $x_1 < x_2$ (sinon il suffit d'inverser les racines), le tableau de signe ci-desous donne le résultat.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

♢

1.3 Fonction trinôme

1.3.1 Définition

Définition 1.3. On appelle *fonction trinôme* une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui à x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

1.3.2 Sens de variation

Propriété 1.6. *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Preuve. La preuve sera admise dans le cas général même si elle est du même type que les cas particuliers déjà vus dans les activités. ♢

1.4 Bilan

Un bilan des principales propriétés vous est proposé sous forme de tableau page ci-contre.

1.5 Exercices et problèmes

1.5.1 Exercices

Exercice 1.1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 = 9$;
- $x^2 = -3$;
- $(x-5)^2 = 3$;
- $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$;
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$;
- $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$.

Exercice 1.2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $4x^2 - x - 3 = 0$;
- $(t+1)^2 + 3 = 0$;
- $2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0$;
- $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$.

Exercice 1.3.
Résoudre les équations suivantes :

- $x^2 = \frac{1}{2}$
- $x^2 = \frac{1}{3}$.
- $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Exercice 1.4.
Résoudre l'équation $2004x^4 + x^2 - 2005 = 0$.

Exercice 1.5.
On note $P(x) = -2x^2 - x + 1$.

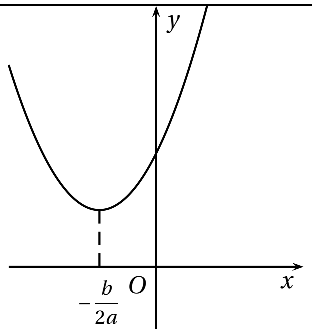
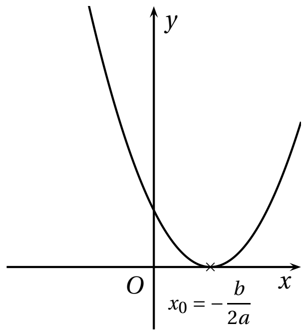
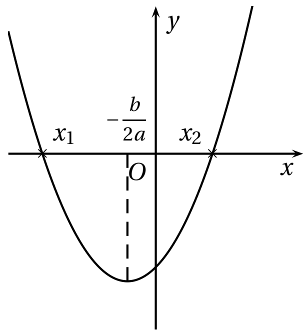
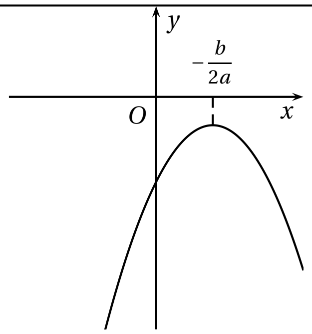
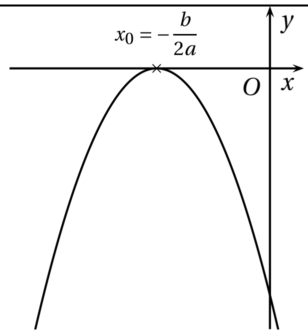
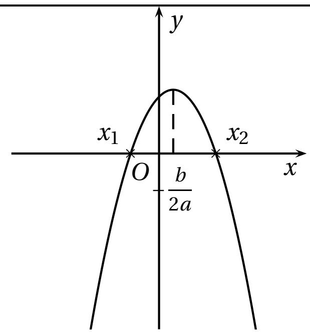
1. Résoudre $P(x) = 0$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre $P(x) \leq 0$.

Exercice 1.6.
Résoudre les équations suivantes :

- $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $\dfrac{x^2-x+1}{x+2} = 2x+3$

Exercice 1.7.
Résoudre les inéquations suivantes :

TABLE 1.1 – Bilan du second degré

	$\Delta = b^2 - 4ac$		
	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
	$ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c=0$ a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$ax^2+bx+c=0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	ax^2+bx+c n'a pas de racine	ax^2+bx+c a une racine double	ax^2+bx+c a deux racines
	Aucune factorisation	$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$	$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
Si $a > 0$			
	$ax^2+bx+c > 0$ sur $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c \geq 0$ sur $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c \geq 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2+bx+c \leq 0$ sur $[x_1; x_2]$
Si $a < 0$			
	$ax^2+bx+c < 0$ sur $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c \leq 0$ sur $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c \leq 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2+bx+c \geq 0$ sur $[x_1; x_2]$

- $-2x^2+7x-5 \leq 0$;
- $\dfrac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} > 0$.
- $-x^2+9x+22 \geq 0$;
- $\dfrac{x^2-3x+2}{-x^2+2x+3} \geqslant 0$

Exercice 1.8.
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3-3x^2+13x+15$.

1. Montrer que $x = -1$ est racine de ce polynôme.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$.
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.
   (b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

1.5.2 Problèmes

Problème 1.1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2+2x+1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Précisez la nature de la courbe $\mathscr{C}$ et les coordonnées de son sommet S.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
3. Pour quelles valeurs de x la courbe $\mathscr{C}$ est-elle situé au dessus de l'axe des abscisses ?

Problème 1.2.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2+10q+900$:
   (a) déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
   (b) la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

Problème 1.3.
Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisément on a : $x = 300-12p$.

1. Entre quelles valeurs peut varier le prix du billet ?
2. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1 848 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2+300p-1848$.
3. En déduire pour quelles valeurs de p le séance est rentable.
4. Déterminer le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

Problème 1.4.
Une mutuelle complémentaire propose à ses adhérents le mode de remboursement suivant : lorsque la sécurité sociale a remboursé t% des frais de maladie, la mutuelle rembourse à l'adhérent t% de ce qui reste à sa charge .
Madame Martin, sur l'une de ses feuilles de remboursement de frais, constate que le taux global de remboursement de ses frais est 87.75%. Quel est le taux de remboursement de la sécurité sociale ?

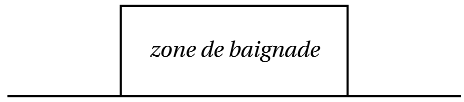
Problème 1.5.
Une société de livres par correspondance a actuellement 10000 abonnés qui paient hacun 50 € par an. Une étude a montré qu'une augmentation (respectivement une diminution) de 1 € du prix de l'abonnement annuel, entraîne une diminution (respectivement une augmentation) de 100 abonnés.
On se propose de trouver comment modifier le prix de l'abonnement annuel pour obtenir le maximum de recette.
n désigne la variation du prix de l'abonnement annuel en euros (n est un entier relatif).

1. Exprimer en fonction de n le prix de l'abonement annuel, et le nombre d'abonnés correspondant.
2. Exprimer en fonction de n la recette annuelle de cette socité, notée $R(n)$.
3. Déterminer la valeur de n pour laquelle $R(n)$ est maximum.
   Quel est alors le montant de l'abonnement annuel, le nombre d'abonnés et la recette totale correspondante ?

Problème 1.6.
Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

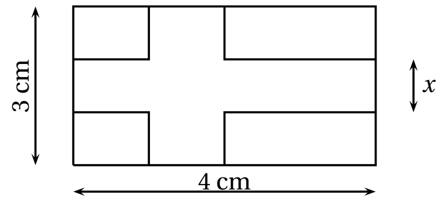
Problème 1.7.

Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



Problème 1.8.

Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



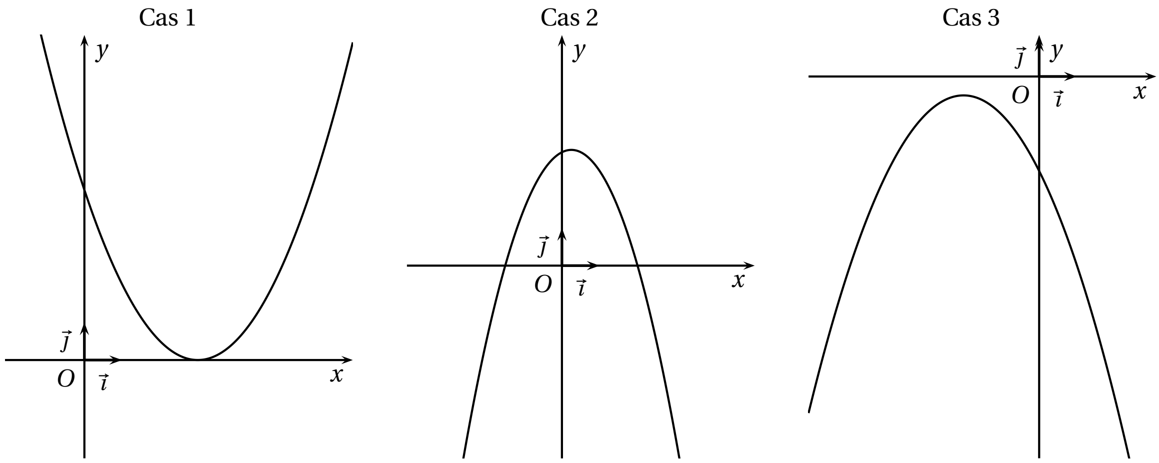
Devoir surveillé n°1

Second degré

Exercice 1.1 (3 points).
On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions du second degré f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dans chacun des cas, indiquer le signe de a, le nombre de racines et si le discriminant Δ du trinôme est strictement positif, strictement négatif ou nul.



Exercice 1.2 (6 points).
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x^2 - 4x - 4 = 0$.
2. $x^2 + 2x - 3 = 0$.
3. $2x^2 - 4x - 3 = 0$.
4. $3x^2 - x + 1 = 0$.

Exercice 1.3 (6 points).
On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - x - 2} \geq 0$$

1. Étudier le signe de $-x^2 + 4x - 3$ selon les valeurs de x.
2. Étudier le signe de $x^2 - x - 2$ selon les valeurs de x.
3. À l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de $\dfrac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - x - 2}$ selon les valeurs de x et conclure.

Exercice 1.4 (5 points).
Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité.
Une entreprise fabrique x tonnes de produit qu'elle vend ensuite.
Une étude montre que le bénéfice de l'entreprise est donné, en milliers d'euros, par la fonction B, définie pour $x \geq 0$, par :

$$B(x) = 2x^3 - 3x^2 - x - 2$$

1. Montrer que lorsque la production est $x = 2$ tonnes, le bénéfice est nul.
2. Montrer que $B(x) = (x - 2)(2x^2 + x + 1)$.
3. Étudier le signe de $2x^2 + x + 1$ selon les valeurs de x.
   À l'aide d'un tableau de signe, en déduire le signe de $B(x)$ selon les valeurs de x.
4. En déduire pour quelle production l'entreprise est déficitaire et pour quelle production elle est bénéficiaire.

Exercice 1.4 (5 points).

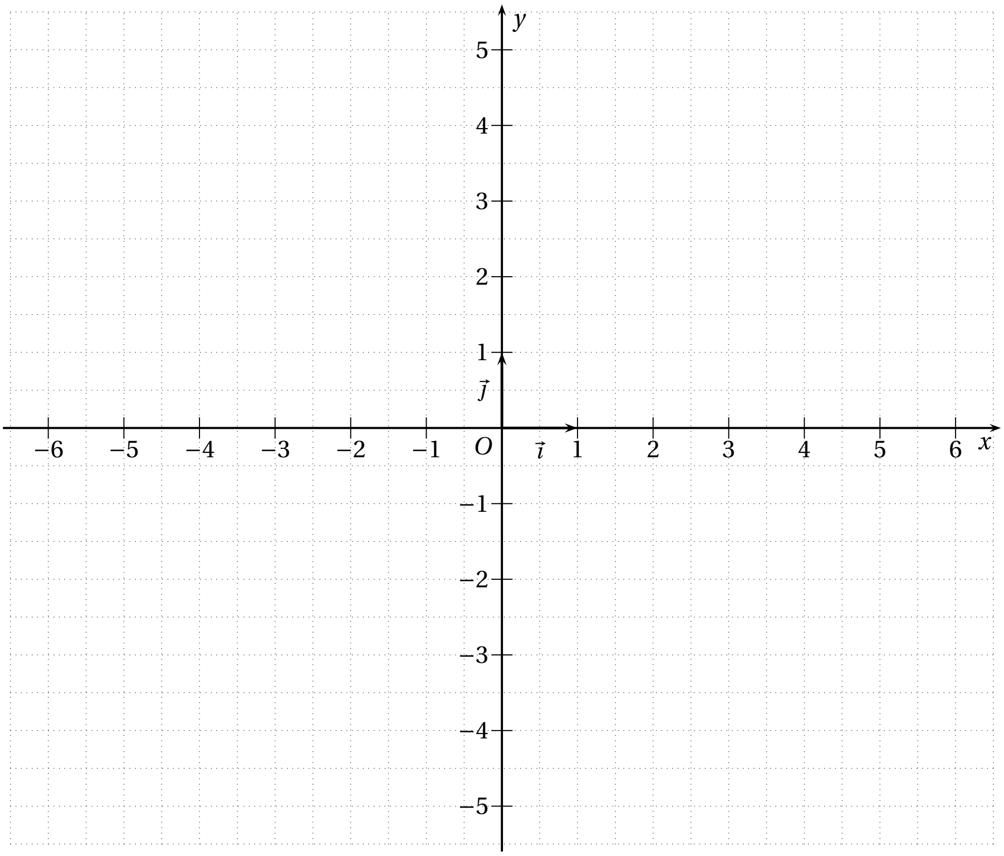
Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

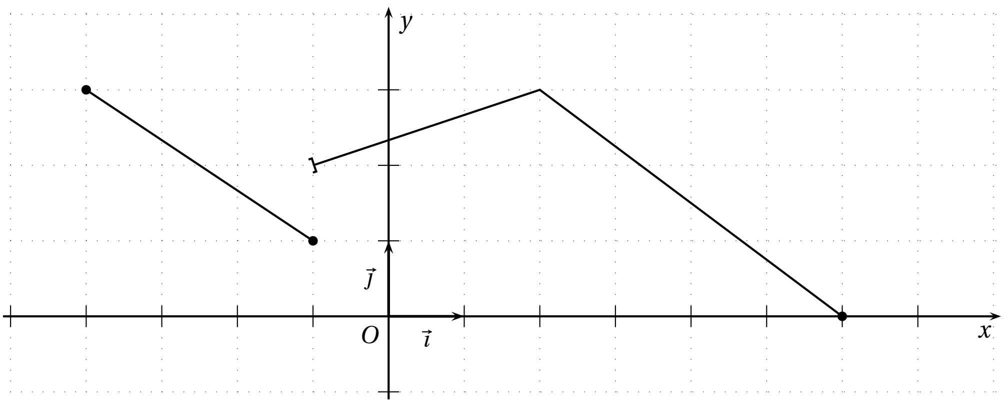
1. f est la fonction définie sur $]-\infty\,;4]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+2 & \text{si} \quad x\leqslant -3\\ 2 & \text{si} \quad -3<x<1\\ x-1 & \text{si} \quad 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

   Représenter cette fonction dans le repère ci-dessous.



2. La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f affine par morceaux définie sur $[-4\,;6]$. Déterminer l'expression de f.



Chapitre 2

Pourcentages

Sommaire

2.1 Introduction

Conformément au programme, ce chapitre n'introduit pas de connaissance technique nouvelle, c'est pourquoi il est quasi exclusivement constitué d'exercices.

Il s'agit essentiellement d'entretenir un apprentissage de base indispensable pour lire correctement et de facon critique l'information chiffrée.

2.1.1 Qu'est-ce qu'un pourcentage ?

C'est d'abord un nombre issu d'un rapport, une proportion, entre le nombre d'éléments d'un ensemble de référence (en général une population) et le nombre d'éléments d'un sous ensemble de l'ensemble de référence, rapport que l'on transforme de façon à ce que le denominateur soit égal à 100 (d'où l'origine du terme *pour-cent*).

On obtient ainsi le nombre d'éléments que comporterait le sous ensemble *si il y avait 100 éléments dans l'ensemble de référence*.

Ainsi s'il y a 16 garçons dans une classe de 26 élèves, il y en a $\frac{16}{26} \approx 0,6154 = \frac{61,54}{100} = 61,54\%$.

Les garçons représentent environ 61,54 % des élèves de la classe, c'est-à-dire que si il y avait 100 élèves dans la classe et que les garçons étaient en meme proportion, alors il y aurait 61,54 garçons.

2.1.2 Taux et pourcentage

Il existe une confusion largement répandue sur ce qu'est un pourcentage. Lorsqu'on parle de 61,54%, on parle d'un nombre valant, très exactement, $\frac{61,54}{100}$, c'est-à-dire 0,6154.

Le nombre 61,54 est appelé le *taux* (ce n'est pas le pourcentage). Ainsi, s'il vous est demande d'arrondir les pourcentages au dixième, 0,6154 deviendra 0,6, c'est-à-dire 60 %, alors que si on vous demande d'arrondir les taux au dixième, 0,6154, qui est égal à 61,54 % deviendra 61,5 %.

2.2 Techniques de base

Exercice 2.1.
28 % correspond à $\frac{28}{100} = 0,28$.

1. Traduire de même chacun des pourcentages suivants :
   - 41 % ;
   - 35 % ;
   - 3 % ;
   - 19,6 % ;
   - 7,5 % ;
   - 0,5 % ;
   - 150 % ;
   - 400 %.
2. Écrire sous forme de pourcentage les nombres décimaux suivants :
   - 0,17 ;
   - 0,5624 ;
   - 0,125 ;
   - 1,17 ;
   - 0,06 ;
   - 0,0015 ;
   - 0,0107 ;
   - 3.

Exercice 2.2.
1. Quel est le montant de la TVA sur un CD dont le prix hors taxe est de 17,80 € ?
2. En 2 004, la population active française comptait 27 455 000 individus, dont 12 680 000 femmes. Quel pourcentage de la population active représentaient les femmes ?
3. 28 % de la surface du territoire français, ce qui représente environ 154 000 km^2, est constitué de terrain boisé (forêts, etc.). Quelle est la surface totale du territoire français ?
4. Lors de l'achat d'un article coûtant 1 625 €, je dois verser un acompte de 130 €. Quel pourcentage de la somme totale cet acompte représente-t-il ?
5. Lors de l'achat d'un autre article, je dois verser un acompte de 15 %, et il me restera alors à débourser 1 700 €. Quel est le prix de cet article ?

Exercice 2.3.
On considère trois classes de Première ES dans un Lycée.

Classe	A	B	C
Filles	10	8	9
Élèves	40	20	18

Déterminer la proportion de filles dans chacune des classes. Que constate-t-on ?

Exercice 2.4.
1. Une personne passe une petite annonce dans un journal diffusé dans 18 % des foyers d'un département. Elle passe aussi cette annonce dans un autre journal diffusé, lui, dans 25 % des foyers du département. À quelle condition cette personne peut-elle espérer que son annonce touche 43 % des foyers du département ? Pourquoi ?
2. Vrai ou faux ? Dans une entreprise 21 % des employés a moins de 25 ans et 36 % a plus de 45 ans ; donc 43 % du personnel de cette entreprise a entre 25 et 45 ans.
3. Dans cette entreprise, 40 % des employés ont suivi le stage de formation en comptabilité, tandis que 48 % ont suivi le stage d'anglais. Sachant que 35 % des employés ont suivi ces deux stages, quel pourcentage des employés de l'entreprise peut prétendre avoir suivi au moins l'un des deux stages ?
4. Vrai ou faux ? Dans cette même entreprise, 18 % des employés (hommes) a une ancienneté inférieure à 5 ans, tout comme 22 % des employées (femmes). Donc 40 % des employés de l'entreprise a une ancienneté inférieure à 5 ans.

2.3 Changement d'ensemble de référence

Exercice 2.5.
Dans le Lycée Georges Brassens, l'anglais est choisi comme langue vivante 1 par une partie des élèves de Première ES. Les élèves de Première ES contituent l'ensemble de référence.

1. Compléter le tableau de répartition ci-dessous (les taux seront arrondis à un chiffre après la virgule).

Classe	Effectif	Élèves en anglais LV1	
		Effectif	Part en %
1 ES1	32	20	
1 ES2		28	80 %
1 ES3	33		
Total			70%

2. Le Lycée ayant 320 élèves en Première, quelle est la part en pourcentage des élèves de Première ES étudiant l'anglais en LV1 parmi les élèves de Première du Lycée ?

Exercice 2.6.
Il y a 800 élèves au Lycée JACQUES CARTIER. dans ce Lycée :
- 15 % des élèves de Lycée sont des filles de Première ;
- 48 % des élèves de Première sont des filles ;
- 25 % des filles du Lycée sont en Première.

1. Calculer l'effectif des filles de Première.
2. En déduire l'effectif des élèves de Première, puis des filles dans ce Lycée.
3. Compléter le tableau des effectifs ci-dessous :

	Fille	Garçon	Total
Première			
Autres			
Total			

4. Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce Lycée.

Exercice 2.7.
Voici les résultats du référendum du 29 mai 2 005 à Paris (*source : ministère de l'intérieur*) :

Inscrits	:	1 084 114
Abstention	:	24,94 % des inscrits
Blancs ou nuls	:	1,61 % des votants
Oui	:	66,45 % des suffrages exprimés
Non	:	33,55 % des suffrages exprimés

1. Quel est le nombre de votants ? Le nombre de suffrages exprimés ?
2. Quel pourcentage représentent les suffrages exprimés parmi les votants ? Parmi les inscrits ?
3. Quel est le pourcentage de Oui parmi la totalité des votants ? Par rapport à l'ensemble des inscrits ?

Exercice 2.8.
1. Un Lycée compte 1 250 élèves ; 26 % d'entre eux sont en classe de Première et 24 % des élèves de Première sont en Première ES.
   (a) Quel calcul doit-on effectuer pour déterminer le nombre d'élèves de Première du Lycée ?
   (b) Quel calcul doit-on faire pour déterminer le nombre d'élèves en Première ES dans ce Lycée ?
   (c) Combien y a-t-il d'élèves en Première ES dans ce Lycée ? Quel pourcentage cela représente-t-il vis-à-vis de l'ensemble des lycéens ?
   (d) Quel calcul aurait-on pu faire directement pour déterminer ce pourcentage ?
2. 75 % des foyers d'un pays ont une connexion Internet, dont 80 % de type ADSL. Quel est le pourcentage de foyers équipés d'une connexion ADSL dans ce pays ?
3. Dans une population, 65 % des individus partent en vacances et 20 % de ceux qui partent en vacances vont à la montagne. Quelle est la proportion de départs à la montagne dans cette population ?

Exercice 2.9.
1. Considérons les statistiques (fictives) suivantes :
   - en janvier 2 004 : 2 183 500 chômeurs, dont 624 200 jeunes (moins de 25 ans) ;
   - en janvier 2 005 : 2 008 700 chômeurs, dont 617 400 jeunes.

   Le nombre de chômeurs a-t-il diminué ? Le nombre de jeunes chômeurs a-t-il diminué ? Le pourcentage de jeunes chômeurs parmi l'ensemble des chômeurs a-t-il diminué ?
2. Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1 997	1 998	1 999	2 000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

   (a) De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?
   (b) De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?

2.4 Pourcentage d'évolution

2.4.1 Activité

Activité 2.1.
Au 1er janvier 2 000, trois villes ont une population de 25 000 habitants.

1. *Ville 1*
   (a) La population de la première ville augmente de 6 % en 2 000, en 2 001 et en 2 002.
   En déduire sa population au 1er janvier 2 003.
   (b) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée :
      i. entre le 1er janvier 2 000 et le 1er janvier 2 001 ?
      ii. entre le 1er janvier 2 001 et le 1er janvier 2 002 ?
      iii. entre le 1er janvier 2 002 et le 1er janvier 2 003 ?

   Ce nombre s'appelle le *coefficient multiplicateur* correspondant à une augmentation de 6 %.
   (c) Par quelle nombre la population a-t-elle été multipliée entre le 1er janvier 2 000 et le 1er janvier 2 003 ?
   À quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?
2. *Ville 2*
   Le 31 décembre 2 000, la deuxième ville a une population de 26 400 habitants.
   Calculer le coefficient multiplicateur correspondant et en déduire le pourcentage d'augmentation.
3. *Ville 3*
   La population de la troisième ville diminue de 6 % durant l'année 2 000.
   (a) Calculer sa population à la fin 2 000, puis le coefficient multiplicateur correspondant.
   (b) Si la population augmente de 6 % l'année suivante, calculer sa population à la fin 2 001.
   En déduire le pourcentage global d'évolution sur les deux années de début 2 000 à fin 2 001.

2.4.2 Quelques propriétés

Propriété 2.1. Augmenter *une grandeur de t %, où $t \geq 0$, revient à multiplier cette grandeur par* $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.
Diminuer *une grandeur de t %, où $t \geq 0$, revient à multiplier cette grandeur par* $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)$.
Lorsqu'une grandeur évolue *de t %, où t peut être positif (augmentation) ou négatif (diminution), elle est multipliée par* $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.

Preuve. Soit G la valeur de la grandeur avant l'évolution et G' celle après l'évolution.

- Dans le cas d'une augmentation, on a $G' = G + G \times \dfrac{t}{100} = G \times \left(1+\dfrac{t}{100}\right)$. G est donc bien multipliée par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.
- Dans le cas d'une diminution, on a $G' = G - G \times \dfrac{t}{100} = G \times \left(1-\dfrac{t}{100}\right)$. G est donc bien multipliée par $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)$.
- Le dernier cas est le cas général.

♢

Propriété 2.2. *Le taux d'évolution t d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par :* $t = \dfrac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.

Remarque. Si t est positif, c'est une hausse de t %, si t est négatif c'est une baisse de $|t|$ %.

Preuve. Dans le cas général, d'après la propriété précédente :
$$V_F = V_I \times \left(1+\frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow V_F = V_I + V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow V_F - V_I = V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100.$$
♢

Hausses et baisses successives

On l'a vu dans l'activité, dans le cas de hausses ou de baisses successives, les pourcentages ne s'ajoutent pas ; il faut multiplier les coefficients multiplicateurs correspondants.

En particulier, une baisse de t % n'est pas compensée par une hausse de t % (et réciproquement).

2.4.3 Exercices

Exercice 2.10. 1. Calculer les coefficients multiplicateurs dans chacun des cas suivants :

- hausse de 20 % ;
- baisse de 15 % ;
- hausse de 0,1 % ;
- baisse de 5,2 % ;
- hausse de 100 % ;
- baisse de 85 % ;
- hausse de 300 % ;
- baisse de 100 %.

2. Donner les pourcentages de hausse ou de baisse associés aux coefficients multiplicateurs suivants :

- 1,25 ;
- 0,98 ;
- 1,175 ;
- 3 ;
- 1,001 ;
- 1,01 ;
- 1,0049 ;
- 1,0101 ;
- 0,875 ;
- 0,5 ;
- 0,999 ;
- 0,1.

3. Donner le pourcentage d'évolution pour une grandeur qui passe :

- de 12 540 à 13 620 ;
- de 5,7 à 2,6 ;
- 21 000 à 84 000.

Exercice 2.11. 1. En août un loyer était de 564 €. Un an plus tard il est de 589 €. Quelle est son évolution en pourcentage ?

2. Le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2 004 était de 124 000 €. En 2 005, les prévisions donnent un chiffre d'affaire de 117 000 € seulement. Quelle est son évolution en pourcentage ?

Exercice 2.12.
Dire que la TVA est de 19,6 % revient à dire que le prix hors taxe (HT) a été augmenté de 19,6 % de TVA pour obtenir le prix toutes taxes comprises (TTC).

1. Par quel nombre doit-on multiplier le prix HT pour obtenir le prix TTC ?
2. Un article vaut 120 € HT. Combien va-t-on le payer en magasin ?
3. Vous payez un article en magasin (donc TTC) à 200 €. À combien s'élève le prix HT et la TVA en € ?
4. Vaut-il mieux bénéficier d'une réduction de 20 % sur le prix HT ou sur le prix TTC ?

Exercice 2.13. 1. Le prix d'un article augmente de 22 % puis diminue de 15 %. Quel est le pourcentage d'évolution de cet article ?

2. Le prix d'un produit subit successivement une hausse de 12 %, une baisse de 5 %, une baisse de 8 % et une hausse de 2 %. Quel est le pourcentage de variation final.
3. Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2 % par mois pendant un an, quel sera le pourcentage de diminution du nombre de chômeurs sur l'année ?
4. Un client veut acheter un véhicule qui coûtait 17 000 € le mois dernier mais qui, depuis, a augmenté de 4 %. Le vendeur consent une remise de 3,85 %. Le modèle coûte-t-il plus ou moins de 17 000 € ?

Exercice 2.14. 1. Après une augmentation de 5 % suivie d'une hausse de t %, on obtient une hausse globale de 17,6 %. Combien vaut t ?

2. À la bourse de Paris, l'action Renault :
   - a augmenté de 1,45 % entre le 10 juin 2 000 et le 11 juin 2 000 ;
   - a baissé de 0,5 % entre le 10 juin 2 000 et le 12 juin 2 000.

   Quelle a été son évolution entre le 11 juin 2 000 et le 12 juin 2 000 ?
3. Après deux augmentation successives de t % le prix d'un produit a globalement augmenté de 20 %. Combien vaut t ?
4. Après une augmentation de t % suivie dune baisse de t %, on obtient une baisse globale de 4 %. Combien vaut t ?
5. Un article subit une augmentation de 10 %. Quel pourcentagede baisse doit-on appliquer pour compenser cette hausse ?

Exercice 2.15. 1. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 2 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 6 % ?

2. Est-il pertinent de dire qu'une hausse de 1 % suivie d'une baisse de 3 % suivie d'une hausse de 2% sont approximativement équivalentes à une évolution globale de 0 % ?
3. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 20 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globales de 60 % ?

2.5 Indices

Les indices sont des pourcentages qui ne disent pas leur nom.

Ils sont essentiellement utilisés dans des séries chronologies.

La valeur d'une grandeur observée d'une année ou d'un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence.

Indices et grandeurs sont alors proportionnels.

Propriété 2.3. *Soit n et n' deux dates, V_n et $V_{n'}$ les valeurs d'une grandeur à ces deux dates et I_n et $I_{n'}$ les indices correspondants, alors*

$$\frac{I_n}{I_{n'}} = \frac{V_n}{V_{n'}}$$

En particulier, si n' est la date de référence (indice 100) et en notant V_0 la valeur de la grandeur à cette date, on a :

$$\frac{I_n}{100} = \frac{V_n}{V_0} \Leftrightarrow I_n = \frac{V_n}{V_0} \times 100$$

On l'admettra.

Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

Exercice 2.16.

Le tableau suivant donne la production de blé et d'orge en Algérie, en millions de tonnes :

Année	1 996	1 997	1 998	1 999
Blé	2,983	0,662	2,280	1,503
Orge	1,800	0,191	0,700	0,481

En prenant comme indice 100 la production de 1 996, complétez le tableau suivant :

Année	1 996	1 997	1 998	1 999
Blé	100			
Orge	100			

Exercice 2.17.

On veut connaître l'évolution du PIB par habitant en France depuis 1 990 qui servira d'année de référence.

On dispose du tableau suivant qu'on complètera au fur et à mesure par les réponses aux questions :

Année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
PIB (en $)	1 195	1 201	1 322	1 250	1 331	1 535	1 554	1 406	1 447	1 432
Indice										

1. Calculer l'indice des années 1 991, 1 995, 1 996 et 1 999 (arrondis à 0,1).
2. En déduire le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre :
   - 1 990 et 1 991 ;
   - 1 990 et 1 995 ;
   - 1 990 et 1 999 ;
3. Quelle est l'unité de l'indice ?

Exercice 2.18.

Le tableau ci-dessous donne les montants, en millairds d'euros, des cotisations sociales versées par les non-salariés en France, de 1 994 à 1 999 (*source : INSEE*) :

Année	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Montant	16,66	17,33	19,03	19,25	15,23	15,99

1. En prenant 100 pour base en 1 994, calculer les indices des autres années.
2. En déduire les pourcentages d'évolution de ces montants de 1 994 à 1 996, de 1 994 à 1 998, 1 994 à 1 999.
3. En utilisant ces indices, calculer les pourcentages d'évolution de ces montants de 1 997 à 1 999.

Exercice 2.19.
Le tableau ci-dessous done l'évolution de l'indice des prix à la consommation en France entre 1 998 et 2 004 en prenant pour année de base l'année 1 998 (indice 100) (*source : INSEE*) :

Année	1 998	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Indice	100	100,5	102	103,5	105,6	107,6	109,3

1. Donner l'évolution globale des prix consommés par les ménages entre :
   - 1 998 et 1 999 ?
   - 1 998 et 2 001 ?
   - 1 998 et 2 004 ?
   - 2 000 et 2 002 ?
   - 2 000 et 2 004 ?
2. Reconstruire un tableau donnant l'évolution de l'indice des prix entre 2 000 et 2 004, en prenant 2 000 come année de référence (indice 100).

Exercice 2.20.
Le tableau suivant indique l'évolution du PIB base 100 en 1 980 aux États-Unis (EU), au Japon et dans l'Union Européenne (UE) :

Année	1 980	1 990	1 999
EU	100	132,6	172,3
Japon	100	155,2	166,0
UE	100	126,8	146,8

1. Donner le pourcentage d'évolution du PIB aux EU entre 1 980 et 1 990 puis entre 1 980 et 1 999. Faire de même pour le PIB du Japon et dans l'UE.
2. Pour les EU, calculer l'indice du PIB en 1 999 base 100 en 1 990. faire de même pour le Japon et l'UE (valeurs arrondies à 0,1 près).
3. Si le PIB aux EU était de 5 554 milliards de dollars en 1 990, calculer le PIB en 1 980 et en 1 999 (valeurs arrondies au milliard de dollars).
4. Peut-on dire que le PIB du Japon est supérieur à celui de l'UE ?

Devoir surveillé n°2

Pourcentages

Tous les taux seront donnés avec une décimale. Tous les résultats devront être justifiés.

Exercice 2.1 (7 points).
Dans une entreprise, 70% des salariés sont des hommes, 6% des femmes sont cadres et 4% des hommes sont cadres.

1. (a) Quel pourcentage de salariés sont des femmes ?
   (b) Quel pourcentage de salariés sont des femmes cadres ?
   (c) Quel pourcentage de salariés sont des hommes cadres ?
   (d) Quel pourcentage de cadres sont des femmes ?
   (e) Recopier le tableau suivant et le compléter par les pourcentages de salariés.

	Femmes	Hommes	Total
Cadres			
Non cadres			
Total			

2. (a) L'entreprise compte 23 cadres. Quel est le nombre total de salariés ?
   (b) Recopier le tableau précédent et le compléter par les effectifs réels des salariés.

Exercice 2.2 (7 points).
Les prix seront donnés au centime d'euro.

1. Après une baisse de 10 % un article coûte 40 €. Quel était son prix initial ?
2. Un article augmente de 30 %. De combien devra-t-il baisser pour retrouver son prix initial ?
3. Deux hausses successives de t % équivalent à une hausse de 15 %. Déterminer t.
4. Une baisse de t % suivie d'une hausse de t % équivalent à une baisse de 3 %. Déterminer t.
5. En 2000, la TVA sur les travaux est passée de 19,6 % du prix hors taxes à 5,5 % du prix hors taxes. Pour la construction d'un mur, M. Machin avait un devis de 2 135 € toutes taxes comprises. Combien devra-t-il payer maintenant compte tenu de la baisse de TVA ?

Exercice 2.3 (6 points).
Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*
Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Cocher cette réponse sur la feuille, à rendre avec la copie.
Une réponse exacte rapporte 1,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,75 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Augmenter une quantité de 10 %, puis la diminuer de 10 % c'est :
   ☐ revenir à la quantité initiale. ☐ augmenter la quantité initiale de 1,21 %. ☐ diminuer la quantité initiale de 1,21 %.
2. Dans une classe, 37 % des élèves pratiquent du tennis, 16 % de la natation et 10 % ces deux sports. Combien en pratiquent au moins un des deux :
   ☐ 53 %. ☐ 43 %. ☐ 63 %.
3. Une quantité qui subit deux baisses successives de 6 % et de 5 % :
   ☐ diminue de 10,7 %. ☐ diminue de 5,5 %. ☐ diminue de 11 %.
4. Une entreprise a augmenté l'effectif de son personnel de 3 % en 2 004 puis elle a licencié 5 % de ses salariés en 2 005. Une autre entreprise a débauché 20 % de ses employés en 2 004 puis a augmenté l'effectif de son personnel de 22 % en 2 005. Dans quelle entreprise le personnel est-il le plus nombreux fin 2 005 ?
   ☐ La première. ☐ La seconde. ☐ On ne peut pas le savoir.

Exercice 2.3 (6 points).

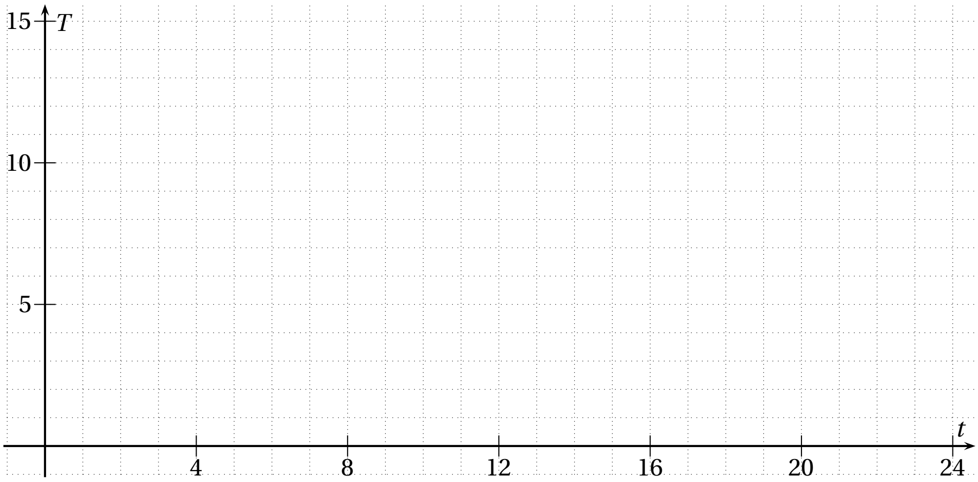
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*

Le tableau suivant indique les températures relevées toutes les 4 heures dans une ville au cours d'une journée.

heure t	0 h	4 h	8 h	12 h	16 h	20 h	24 h
température T	6°	4°	7°	9°	14°	11°	7°

On appelle f la fonction qui à l'heure t associe la température $f(t)$.

1. Représenter la courbe d'interpolation de f dans le repère ci-dessous.



2. Par lecture graphique évaluer la température à 7 h.
3. Par identification des coefficients directeurs, évaluer l'intervalle pendant lequel la température était supérieure à 11°.
4. À l'aide d'une équation de droite, évaluer la température toutes les heures entre 12 h et 16 h.

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

Sommaire

3.1 Activités

Activité 3.1 (Fonctions de référence (rappels)).
Compléter le tableau 3.1, page suivante, sur le modèle de la deuxième ligne.

Activité 3.2 (La fonction racine).
On appelle *fonction racine* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction racine.
2. Montrer que si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Que peut-on en déduire ?
3. Tracer la courbe représentative de la fonction racine.

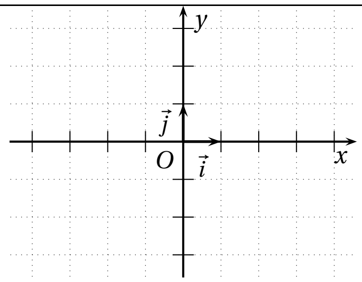
Activité 3.3 (Sommes de fonctions).

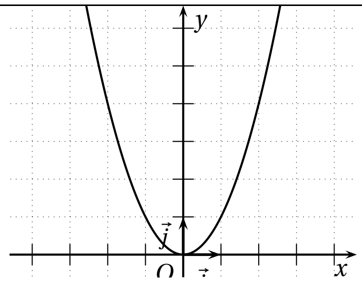
1. (a) Sur le graphique 3.1 page 23, tracer la courbe représentant la fonction f, somme des deux fonctions déjà représentées.
   (b) Donner, par lecture graphique, les variations de la fonction f.
   (c) Y a-t-il un lien entre les variations des deux fonctions représentées et celles de f ?
2. (a) À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur tracer les courbes représentatives des fonctions f et g (définies sur $\mathbb{R}$) ci-dessous puis de la fonction h, somme de ces deux fonctions et relever par lecture graphique les sens de variation de chacune de ces fonctions :
   - $f(x) = 2x+3$ et $g(x) = x-4$;
   - $f(x) = -2x+4$ et $g(x) = x+1$;
   - $f(x) = -2x+1$ et $g(x) = 2x-4$;
   - $f(x) = -3x+2$ et $g(x) = x-4$;
   - $f(x) = -x+4$ et $g(x) = -2x+3$.

   (b) Même question avec les fonctions f et g suivantes et la fonction h, somme de ces deux fonctions :

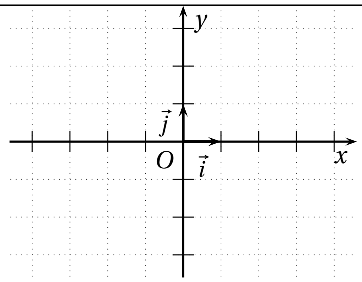
TABLE 3.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité 3.1

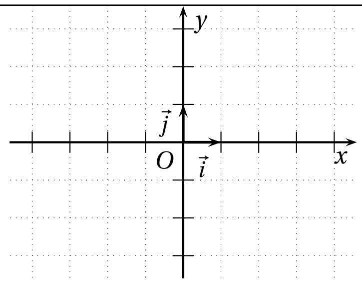
<table>
<tr><th>Fonction
Définie sur</th><th>Variations</th><th>Allure de la courbe représentative</th></tr>
<tr><td>Affine
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Carré
$f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) = x^2$</td><td>$\searrow$ 0 $\nearrow$</td></tr></table></td><td>

Parabole</td></tr>
<tr><td>Cube
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Inverse
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Valeur absolue
$f(x) =$

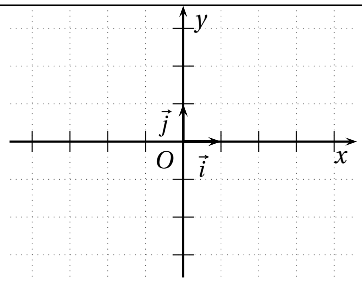
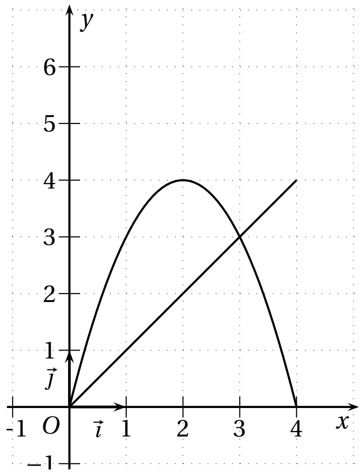
$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

FIGURE 3.1 – Graphique de l'activité 3.3



- $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x + 1$;
- pour $x \neq 0$, $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$;
- $f(x) = -x^3$ et $g(x) = -x + 2$;
- pour $x \neq -2$, $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$.

(c) Conjecturer le lien qu'il existe entre les variations de f et g et celles de h puis le prouver.

Activité 3.4 (Fonctions associées).
Soit f, g, h, k, l les fonctions définies par :

- $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $g(x) = 3 + \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $h(x) = \sqrt{x+4}$ pour $x \in [-4; +\infty[$
- $k(x) = -\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $l(x) = 4\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

1. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, tracer la courbe représentative de f puis celle de g.
2. Décrire la transformation permettant de passer de la courbe de f à celle de g en précisant ses caractéristiques si cette transformation est une transformation usuelle (symétrie, etc.).
3. Mêmes questions en remplaçant g par chacune des autres fonctions.

3.2 Rappels sur la notion de fonction

Les définitions et propriétés suivantes ont été vues en Seconde aussi les propriétés ne seront pas démontrées.

3.2.1 Définition, vocabulaire et notations

Définition 3.1. Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f sur un ensemble D, c'est associer, à chaque réel $x \in D$, *au plus* un réel noté $f(x)$.
On dit que $f(x)$ est l'*image* de x par f et que x est un *antécédent* de $f(x)$.
On note :

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et on lit « f, la fonction de D dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$ ».

Remarque. f désigne la fonction, $f(x)$ désigne le réel qui est l'image de x par f.

3.2.2 Ensemble de définition

Définition 3.2. L'ensemble des réels possédant une image par une fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction. On le note en général D_f.

On le détermine par le calcul. À notre niveau les seuls problèmes de définition portent sur les fonctions comportant la variable x au dénominateur ou sous une racine.

3.2.3 Courbe représentative

Définition 3.3. Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ où x décrit D_f est appelé *courbe représentative* (ou représentation graphique) de la fonction f. On la note en général $\mathscr{C}_f$.
On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

On veillera à ne pas confondre la fonction et sa représentation graphique.

3.3 Comparaison de fonctions

Comparer deux fonctions f et g c'est déterminer si $f(x) = g(x)$ pour tout x et, sinon, sur quel(s) intervalle(s) on a $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$.

3.3.1 Égalité de deux fonctions

Définition 3.4. Soit f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales si :
- f et g ont même ensemble de définition D ;
- pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.

On note alors $f = g$.

3.3.2 Comparaison de deux fonctions

Cas général

Définition 3.5. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au moins sur D. On dit que f est ***inférieure à*** g sur D lorsque $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$.
On note $f \leq g$ sur D.

Remarque. On dit parfois que f est majorée par g sur D ou que g est minorée par f sur D.

Les conséquences graphiques sont les suivantes :

Propriété 3.1. *Soient f et g deux fonctions définies au moins sur D, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes respectives. Alors si $f \leq g$ sur D, $\mathscr{C}_f$ est* au-dessous *de $\mathscr{C}_g$.*

Preuve. Immédiat. ◊

Cas particulier – Fonction majorée, minorée, bornée

Dans les cas où l'une des deux fonctions est constante (ici $g(x) = m$) on a :

Définition 3.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :
- f est *minorée sur I* s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$. m est un minorant de f sur I ;
- f est *majorée sur I* s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. M est un majorant de f sur I ;
- f est *bornée sur I* si elle est majorée et minorée sur I.

La représentation graphique de f est alors :
- au-dessus de la droite d'équation $y = m$ si elle est minorée par m ;
- au-dessous de la droite d'équation $y = M$ si elle est majorée par M ;
- dans une bande horizontale délimitée par les droites d'équation $y = m$ et $y = M$ si elle est bornée par m et M.

3.4 Opérations sur les fonctions

3.4.1 Opérations algébriques sur les fonctions

De la même manière qu'on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des nombres, on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des fonctions.

Définition 3.7. Soit f et g deux fonctions définies au moins sur D et k un réel. Le tableau suivant regroupe les opérations sur les fonctions f et g :

Opération	Notation	Définition	Définie pour
Somme de la fonction f et du réel k	$f+k$	$(f+k)(x) = f(x)+k$	$x \in D_f$
Produit de la fonction f et du réel k	kf	$(kf)(x) = kf(x)$	
Somme des fonctions f et g	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
Différence des fonctions f et g	$f-g$	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$	
Produit des fonctions f et g	fg	$(fg)(x) = f(x)\times g(x)$	
Quotient des fonctions f et g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$

3.4.2 Fonctions associées

Définition 3.8. Soit f une fonction définie sur D et k un réel.
On appelle fonctions associées à f les fonctions : $x \mapsto f(x)+k \quad x \mapsto f(x+k) \quad x \mapsto kf(x)$

Remarque. Ces fonctions ne sont en général pas définies sur le même ensemble de définition que f.

Propriété 3.2. *Soit f une fonction définie sur D et k un réel.*
- *La courbe de $f+k$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $\vec{u}(0;k)$*
- *La courbe de $x \mapsto f(x+k)$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $\vec{u}(-k;0)$*
- *Dans un repère orthogonal, la courbe de $-f$ s'obtient à partir de celle de f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses*

On l'admettra.

3.5 Variations d'une fonction

3.5.1 Rappels

Définition 3.9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que
- f est *croissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : si $a<b$, alors $f(a) \leq f(b)$;
- f est *décroissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : si $a<b$, alors $f(a) \geq f(b)$;
- f est *monotone sur I* si f ne change pas de sens de variation sur I.

Remarque. On obtient les définitions de strictement croissante ou décroissante en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

3.5.2 Variations de $f+g$

Propriété 3.3. *Soit deux fonctions f et g définies au moins sur un ensemble D.*
- *Si f et g sont deux fonctions croissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est croissante sur D.*
- *Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est décroissante sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 3.5 ◇

3.5.3 Variations de $f+k$

Propriété 3.4. *Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions f et $f+k$ ont même sens de variation sur I.*

Preuve. Si f est croissante et $a<b$, alors $f(a) \leq f(b)$. Donc $f(a)+k \leq f(b)+k$ donc $f+k$ est aussi croissante.
On démontre de la même manière si f est décroissante. ◇

Exemple 3.1. La fonction $f : x \longmapsto x^2+2$ a les mêmes variations que la fonction carrée.

3.5.4 Variations de kf

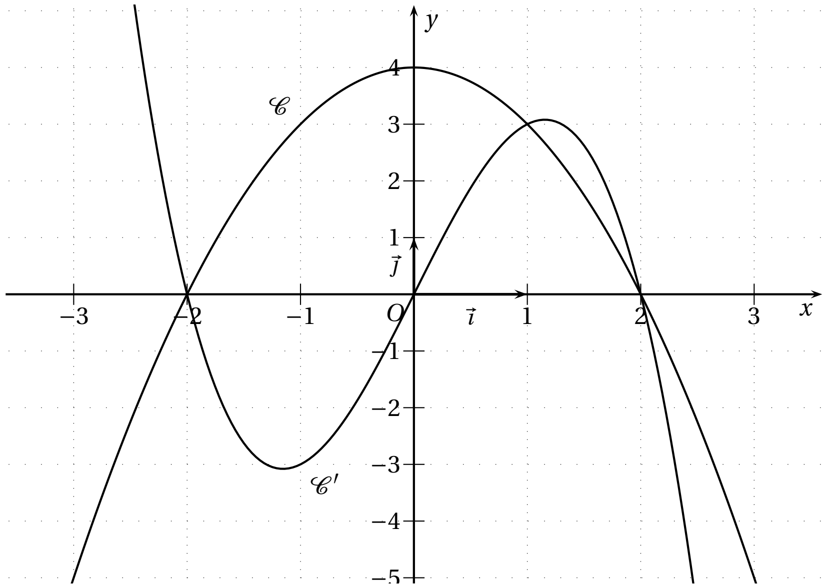
Propriété 3.5. *Soit f une fonction définie et monotone sur D.*
- *Si $k > 0$ alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur D.*
- *Si $k < 0$ alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 3.6 ◇

3.6 Exercices

Exercice 3.1.
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 4x$ et $g(x) = -x^2 + 4$.
On a tracé sur le graphique 3.2 de la présente page les courbes représentatives de f et de g.

FIGURE 3.2 – Graphique de l'exercice 3.1



1. Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier succinctement.
2. Déterminer graphiquement puis par le calcul les solutions des équations :
   - $f(x) = 0$;
   - $g(x) = 0$;
3. (a) Résoudre graphiquement : $f(x) \leq g(x)$.
   (b) En factorisant d'abord f résoudre par le calcul $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 3.2.
Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.
1. Étudier le signe de $f(x) - g(x) = x - x^2$.
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

Exercice 3.3.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
1. Calculer $f(x) - g(x)$ (*réduire au même dénominateur*).
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

Exercice 3.4.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1-x)$.
En étudiant le signe de $\frac{1}{4} - f(x)$, montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{4}$.

Exercice 3.5 (Preuve de la propriété 3.3).
1. Montrer que si a et b sont deux nombres de D tels que $a < b$ et que f et g sont croissantes sur D, alors $(f+g)(a) \leq (f+g)(b)$. Conclure.
2. Mêmes questions lorsque f et g sont décroissantes sur D.

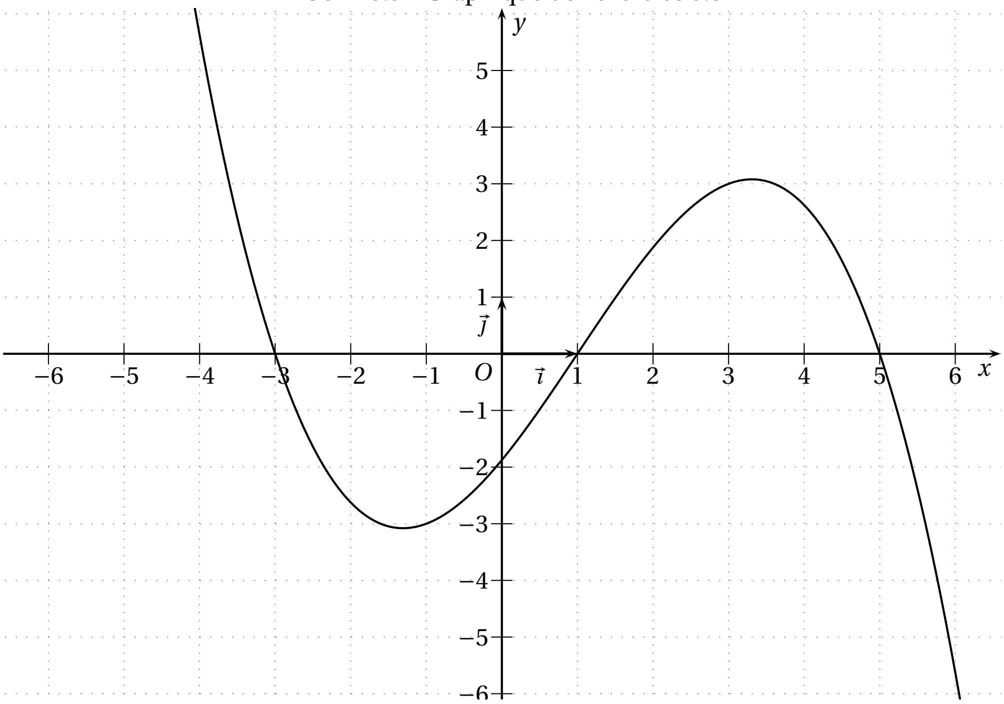
Exercice 3.6 (Preuve de la propriété 3.5).
Montrer que :
- si a et b sont deux nombres de D tels que $a < b$
- si f croissante sur D
- et si $k < 0$

alors $kf(a) \geqslant kf(b)$.
Conclure.

Exercice 3.7.
1. Donner une décomposition de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 + 2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ et décrire simplement comment obtenir la courbe représentative de f à partir de celle d'une fonction de référence.
2. Mêmes questions pour les fonctions suivantes :
   - $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$;
   - $f(x) = (x+1)^3 - 1$;
   - $f(x) = 3 - (x+1)^2$;
   - $f(x) = 3 + \dfrac{1}{2+x}$;
   - $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-2}$;
   - $f(x) = -3\sqrt{x+1}$.

Exercice 3.8.
On a représenté sur la figure 3.3 de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Y tracer les courbes des fonctions suivantes :
- $u = f + 2$;
- $v = -2f$;
- $w(x) = f(x+3)$;
- $z = |f|$.

FIGURE 3.3 – Graphique de l'exercice 3.8



Exercice 3.9.
Soient f et g les fonctions définies par :
- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$;
- $g(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$.

1. Quels sont leurs ensembles de définition ?
2. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x :
   - $f(x) = a + \dfrac{b}{x}$;
   - $g(x) = c + \dfrac{d}{x-4}$.
3. En déduire les tableaux de variations de ces deux fonctions.
4. (a) Vérifier que, pour tout réel t : $f(2+t) = g(2-t)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour leurs représentations graphiques ?

Exercice 3.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-3}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x+1$. On pose $d(x)=f(x)-g(x)$.
   (a) Étudier le signe de $d(x)$ selon les valeurs de x.
   (b) En déduire la position de $\mathscr{C}$ par ropport à $\mathscr{D}$.

Exercice 3.11.
Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
3. Déterminer la position de la courbe de g par rapport à la droite d'équation $y=1$ selon les valeurs de x.

Exercice 3.12.
1. On considère la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{-4}{x+1}$.
   À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g et son ensemble de définition.
2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.
   Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.
   (b) Placer les points trouvés aux questions précédentes dans un repère et tracer soigneusement $\mathscr{C}$.

Exercice 3.13.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{-x^2+5x-4}{x-2}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
   (b) En déduire les variations de f.
2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y=-x+3$ selon les valeurs de x.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Placer les points et les droites rencontrés dans les questions précédentes dans un même repère et y tracer $\mathscr{C}$.

Exercice 3.14 (Exercice type corrigé).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-3}{x-2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

$f(x)=\dfrac{(ax+b)(x-2)}{x-2}+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$

Par identification :

$$\begin{cases} a=2 \\ -2a+b=-3 \\ -2b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Donc $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x-2}$

2. En déduire les variations de f.

On a $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x-2}=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=2x+1$ et $v(x)=-\dfrac{1}{x-2}$.

$u(x)=2x+1$ est une fonction affine croissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$.

$v(x)=-\dfrac{1}{x-2}$ est une fonction associée à la fonction inverse or on sait que :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

donc, d'après les propriétés des fonctions associées :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\dfrac{1}{x-2}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

et donc

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-\dfrac{1}{x-2}$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

f est donc la somme de deux fonctions croissantes sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$, elle est donc croissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

- *Intersection avec* (Oy)

  On a $x=0$ et $y=f(0)=\dfrac{-3}{-2}=1{,}5$ donc A $(0;1{,}5)$ est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec (Oy).
- *Intersection avec* (Ox)

  On cherche x tel que $y=f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-3x-3}{x-2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-3=0$ et $x-2\neq 0$.

  $\Delta=(-3)^2-4(2)(-3)=33>0$ donc deux racines : $x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$ ou $x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$.

  Donc B $\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{4};0\right)$ et C $\left(\dfrac{3-\sqrt{33}}{4};0\right)$ sont les intersections de $\mathscr{C}$ avec (Ox).

4. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

On cherche sur quels intervalles $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe et sur quels intervalles elle est en-dessous. Cela revient à étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Comme $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-3}{x-2}$, on va donc étudier le signe du numérateur et du dénomitateur et faire un tableau de signes.

- *Numérateur*
  C'est un trinôme, donc du signe du coefficient de x^2 sauf entre les racines qu'on a déjà trouvées dans la question précédente.
- *Dénominateur*
  C'est une expression affine croissante.
- *Tableau de signes*

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{33}}{4}$		2		$\frac{3+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
$2x^2-3x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left[\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}\,;2\right[\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}\,;+\infty\right[$ et au-dessous sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}\right]\cup\left]2\,;\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}\right[$.

5. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x+1$ selon les valeurs de x.

On va étudier le signe de $f(x)-(2x+1)$.

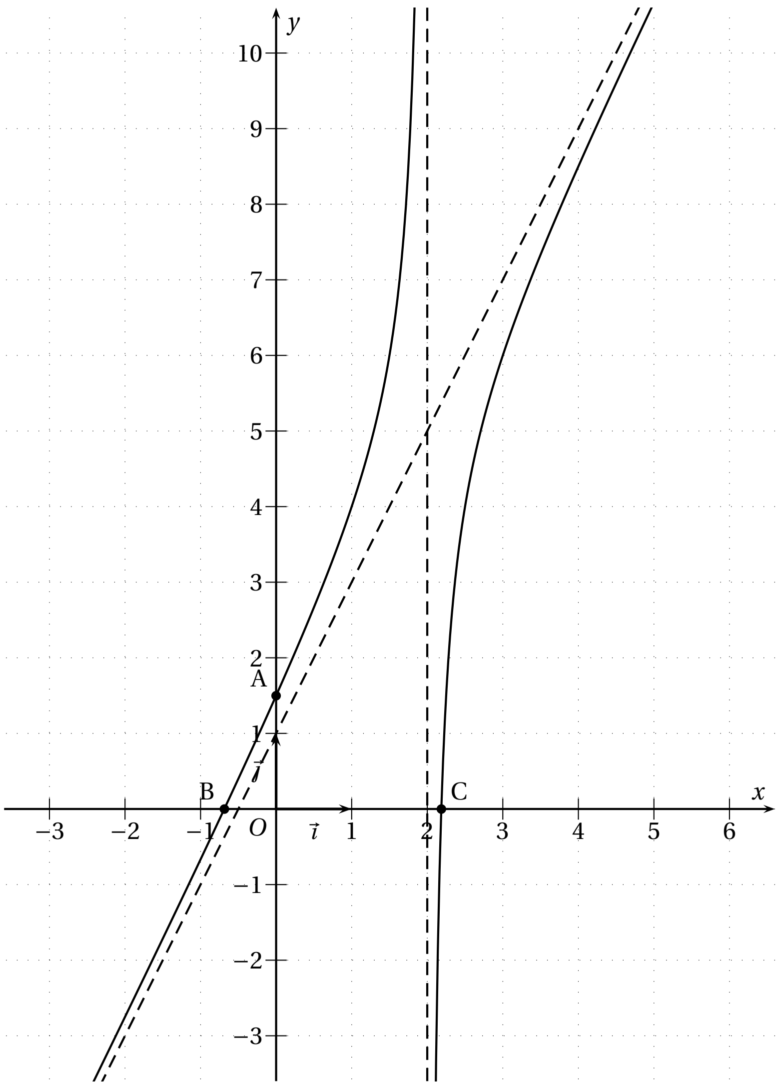
$f(x)-(2x+1)=2x+1-\dfrac{1}{x-2}-(2x+1)=-\dfrac{1}{x-2}$. Or :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$-\dfrac{1}{x-2}$		$+$	$\Vert$	$-$	

Finalement :

- Quand $x<2$:
  $f(x)-(2x+1)>0 \Leftrightarrow f(x)>2x+1 \Leftrightarrow \mathscr{C}>\mathscr{D}$
- Quand $x>2$:
  $f(x)-(2x+1)<0 \Leftrightarrow f(x)<2x+1 \Leftrightarrow \mathscr{C}<\mathscr{D}$

6. Placer dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ les points rencontrés dans les questions précédentes, tracer la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$.


y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
O
A
B
C

Devoir surveillé n°3

Indices – Généralités sur les fonctions

Exercice 3.1 (8 points).

Tous les résultats seront données avec deux décimales.

Un indice boursier est une mesure statistique calculée par le regroupement des valeurs des titres de plusieurs sociétés. L'indice boursier sert généralement à mesurer la performance d'une bourse ou d'un marché.

On trouve sur le site de l'Institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) le tableau 3.1 de la présente page donnant les moyennes mensuelles des indices boursiers du CAC40 (bourse de Paris), de l'EURO STOXX 50 (Zone euro) et DOW-JONES (bourses de New York), base 100 en janvier 1 999, depuis juin 2 007, date où la crise dite des « subprimes » a commencé à avoir des effets sur le cours des actions.

TABLE 3.1 – Indices boursiers – **base 100 en janvier 1 999**

	CAC40	EUROSTOXX50	DOW-JONES
juin 2 007	145,40	127,55	144,36
juillet 2 007	144,40	126,94	146,43
août 2 007	133,79	120,43	141,79
septembre 2 007	135,30	122,25	145,08
octobre 2 007	140,05	126,42	148,87
novembre 2 007	134,53	123,12	141,17
décembre 2 007	135,82	125,16	143,65
janvier 2 008	125,06	115,33	134,41
février 2 008	117,12	107,76	132,97
mars 2 008	111,94	102,36	130,67
avril 2 008	118,46	107,51	135,54
mai 2 008	121,33	108,79	137,05
juin 2 008	119,53	106,11	133,14

Sources : Insee ; Datainsight.

TABLE 3.2 – Indices boursiers – **base 100 en juin 2 007**

	CAC40	EUROSTOXX50	DOW-JONES
juin 2 007	100,00	100,00	100,00
juillet 2 007	99,31	99,53	
août 2 007	92,02	94,42	
septembre 2 007	93,05	95,84	
octobre 2 007	96,32	99,12	
novembre 2 007	92,53	96,53	
décembre 2 007	93,41	98,13	
janvier 2 008	86,01	90,42	
février 2 008	80,55	84,48	
mars 2 008	76,99	80,25	
avril 2 008	81,47	84,29	
mai 2 008	83,44	85,29	
juin 2 008	82,21	83,19	

1. (a) En juin 2 007, quel indice avait-il le plus augmenté depuis janvier 1 999 ?
   (b) En juin 2 008, quel indice avait-il le plus augmenté depuis janvier 1 999 ?
2. Les deuxième et troisième colonnes du tableau 3.2 de la présente page ont été obtenues à partir du premier tableau, en prenant comme base 100 les indices de juin 2 007.
   Compléter la dernière colonne de la même manière.
3. (a) Déterminer, pour chaque indice, son évolution en pourcentage de juin 2 007 à décembre 2 007.
   Sur quel indice la crise a-t-elle eu le plus de conséquences sur ce semestre-ci ?
   (b) Déterminer, pour chaque indice, son évolution en pourcentage de janvier 2 008 à juin 2 008.
   Sur quel indice la crise a-t-elle eu le plus de conséquences sur ce semestre-là ?
   (c) Déterminer, pour chaque indice, son évolution en pourcentage de juin 2 007 à juin 2 008.
   Sur quel indice la crise a-t-elle eu le plus de conséquences sur l'année ?
4. Peut-on dire qu'en juin 2 008, les valeurs des titres de la bourse de Paris servant à constituer l'indice CAC40 étaient moins élevées que celles des bourses de New York servant à constituer l'indice DOW-JONES ?

Exercice 3.2 (7,5 points).

Pour chacune des fonctions suivantes :

- indiquer de quelle manière elle est associée à une fonction de référence ;
- en déduire son tableau de variations ;
- indiquer de quelle manière on peut obtenir la courbe de la fonction à partir de celle de la fonction de référence à laquelle elle est associée.

1. $f(x) = 2\sqrt{x+3}$
2. $g(x) = 4 - (x-1)^2$
3. $h(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$

Exercice 3.3 (4,5 points).

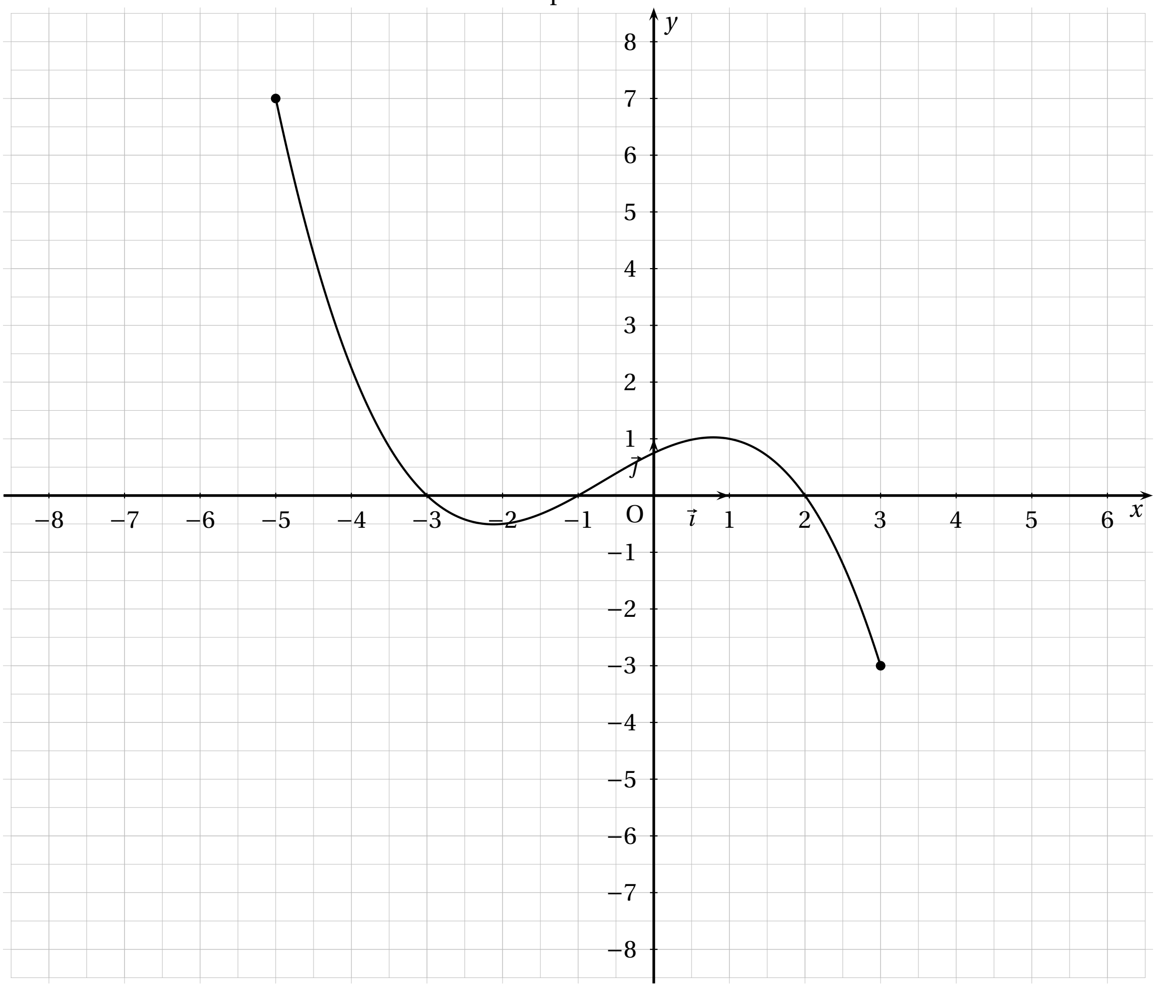
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*

On a représenté sur la figure 3.1 de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $[-4; 4]$.

Tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u = f + 1$;
- $v = -f$;
- $w(x) = f(x-3)$.

FIGURE 3.1 – Repère de l'exercice 3.3



Exercice 3.3 (4,5 points).

*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*

On justifiera toutes ses réponses.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On donne les points $A(1; 0; 1)$, $B(2; 2; 1)$, $C(3; 0; 1)$, $D(4; -2; 1)$ et $E(4; 2; 3)$.

1. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
2. La droite (DE) est-elle perpendiculaire au plan (ABC) ?
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Chapitre 4

Systèmes d'équations et d'inéquations

Sommaire

4.1 Activités

Activité 4.1 (Équations).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal.

1. On cherche à identifier quel est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $2x + y = 3$.
   (a) Déterminer y lorsque $x = 1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera A.
   (b) Déterminer y lorsque $x = 0$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera B.
   (c) Déterminer x lorsque $y = -3$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera C.
   (d) Déterminer x lorsque $y = -1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera D.
   (e) Que constate-t-on concernant A, B, C et D ?
   (f) Choisir un autre point ayant la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
   (g) Choisir un autre point n'ayant pas la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
2. En vous inspirant de ce qui précède, représenter l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $3x - 2y = 4$.
3. Mêmes questions avec les relations suivantes :
   - $-x + 3y = 1$;
   - $-x - 2y = 3$;
   - $2x + 0y = 5$;
   - $0x + 3y = 2$.

   Que constate-t-on dans les deux derniers cas ?

Activité 4.2 (Droites parallèles, droites sécantes).
Droites parallèles.

1. On considère les droites $\mathscr{D}_1 : 2x + 5 = 0$ et $\mathscr{D}_2 : x = -1$.
   Expliquer pourquoi elles sont parallèles.
2. On donne $\mathscr{D}_3 : y = 3x + 4$, $\mathscr{D}_4 : 3x - y = 9$ et $\mathscr{D}_5 : 3x + y = 0$.
   (a) Trouver l'équation réduite de chacune des droites $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$.
   (b) Reconnaître parmi ces trois droites celles qui sont parallèles.
3. On donne la droite $\mathscr{D} : 5x + 2y = 10$.
   (a) Trouver les points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec les axes du repère puis la tracer.
   (b) Trouver l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ et en déduire son coefficient directeur.
   (c) Tracer la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par le point $K(1; -1)$; trouver l'équation réduite de $\mathscr{D}'$.
   (d) Montrer que l'équation de $\mathscr{D}'$ peut s'écrire $5x + 2y = 3$.

(e) Montrer que la droite $\mathscr{D}''$ d'équation $5x+2y=c$, où c désigne un nombre réel, est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

(f) En déduire que la droite Δ d'équation $10x+4y=c'$, où c' désigne un nombre réel, est elle aussi parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

Droites sécantes.
On considère les droites $\mathscr{D}_1 : 2x+y=5$ et $\mathscr{D}_2 : 3x-5y=3$.

1. Trouver les équations réduites des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et montrer qu'elles sont sécantes.
2. Tracer ces deux droites et lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection I.
3. Expliquer pourquoi les coordonnées $(x\,;\,y)$ de I vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-5y=3 \end{cases}$$

4. Résoudre ce système.

Activité 4.3 (Régionnement du plan). 1. (a) Dans un repère orthogonal tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x-3y=6$.

(b) Choisir quatre points à coordonnées entières situés du même côté de $\mathscr{D}$ et calculer $2x-3y$ pour chacun d'entre eux.

(c) faire de même avec quatre autres points à coordonnées entières situés de l'autre côté de $\mathscr{D}$.

(d) Que constate-t-on ?

(e) Identifier la région du plan dont les points ont leurs coordonnées vérifiant $2x-3y \geq 6$ (on hachurera le reste).

2. En vous inspirant de ce qui précède, faire de même pour la région caractérisée par l'inéquation $-3x-4y \geq -12$ (on hachurera le reste).
3. Même question pour les inéquations $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
4. Quel système d'inéquations vérifie la région non hachurée ?

Activité 4.4 (Programmation linéaire).
On considère le problème suivant :

Une coopérative vinicole dispose de 600 bouteilles de vin rouge et 600 bouteille de vin blanc. Il est décidé de proposer à la vente deux assortiments :
- L'assortiment appelé A, comprenant deux bouteilles de vin rouge et trois bouteilles de vin blanc, est vendu 12 euros ;
- L'assortiment appelé B, comprenant cinq bouteilles de vin rouge et trois bouteilles de vin blanc, est vendu 20 euros.

Combien doit-on vendre d'assortiments de chaque sorte pour espérer un chiffre d'affaires maximal ?

1. Dans la résolution proposée ci-dessous, justifier :
   (a) la mise en équation ;
   (b) la construction du polygone ;
   (c) la conclusion.
2. Expliciter les solutions.

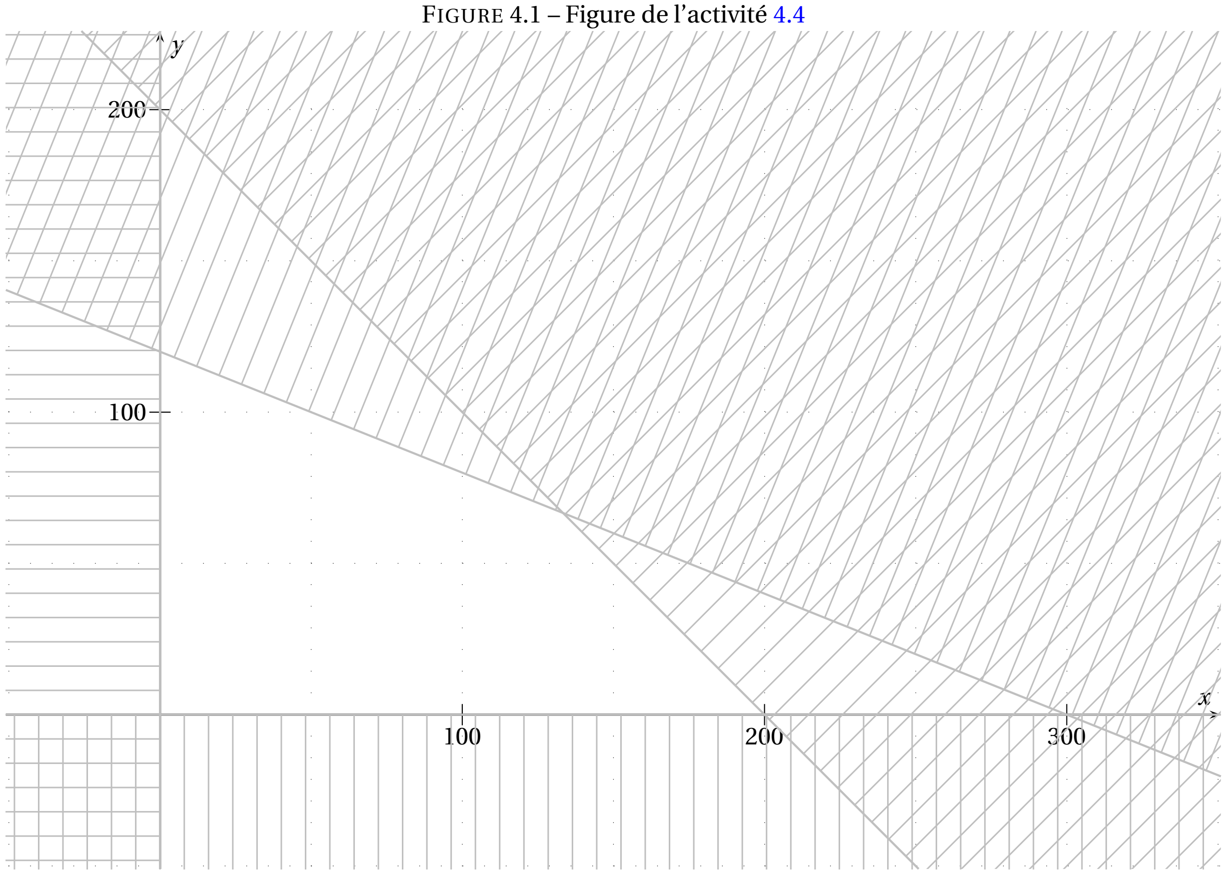
Résolution
On appelle x et y les nombres respectifs d'assortiments A et B.
x et y sont des nombres entiers vérifiant le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+5y \leq 600 \\ 3x+3y \leq 600 \end{cases}$$

On recherche alors les valeurs entières de x et y vérifiant le système précédent et telles que $12x+20y$ soit maximal.

On résout le problème graphiquement : dans le plan muni d'un repère, on représente les points M du plan dont les coordonnées vérifient le système d'inéquation ; ce sont les points situés à l'intérieur (zone non hachurée) du polygone dessiné sur la figure 4.1 page ci-contre.
On considère la droite D d'équation $12x+20y=0$. On recherche parmi toutes les parallèles à D, la droite D' qui coupe le polygone en au moins un point de coordonnées entières et dont l'ordonnée à l'origine est maximale. Ses coordonnées entières fournissent la solution du problème.

FIGURE 4.1 – Figure de l'activité 4.4



4.2 Bilan et compléments

Propriété 4.1 (rappel)**.** *Dans un repère, toute droite a une équation de la forme :*
- $y = mx + p$*, si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ;*
- $x = k$*, si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.*

L'équation $y = mx + p$ (quand elle existe) est appelée *équation réduite* de la droite, m est appelé *coefficient directeur* de la droite et p *ordonnée à l'origine*

Propriété 4.2 (rappel)**.** *Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entre elles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.*

Propriété 4.3. *Dans un repère :*
- *Soit* $\mathscr{D}$ *une droite du plan. Tous les points de cette droite ont des coordonnées qui vérifient une même équation de la forme* $ax + by = c$ *avec* $(a; b) \neq (0; 0)$.
- *L'ensemble des points* $M(x; y)$ *du plan qui vérifient* $ax + by = c$ *avec* $(a; b) \neq (0;0)$ *est une droite* $\mathscr{D}$.

On dira que la droite $\mathscr{D}$ *admet comme équation* $ax + by = c$.

Remarque. Si l'équation réduite est unique, ce n'est pas le cas d'une équation de la forme $ax + by = c$.
En effet, il suffit de multiplier cette équation par un réel quelconque (différent de 0) pour en obtenir une autre.

Preuve de la propriété.
- Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan et $M(x; y)$ un point de $\mathscr{D}$.
  $\mathscr{D}$ a pour équation réduite $y = mx + p$ ou $x = k$.
  Dans le premier cas, tous les points $M(x; y)$ vérifient $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ qui est de la forme $ax + by = c$ avec $(a; b) = (m; -1) \neq (0; 0)$.
  Dans le second cas, tous les points $M(x; y)$ vérifient $x = c \Leftrightarrow x - c = 0$ qui est de la forme $ax + by = c$ avec $(a; b) = (1; 0) \neq (0; 0)$.
- Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $ax + by = c$ avec $(a; b) \neq (0;0)$.
  Si $a = 0$, $b \neq 0$ et donc $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -c \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ (droite parallèle à l'axe des abscisses) qui est de la forme $y = mx + p$.

Si $b = 0$, $a \neq 0$ et donc $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow ax = -c \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées) qui est de la forme $x = c$.
Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ qui est de la forme $y = mx + p$.
Dans tous les cas, c'est bien une droite.

◇

Propriété 4.4. *Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$*

Preuve.

- Supposons que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
  - Si elles sont parallèles à l'axe des ordonnées, on a alors $b = b' = 0$ et donc $ab' - a'b = 0$
  - Dans tous les autres cas, elles admettent comme équations réduites, respectivement, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ et $y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$.
    Étant parallèles, $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow -ab' = -a'b \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.
- Supposons que $ab' - a'b = 0$.
  - Si $b = 0$, $a \neq 0$ et donc $b' = 0$. De même, si $b' = 0$, $b = 0$. Les deux droites sont alors parallèles à l'axe des ordonnées.
  - Dans tous les autres cas, $ab' - a'b = 0 \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$, donc elles ont même coefficient directeur. ◇

Des deux propriétés précédentes, on obtient la propriété suivante :

Propriété 4.5. *Soit $\mathscr{S}$ le système d'équation*

$$\mathscr{S}\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- *$\mathscr{S}$ a une unique solution $(x; y)$ si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$;*
- *sinon $\mathscr{S}$ a soit une infinité de solution, soit aucune solution.*

Preuve. Les droites d'équation $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$, sinon elles sont parallèles.
Dans ce cas elles peuvent être confondues (une infinité de points d'intersection) ou distinctes (aucun point d'intersection). ◇

Propriété 4.6 (admise)**.** *Une droite $\mathscr{C}$ d'équation $ax + by = c$ partage le plan en trois parties :*
- *la droite $\mathscr{C}$ dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by = c$;*
- *un demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$;*
- *un demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by < c$.*

Remarque. Le demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$ n'est pas forcément situé au-desus de la droite ; cela dépend des signes coefficients.
Pour savoir lequel des deux demi-plans est celui dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$, il suffit de faire un essai avec un point extérieur à la droite : si l'inéquation est vérifiée, tous les points situés du même côté de la droite forment ce demi-plan, sinon c'est l'autre.

Un système d'inéquations linéaires se résout graphiquement. Pour des raisons de lisibilité, on hachure en général les demi-plans ne convenant pas, la partie du plan non-hachurée étant l'ensemble des solutions.

4.3 Exercices

Exercice 4.1 (Prévoir sans calcul).

Pour chacun des systèmes suivants déterminer, sans le résoudre, s'il admet une solution unique. Dans les cas où le système n'admet pas de solution unique, préciser ce que l'on peut dire de l'ensemble solution.

1. $\begin{cases} 4x - 6y = -26 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -2y + 6x = 5 \\ -9x + 3y = -7,5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x = 6y + 7 \\ 8,5 - 2,5x + 5y = 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -3x + 4y = 9 - 5x \\ -x + 5y = 25 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$

Exercice 4.2 (Quelle méthode choisir ?).

Pour résoudre les systèmes, on dispose depuis la classe de troisième de deux méthodes principales et d'une troisième qui combine les deux précédentes.

1. Décrire ces trois méthodes.
2. Pour chacun des systèmes suivants, choisir la méthode de résolution la plus appropriée :

(a) $\begin{cases} 2x+7y=1 \\ 2x-7y=-3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x-y=7,5 \\ 3x+y=9 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-2=1+2y-5 \\ 3x=1-(y-1) \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -8(x-1)-7y-18=0 \\ 5y+8x=16 \end{cases}$

Exercice 4.3 (Organiser la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues).
On s'intéresse à des systèmes de trois équations à trois inconnues.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :
   $(S) : \begin{cases} x+y+5z=0 \\ 3x-y-z=-4 \\ 5x-2y-z=-7 \end{cases}$ Expliciter la méthode employée.
2. Voici la méthode exposée par GAUSS pour résoudre le système (S) (on appelle E_1 la première équation, E_2 la deuxième, E_3 la troisième) :
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5z=0 & (E_1) \\ -4y-16z=-4 & (E_2-3E_1)=(E'_2) \\ -7y-26z=-7 & (E_3-5E_1)=(E'_3) \end{cases}$
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5z=0 & (E_1) \\ y+4z=1 & \left(E'_2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=(E''_2) \\ -7y-26z=-7 & (E'_3) \end{cases}$
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5z=0 & (E_1) \\ y+4z=1 & (E''_2) \\ 2z=0 & (E'_3+7E''_2) \end{cases}$
   (a) En quoi le dernier système obtenu est-il intéressant pour la résolution de (S) ?
   (b) Décrire la méthode permettant d'obtenir ce système.
   (c) Donner l'ensemble solution de (S).
3. Résoudre à l'aide de la méthode précédente le système :
   $\begin{cases} x+1,5y=5,5-z \\ 7x=2y-z+26 \\ 25x-3y+6z-97=0 \end{cases}$

Exercice 4.4 (Système 2×2 : équilibre sur le marché pour un bien).
Une entreprise possède le monopole de la vente d'un certain type de café. Ce café est vendu sous forme de paquets d'un kg.
Une étude de marché a fourni les résultats suivants.

- **Offre :** Compte tenu des coûts de production, l'entreprise a fixé le prix minimal de vente à 2 €.
  Pour un prix de vente de 6 €, la production idéale pour l'entreprise est de 250 000 paquets.
- **Demande :** Compte tenu du marché, on estime que pour un prix de vente de 5,5 €, la demande serait de 50 000 paquets et pour un prix de vente de 3 €, elle serait de 175 000 paquets.

1. **Fonction d'offre**
   On considère le marché du point de vue de l'entreprise qui se préoccupe avant tout de sa rentabilité.
   On note p_o le prix de vente (en €) et Q_o le nombre optimal de paquets produits par l'entreprise (en milliers d'unités) pour ce prix de vente p_o.
   (a) Vérifier que la fonction $f : Q_o \longmapsto p_o = 0,016Q_o + 2$ vérifie les conditions de l'offre.
   (b) Dans un repère, représenter graphiquement la fonction f (on placera les quantités en abscisses et les prix en ordonnées).
2. **Fonction de demande**
   On se place ici du point de vue du consommateur qui a tendance à réduire sa consommation quand les prix de vente augmentent.
   On note p_d le prix payé (en €) et Q_d (en milliers d'unités) le nombre de paquets que les consommateurs sont prêts à acheter au prix p_d.
   La fonction de demande notée g associe à Q_d le prix p_d.
   On suppose que g est une fonction affine, $g : Q_d \longmapsto p_d = aQ_d + b$.
   (a) En utilisant les conditions sur la demande, établir un système de deux équations dont $(a ; b)$ est solution.
   (b) Résoudre ce système et en déduire l'expresion de g.
   (c) Sur le graphique précédent, représenter la fonction g.
   (d) Quel est le prix maximal qu'accepterait de payer le consommateur ?
   (e) Quelle est la quantité maximale que les consommateurs sont disposés à acheter ?

3. **Équilibre sur le marché**
L'idéal sur le marché serait que l'offre coïncide avec la demande. Ce point d'équilibre est atteint quand $p_o = p_d$ et $Q_o = Q_d$.
   (a) Graphiquement où se situe ce point d'équilibre ?
   (b) Déterminer algébriquement le prix de vente du paquet et la quantité produite à l'équilibre du marché.

Exercice 4.5 (Systèmes 3×3 : modèle ouvert de LEONTIEFF[1]).
Voici un modèle (simple) de complexe industriel :
- Le complexe est constitué d'une centrale électrique au fioul, d'une raffinerie de pétrole et d'un chemin de fer.
- Pour produire l'équivalent de 1 € de fioul, la raffinerie utilise 0,20 € d'électricité et 0,10 € de transport ferroviaire.
- Pour produire l'équivalent de 1 € d'électricité, la centrale électrique utilise 0,55 € de fioul, 0,10 € d'électricité et 0,05 € de transport ferroviaire.
- Pour produire l'équivalent de 1 € de transport, le chemin de fer utilise 0,60 € d'électricité et 0,20 € de fioul.

Ce complexe industriel doit livrer, à l'intérieur du complexe, le fioul, l'électricité et le transport nécessaires à son fonctionne et, à l'extérieur, du fioul pour un montant de 92 000 € et de l'électricité pour un montant de 38 000 €. On se propose de déterminer les productions (en euros) x de la raffinerie, y de la centrale électrique et z du chemin de fer pour que ce complexe industriel puisse effectuer sa livraison.

1. Montrer que le problème peut se traduire par le sytème suivant (on justifera chaque ligne) :

$$\begin{cases} x - 0,55y - 0,2z = 92\,000 \\ 0,9y - 0,2x - 0,6z = 38\,000 \\ z - 0,1x - 0,05y = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre ce système.
3. Conclure.

Exercice 4.6 (Programmation linéaire : traitement de déchets industriels).
Une entreprise de déchets industriels a le choix entre deux procédés qui ne peuvent être utilisés en même temps.
- **Procédé A :** Il permet de traiter 3 tonnes de déchets par heure et produit des résidus gazeux. Pour chaque tonne traitée, on rejette 8 L de gaz polluant.
- **Procédé B :** Il permet de traiter 1 tonne de déchets par heure et produit des résidus liquides. Pour chaque tonne traitée, on rejette 1 L de liquide polluant.

L'entreprise doit traiter au moins 2 600 tonnes de déchets en moins de 2 400 heures, tout en respectant les autorisations de rejet. Elle a obtenu une autorisation de rejet gazeux de 10 000 L et de rejet liquide de 4 000 L.
On note x le nombre de tonnes traitées avec le procédé A et y le nombre de tonnes traitées avec le procédé B.

1. Quelles sont les durées nécessaires pour traiter x tonnes avec le procédé A et y tonnes avec le procédé B ?
2. Justifier que les contraintes ci-dessus se traduisent par le système (S) :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1\,250 \\ 0 \leq y \leq 4\,000 \\ \frac{x}{3} + y \leq 2\,400 \\ x + y \geq 2\,600 \end{cases}$$

3. Résoudre graphiquement le système (S) dans un repère orthogonal (unités : 1 cm représente 100 tonnes en abscisses et 1 cm représente 400 tonnes en ordonnées).
4. (a) Le procédé A coûte 50 € la tonne, et le procédé B coûte 100 € la tonne.
   Quel est le coût C associé au traitement de x tonnes avec le procédé A et y tonnes avec le procédé B ?
   (b) Justifier que pour un coût C, le point $M(x; y)$ appartient à une droite Δ_C dont on donnera l'équation réduite.
   (c) Tracer $\Delta_{260\,000}$ et $\Delta_{150\,000}$. Justifier que toutes les droites Δ_C sont parallèles.
5. (a) Par translation d'une des droites tracées, déterminer en quel point du domaine des contraintes, le coût est minimum. Préciser ce coût.
   (b) Pour ce coût minimum, déterminer alors la quantité de matière traitée avec chaque procédé, la durée de traitement et les volumes de rejets polluants sous forme liquide et gazeuse.
6. Quelles seraient les conséquences économiques d'une réduction de 50% des autorisations de rejet ?
Quelle(s) stratégie(s) l'entreprise a-t-elle alors intérêt à adopter à long terme ?

1. VASSILI LEONTIEFF, Prix Nobel d'économie en 1973, a réalisé des recherches sur l'analyse interindustrielle, qui est utilisée pour la planification, l'étude de la croissance.

Exercice 4.7.

Au moment des fêtes, un artisan chocolatier propose des assortissements de chocolats par ballotins de 500 g :

- *Succès* : 60 % de chocolats au lait, 20 % de chocolats noir et le reste en chocolats divers ;
- *Passion* : 80 % de chocolats noirs et le reste en chocolats divers ;
- *Évasion* : la moitié de chocolats divers, 40 % de chocolats noirs et 10 % de chocolats au lait.

1. Pour sa soirée de fin d'année 1 999, Madame Bomonde a commandé des chocolats.
   Elle a pu mettre sur son buffet 2 kg de chocolats noir, 1,5 kg de chocolats au lait et 2 kg de chocolats divers.
   Calculer le nombre de ballotins de chaque sorte qu'elle a acheté fin 1999.
2. Pour la fin 2 000, le chocolatier a proposé les mêmes assortissements.
   Madame Bomonde passe commande de x ballotins *Succès* et y ballotins *Passion*.
   Elle désire proposer à ses invités au moins 1,8 kg de chocolats noirs, 1,2 kg de chocolats au lait et 900 g de choco divers
   (a) Justifier que les contraintes se traduisent par le système suivant où x et y sont des entiers :
   $$\begin{cases} x+4y \geq 18 \\ 3x \geq 12 \\ x+y \geq 9 \end{cases}$$
   (b) Dans un repère orthonormal, représenter l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient le système ci-dessus.
   (c) Le prix d'un ballotin *Succès* est de 15 € et celui d'un ballotin *Passion* de 30 €.
   Exprimer le coût total de cet achat pour Madame Bomonde en fonction de x et y.
   Tracer la droite correspondent à un coüt de 210 €.
   Existe-t-il des points solutions du système situés en dessous de cette droite ?
   Déterminer graphiquement le nombre de ballotins de chaque sorte acheté qui permet à Madame Bomonde un coût total minimum. Expliquer la méthode employée.
   En déduire le coût total de son achat pour la fin 2 000.

Devoir surveillé n°4

Généralités sur les fonctions – Systèmes

Exercice 4.1 (6 points). 1. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{4}{x-1}$.

À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g et son ensemble de définition.

2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x-1}$$

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

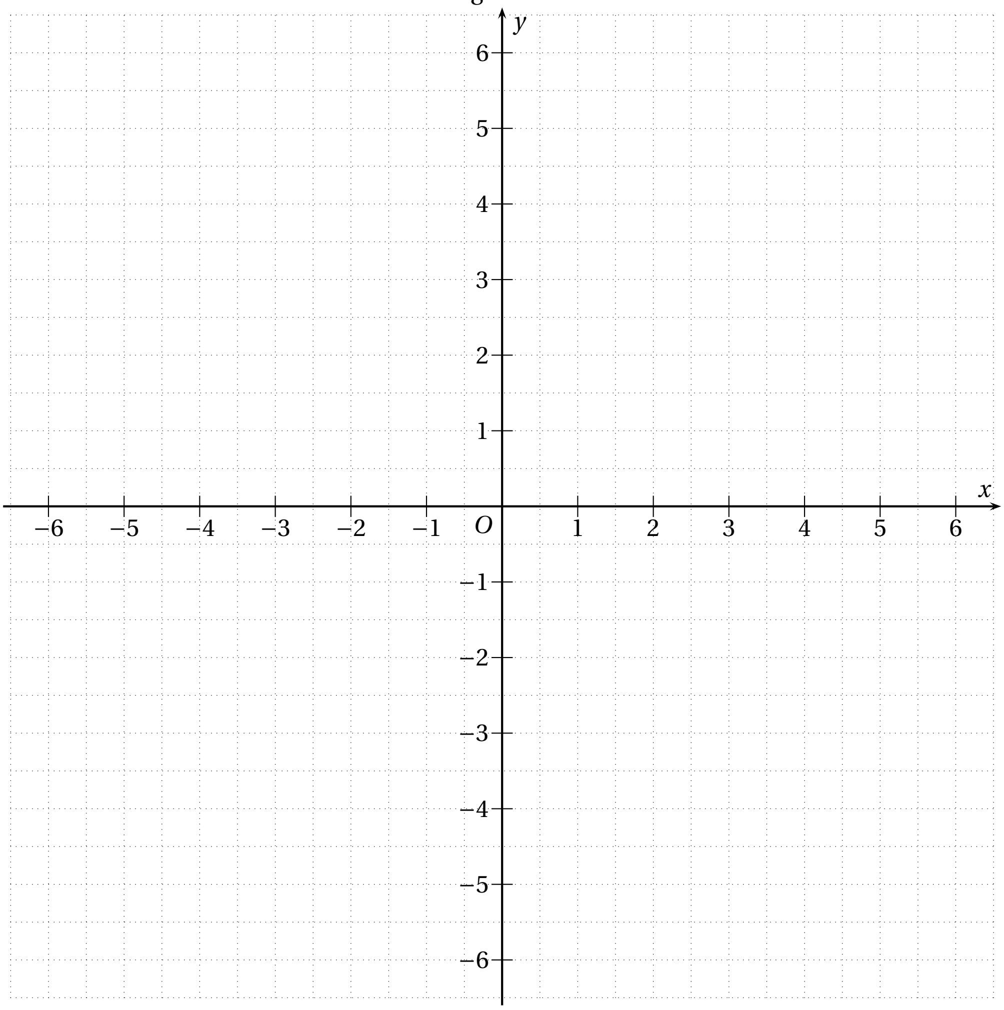
(a) Montrer que $f(x) = -x+1+\frac{4}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$.

(b) À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f.

(c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère et les placer sur la figure 4.1 de la présente page.

(d) Tracer soigneusement $\mathscr{C}$.

FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.1



Exercice 4.2 (2 points).
Pour chacun des trois systèmes suivants :

1. déterminer s'il a ou non une unique solution ;
2. s'il a une unique solution, le résoudre.

- $\mathscr{S}_1 : \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 1,5x + 3y = 1 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_3 : \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 4y - 2x = 1 \end{cases}$

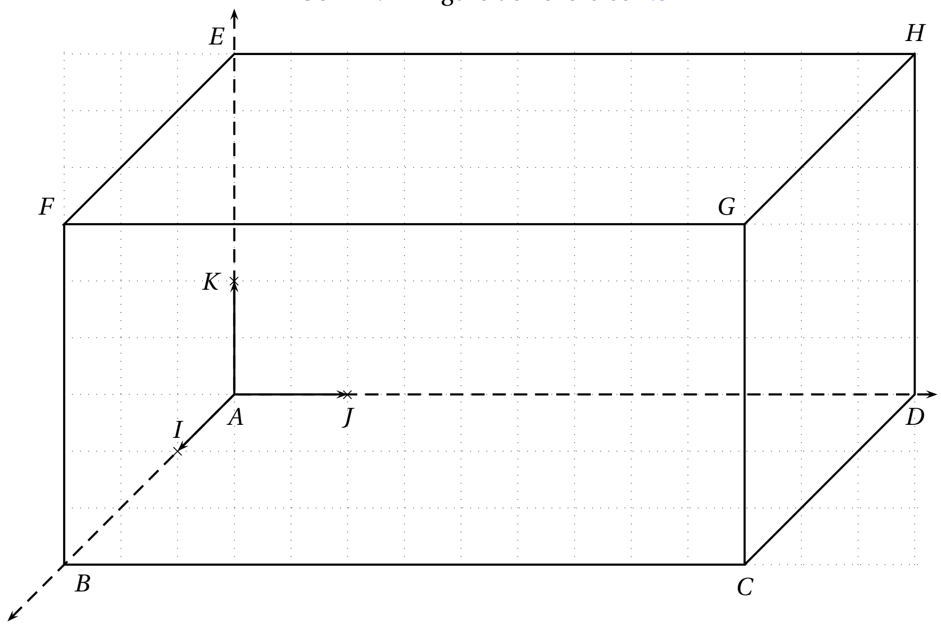
Exercice 4.3 (6 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 4y + z = -1 \\ 2x - 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

Exercice 4.3 (6 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AK}\right)$.
Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$, représenté sur la figure 4.2 de la présente page, est tel que $B\,(3 ; 0 ; 0)$, $D\,(0 ; 6 ; 0)$, $E\,(0 ; 0 ; 3)$.
L, M et P sont trois points de coordonnées : $L\,(1 ; 2 ; 0)$, $M\,(0 ; 2 ; 1)$ et $P\,(1 ; 0 ; 1)$.

1. Placer les points L, M et P sur la figure ci-dessous.
2. Quelle est la nature du triangle LMP ?
3. (a) Donner (sans justification) les coordonnées des points C, F et H.
   (b) Déterminer s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{PL} = a\overrightarrow{FH} + b\overrightarrow{FC}$.
   Que peut-on en déduire pour la droite (PL) et le plan (CFH) ?
   (c) Montrer que la droite (LM) est parallèle au plan (CFH).
   (d) Que peut-on en déduire pour les plans (LMP) et (CFH) ?
   (e) En déduire la trace du plan (LMP) sur le parallélépipède $ABCDEFGH$.

FIGURE 4.2 – Figure de l'exercice 4.3



Exercice 4.4 (6 points).

Au moment des fêtes, un artisan chocolatier propose des assortissements de chocolats par ballotins de 500 g :

- *Succès* : 300 g de chocolats au lait, 100 g de chocolats noirs et le reste en chocolats divers ;
- *Passion* : 400 g de chocolats noirs et le reste en chocolats divers ;

Madame Bomonde passe commande de x ballotins *Succès* et y ballotins *Passion*.

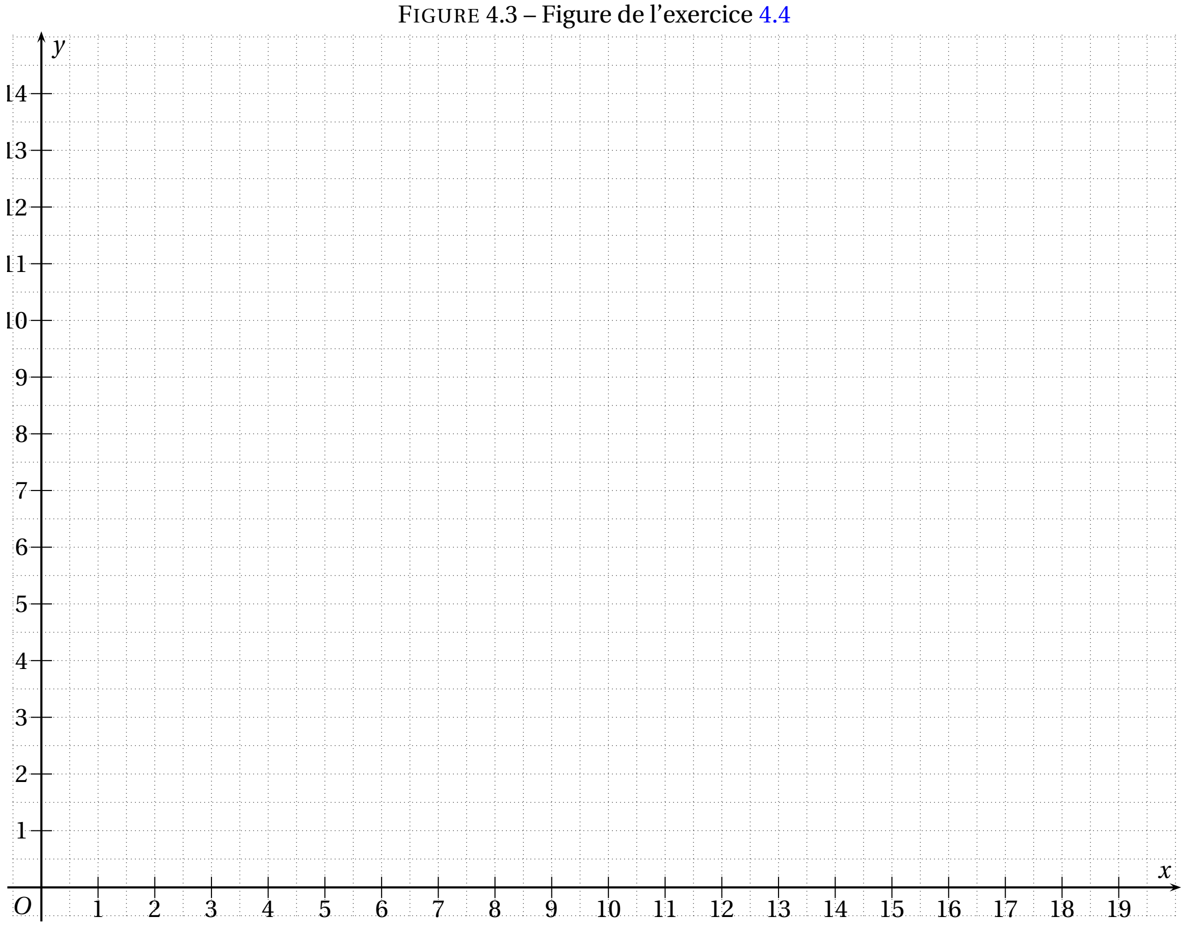
Elle désire proposer à ses invités au moins 1,8 kg de chocolats noirs, 1,2 kg de chocolats au lait et 900 g de chocolats divers.

1. Justifier que les contraintes se traduisent par le système suivant où x et y sont des entiers :

$$\begin{cases} x+4y \geqslant 18 \\ x \geqslant 4 \\ x+y \geqslant 9 \end{cases}$$

2. Dans le repère orthonormal de la figure 4.3 de la présente page, représenter l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient le système ci-dessus.
3. Le prix d'un ballotin *Succès* est de 15 € et celui d'un ballotin *Passion* de 30 €.
   (a) Exprimer le coût total de cet achat pour Madame Bomonde en fonction de x et y.
   (b) Tracer la droite correspondent à un coût de 210 €.
   Existe-t-il des points solutions du système situés en dessous de cette droite ?
   (c) Déterminer graphiquement le nombre de ballotins de chaque sorte acheté qui permet à Madame Bomonde un coût total minimum. Expliquer la méthode employée.
   (d) En déduire le coût total de son achat.

FIGURE 4.3 – Figure de l'exercice 4.4



Chapitre 5

Nombre dérivé

Sommaire

5.1 Activités

Activité 5.1.
Un corps, soumis à certaines forces, parcourt au bout de t secondes la distance $d(t)$ (en mètres) exprimée par :

$$d(t) = 0,1t^3 - 2,4t^2 + 21,2t$$

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction d sur l'intervalle $[0;20]$.
2. Calculer la vitesse moyenne du corps dans les intervalles de temps $[0;1]$; $[1;2]$; $[2;3]$; $[3;4]$; $[4;5]$.
   Que constate-t-on ?
   Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes ?
3. Inventer une manière d'obtenir la vitesse instantanée à l'instant $t = 2$.

Activité 5.2.
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 25$ et on appelle $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
On appelle :

- T le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 ;
- T_h le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $1+h$ où h est un réel ;
- $\mathscr{D}_h$ la sécante (TT_h) ;
- m_h le coefficient directeur de $\mathscr{D}_h$.

1. On suppose que $h = 1$.
   (a) Déterminer l'abscisse x_1 et y_1 et l'ordonnée de T_1.
   (b) Déterminer m_1 le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}_h$.
2. En vous inspirant que la question précédente, compléter le tableau suivant :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
x_h					
y_h					
m_h					

3. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général, $m = -2 - h$ pour $h \neq 0$
4. Quand h *tend* vers 0 :

(a) Vers quelle valeur *tend* m ?

(b) Vers quel point *tend* M_h ?

(c) Vers quelle droite *tend* la sécante $\mathscr{D}_h$?

(d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante $\mathscr{D}_h$ quand h *tend* vers 0 et on appellera *nombre dérivé de* $f(x)$ *en 1* le coefficient directeur de la tangente.

5.2 Nombre dérivé

Définition. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres *distincts* a et b le nombre :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On écrit la plupart du temps $a+h$ à la place de b et la définition devient alors :

Définition 5.1. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres distincts a et $a+h$ le nombre :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser $b=a+h$). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite.

On a vu dans les activités que cet accroissement moyen *tendait* vers l'accroissement « instantané » quand h *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

Définition 5.2 (Dérivabilité et nombre dérivé)**.** Si, quand h *tend* vers 0, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers un nombre A, on dit que la fonction f est *dérivable en* a et on appelle A le *nombre dérivé de* f *en* a. On le note $f'(a)$.

Remarques.
- On note parfois $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ l'accroissement moyen, surtout en physique.
  Δx est la différence[1] entre deux valeurs de x, $\Delta f(x)$ celle entre les deux valeurs correspondantes de $f(x)$.
- On note parfois $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ le nombre dérivé. Le d indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction f ou de la variable. Ainsi, si $f(t)$ est la distance parcourue au bout d'un temps t, la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

Exemple 5.1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-7$ est-elle dérivable en $a=2$?
Pour le savoir étudions la quantité suivante : $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}\\ &= \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \frac{h(12+6h+h^2)}{h}\\ &= 12+6h+h^2 \text{ avec } h\neq 0\end{aligned}$$

Lorsque h *tend* vers 0 (en restant différent de 0), $12+6h+h^2$ *tend* vers 12. Donc f est dérivable en $a=2$ et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors $f'(2)=12$.

1. Δ est la lettre grecque correspondant à D

5.3 Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition 5.3 (Tangente à une courbe)**.** On appelle *tangente à une courbe $\mathscr{C}$ en un point M*, appartenant à $\mathscr{C}$, une droite passant par M et qui, si elle existe, est aux alentours de M, la droite la plus proche de $\mathscr{C}$.

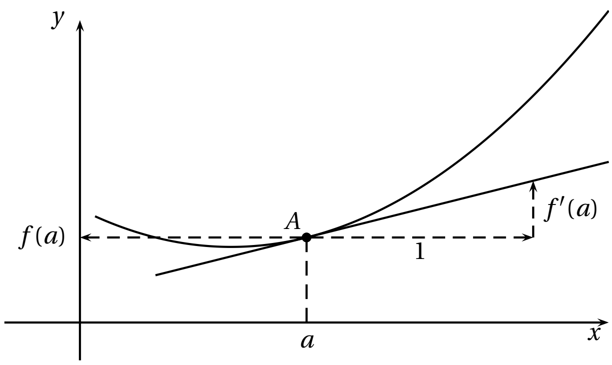
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $A(a; f(a))$ et $B(a+h; f(a+h))$, deux points de cette courbe.
La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe.
Lorsque h *tend* vers 0, la sécante (AB) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers le coefficient directeur de la tangente en A.

On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

Propriété 5.1. *Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.*
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

Le schéma 5.1 de la présente page illustre cette propriété.

FIGURE 5.1 – Interprétation graphique du nombre dérivé



Remarque. Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de la tangente ; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente. Cela nous permet d'obtenir, dans le cas général, l'équation de la tangente.

Propriété 5.2. *Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.*
Alors $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T_a d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve. On sait déjà que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a, donc son équation est de la forme

$$y = f'(a)x + p$$

Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de T_a donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a) \times a + p \Leftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$$

Donc

$$\begin{aligned} T_a : y &= f'(a)x + (f(a) - f'(a) \times a) \\ &= f'(a)x - f'(a)a + f(a) \\ &= f'(a)(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

◇

5.4 Approximation affine d'une fonction

L'idée de l'approximation affine est de trouver une fonction affine qui au voisinage de a serait la plus proche possible de f.

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse a était la droite la plus proche de la courbe au voisinage de a. Or comme toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées (c'est le cas de la tangente), elle est la représentation graphique d'une fonction affine. Il est donc « naturel » de choisir comme approximation affine de la courbe au voisinage de a la fonction dont la représentation graphique est la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

On a donc :

Définition 5.4. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a.
On appelle *approximation affine de f au voisinage de a*, la fonction g, telle que : $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

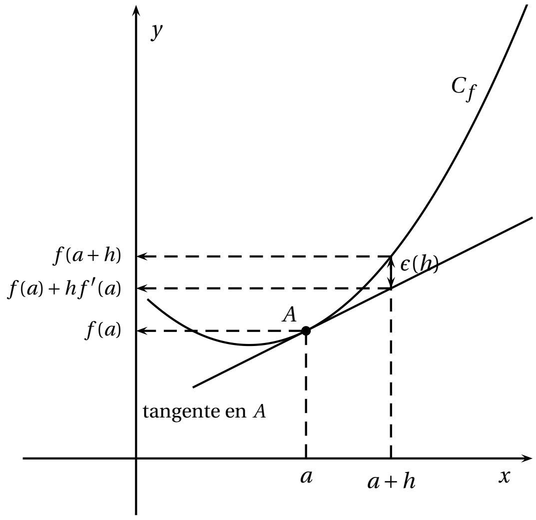
Lorsque x est proche de a la différence entre $f(x)$ et $g(x)$ est petite et $g(x)$ fournit une bonne approximation de la valeur de $f(x)$ tout en étant beaucoup plus facile à calculer. Cette approximation est, dans bien des cas, suffisante et elle est souvent utilisée, en particulier en économie.

En posant $x = a+h$, on obtient :
$g(x) = g(a+h) = f(a) + f'(a)(a+h-a) = f(a) + hf'(a)$.

Et on peut écrire :

$\boxed{\text{Quand } h \text{ est proche de } 0,\ f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)}$

Le schéma ci-contre illustre cela :
$\epsilon(h)$ est l'erreur commise lorsqu'on prend $f(a)+hf'(a)$ comme valeur de $f(a+h)$. Elle *tend* vers 0 quand h *tend* vers 0.



Exemple 5.2. Application à l'économie.
Un produit coûtant 100 euros au 1er janvier 2006 a augmenté de 2% le 1er février 2006 et le 1er mars 2006.
On peut calculer son coût exact : $100 \times \left(1+\frac{2}{100}\right)^2 = 104,04$
On peut aussi choisir d'utiliser l'approximation affine de $f(x) = x^2$ au voisinage de 1 : $(1+h)^2 \approx 1+2h$.
Ici, comme h est proche de 0 ($h = \frac{2}{100}$), $1+2h$ fourni une approximation souvent suffisante de $(1+h)^2$ et on a :
$100 \times \left(1+\frac{2}{100}\right)^2 \approx 100 \times \left(1+2\times\frac{2}{100}\right) = 104$
L'erreur commise est donc de 0,04 euros, ce qui peut être, dans certains cas, considéré comme négligeable.

5.5 Exercices

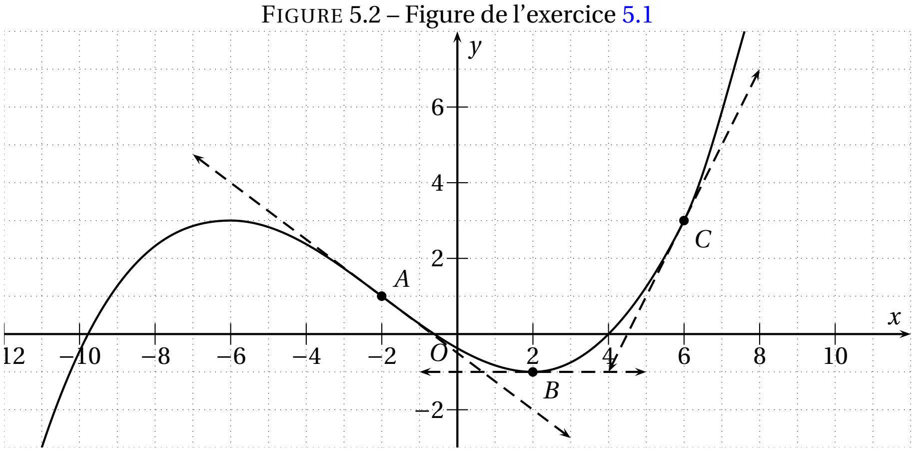
5.5.1 Lectures graphiques de nombres dérivés

Exercice 5.1.

On donne sur la figure 5.2 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

FIGURE 5.2 – Figure de l'exercice 5.1

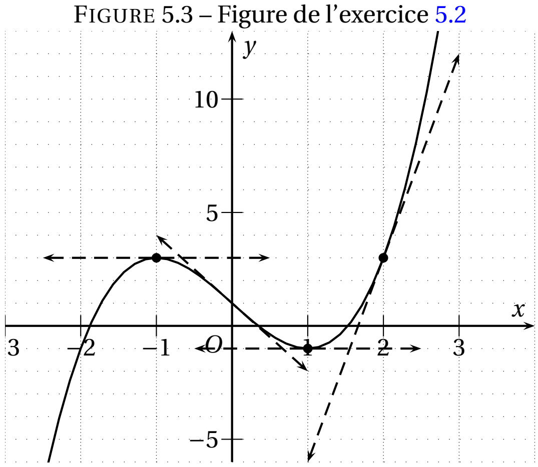


Exercice 5.2.

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 5.3 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

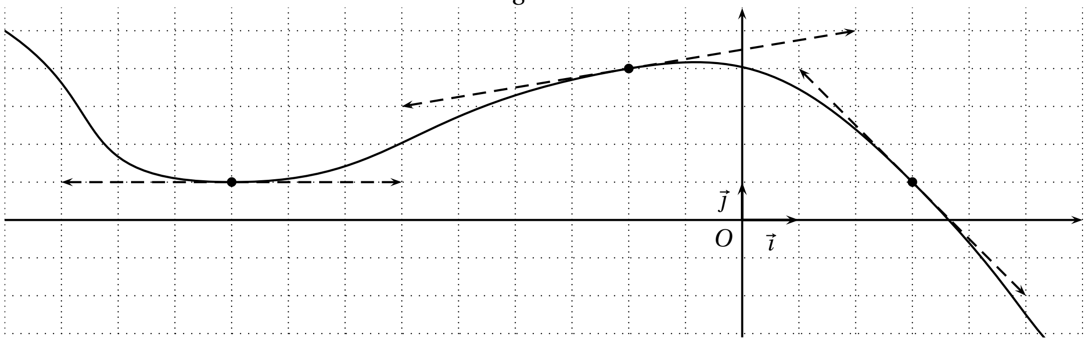
1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1\,;26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.

FIGURE 5.3 – Figure de l'exercice 5.2



Exercice 5.3.
On donne sur la figure 5.4 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

FIGURE 5.4 – Figure de l'exercice 5.3



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

5.5.2 Tracés

Exercice 5.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3;0]$;
- $f(0)=-2$ et $f'(0)=0$;
- f est paire ;
- $f(3)=9$.

Exercice 5.5.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=3$ et $f'(1)=2$;
- $f(3)=6$ et $f'(3)=1$;
- $f(5)=7$ et $f'(5)=0$;
- $f(6)=6$ et $f'(6)=-4$.

Exercice 5.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0)=1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3)=-1$ et $f(5)=-1$;
- $f'(2)=0$, $f'(3)=1$ et $f'(5)=-1$;
- pour tout $x\in[2;5]$, $f(x)<0$.

Exercice 5.7.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-4;4]-0$ ayant les popriétés suivantes :

- f est impaire ;
- $f(0,25)=4$ et $f(0,5)=2$;
- $f(1)=1$ et $f'(1)=-1$;
- $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y=x$ comme axe de symétrie.

5.5.3 Nombres dérivés

Exercice 5.8.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction est dérivable et, si oui, déterminer par le calcul son nombre dérivé.

1. $f(x)=x^2-2x$ en 3.
2. $g(x)=\frac{1}{x}$ en 1.
3. $h(x)=x^2+2x-1$ en -1.
4. $i(x)=\sqrt{x}$ en 2.

Exercice 5.9.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+2x+3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
2. Déterminer les nombres dérivés de f là où $\mathscr{C}$ coupe les axes.
3. Déterminer $f'(1)$.
4. Tracer dans un repère les tangentes à la courbe qu'on peut déduire des questions précédentes.
5. Tracer $\mathscr{C}$ dans ce même repère.

5.5.4 Approximations affines

Exercice 5.10.
Montrer que l'approximation affine de $f(x) = (1+x)^2$ en 0 de l'exemple 5.2 page 50 est la bonne.

Exercice 5.11.
On pose $f(x) = (1+x)^3$ et on cherche $g(x)$, une approximation affine de f au voisinage de 0.

1. Déterminer $g(x)$;
2. Calculer, de tête, $g(x)$ lorsque $x = 0,1$, lorsque $x = 0,01$ et lorsque $x = 0,001$;
3. Calculer $f(x)$ pour chacune de ces valeurs et déterminer l'erreur commise lorsqu'on prend $g(x)$ comme valeur approchée de $f(x)$ pour chacune de ces valeurs de x.

Que peut-on en déduire concernant un prix subissant trois augmentations successives de $t\,\%$, lorsque t est petit ?

Exercice 5.12.

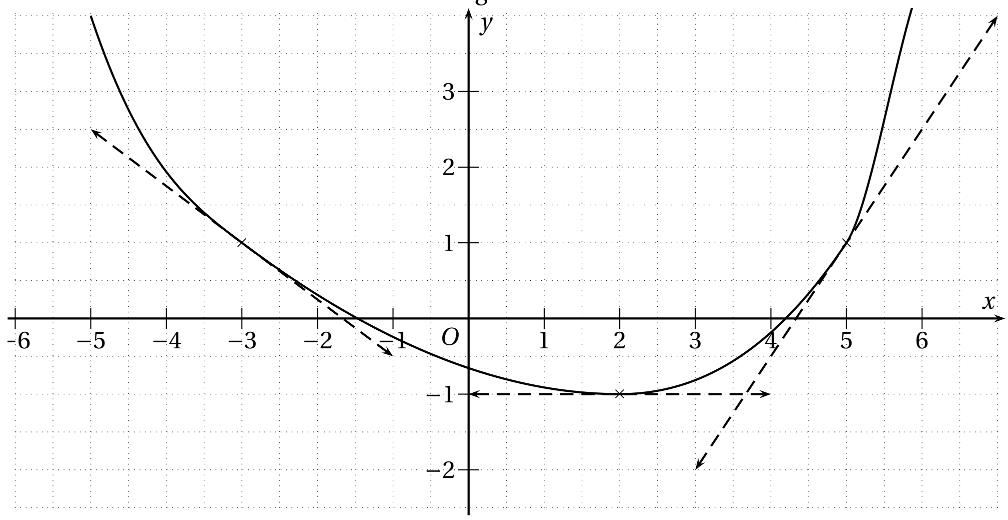
1. (a) Déterminer l'approximation affine au voisinage de 0 de
$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$
   (b) Calculer, de tête, des valeurs approchées de : $\frac{1}{1,01}$, $\frac{1}{1,02}$, $\frac{1}{0,99}$.
2. Un prix P_I, après une augmentation de 1 %, atteint le prix P_F.
   (a) Connaissant la valeur P_F, par quel calcul retrouve-t-on P_I ?
   (b) Déduire de ce qui précède quelle baisse compense à peu près une augmentation de 1 %.
3. (a) Qu'en est-il pour une augmentation de 2 % ?
   (b) Qu'en est-il pour une baisse de 1 % ?
   (c) Qu'en est-il pour une augmentation de 10 % ?

Devoir surveillé n°5

Nombre dérivé – Matrices

Exercice 5.1 (5,5 points).
On donne sur la figure 5.1 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

FIGURE 5.1 – Figure de l'exercice 5.1



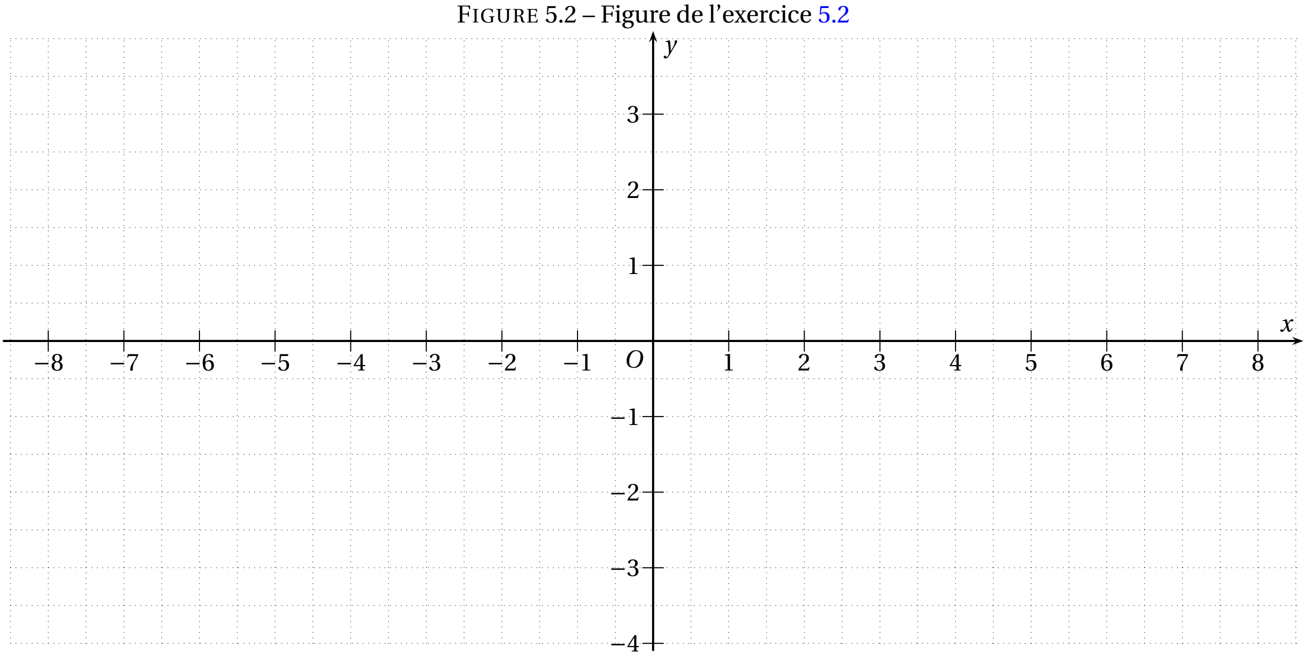
1. Donner par lecture graphique $f(-3)$, $f(2)$ et $f(5)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(-3)$, $f'(2)$ et $f'(5)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 5.

Exercice 5.2 (4 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Tracer dans le repère de la figure 5.2 de la présente page la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

- f est définie sur $[-8; 8]$;
- f est impaire ;
- $f(-6) = -2$, $f(0) = 0$ et $f(3) = 2,5$;
- $f'(-6) = -\frac{1}{3}$, $f'(0) = 2$ et $f'(3) = 0$.

On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.

FIGURE 5.2 – Figure de l'exercice 5.2



Exercice 5.2 (4 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Montrer que les matrices A et B suivantes sont inverses (*on détaillera trois calculs*).

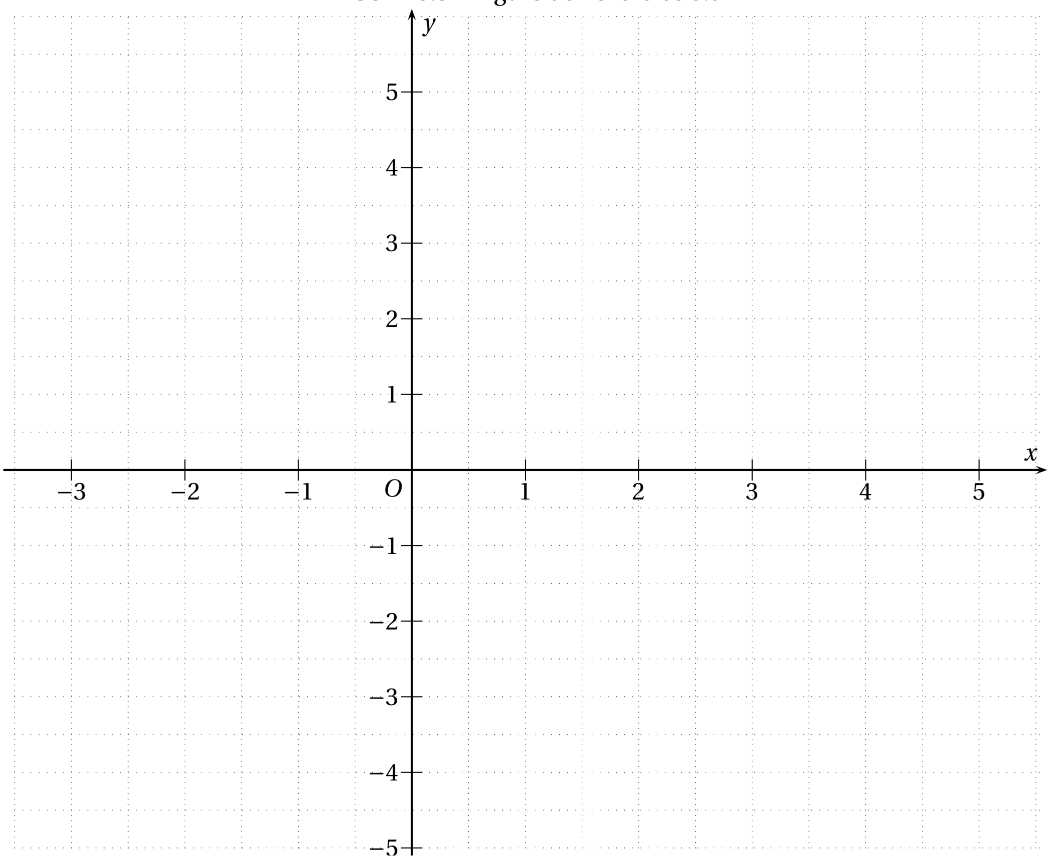
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible et, si oui, déterminer sa matrice inverse;
   - $A = \begin{pmatrix} -1 & 1{,}5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$
   - $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
   - $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
   - $D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 5.3 (10,5 points).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
   (b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
2. On admet que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisse au point $B(-1;0)$.
   (a) Déterminer les coordonnées de C, l'autre point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
   (b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en B.
3. Déterminer $f(1)$, $f'(1)$ et l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
4. (a) Placer tous les points qu'on peut déduire des questions précédentes dans le repère de la figure 5.3 de la présente page.
   (b) Tracer toutes les tangentes qu'on peut déduire des questions précédentes dans le même repère.
   (c) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

FIGURE 5.3 – Figure de l'exercice 5.3



Chapitre 6

Fonction dérivée

Sommaire

6.1 Activités

Activité 6.1 (Plusieurs nombres dérivés).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Déterminer les valeurs des nombres dérivés en a dans les cas suivants :
   - $a = -2$;
   - $a = -1$;
   - $a = 0$;
   - $a = 0,5$;
   - $a = 1$.
2. Cas général : déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre dérivé.

On obtient ainsi une fonction, qui dépend de f, qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x. Une telle fonction est appelée *fonction dérivée de f* et est notée f'. Ainsi, pour $f(x) = -x^2 + 4$, $f'(x) = -2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Activité 6.2 (Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes :

- $f(x) = k$;
- $f(x) = mx + p$;
- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x^3$.

Activité 6.3 (Variations d'une fonction).
Reprenons la fonction de l'activité 6.1 : $f(x) = -x^2 + 4$ et rappelons que le nombre dérivé en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique et par lecture graphique, les variations de f en fonction de x.
2. Comment cela se traduit-il pour les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?
3. En déduire un lien entre les variations de f et la fonction dérivée f'.

Activité 6.4 (Extremum local).
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de f, en faisant apparaître une ligne indiquant le signe de f'.
4. Qu'observe-t-on en -1 et en 1, pour f ? Comment cela se traduit-il pour f' ?

On dit que f admet en -1 et en 1 des extremums locaux.

6.2 Fonction dérivée

Définition 6.1. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre de cet ensemble et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet ensemble associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction s'appelle la *fonction dérivée de* f.

6.3 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

On admettra [1] que les fonctions usuelles ont les fonctions dérivées suivantes :

Propriété 6.1. *Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :*

Fonction f	*définie sur*	*Fonction dérivée f'*	*définie sur*
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ =]0;+\infty[$

Remarque. Si l'on remarque que $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on a alors :
$f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
Ainsi, pour obtenir la fonction dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, on peut appliquer l'une ou l'autre formule :

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3} \text{ ou } f'(x) = nx^{n-1} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

6.4 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 6.2. *Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I.*

Fonction	*Fonction dérivée*	*Exemple*
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'	Si $f(x) = 4x^3$ alors $f'(x) = 4 \times \left(3x^2\right) = 12x^2$
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ avec $x \neq 0$
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x) = \left(x^2-1\right)^4$ alors $f'(x) = 4(2x)\left(x^2-1\right)^3 = 8x\left(x^2-1\right)^3$
$\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}$ alors $f'(x) = -\frac{6x+2}{(3x^2+2x+1)^2}$
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ alors $f'(x) = \frac{(2)(3x+2)-(2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$

Preuve.

- Montrons que $(ku)' = ku'$

$$\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = \frac{k[u(a+h) - u(a)]}{h} = k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{ku(a+h) - ku(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $k\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$, c'est-à-dire ku'

- Montrons que $(u+v)' = u' + v'$

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$, c'est-à-dire $u' + v'$

1. Certaines démonstrations ont été faites en activité ou seront faites en exercice

- Montrons que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \left(\frac{u(a)-u(a+h)}{h}\right)\frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Lorsque que h *tend* vers 0, $\dfrac{u(a)-u(a+h)}{h}$ *tend*, par définition, vers $-u'(a)$ et $\dfrac{1}{u(a+h)u(a)}$ *tend* vers $\dfrac{1}{u^2(a)}$, donc $\dfrac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h}$ *tend* vers $-\dfrac{u'(a)}{u^2(a)}$
- On admettra que $(uv)' = u'v + uv'$
- Montrons que $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
  On a vu que $(uv)' = u'v + uv'$, or $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$, donc $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = u' \times \dfrac{1}{v} + u \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right) = \dfrac{u'v}{v^2} - \dfrac{uv'}{v^2}$
- On admettra les autres propriétés.

$\diamondsuit$

Remarque. Seules les deux premières formules sont intuitives, les autres sont à apprendre par coeur.
En particulier la dérivée d'un produit (ou d'un quotient) n'est pas égal au produit (ou au quotient) des dérivées. Un exemple : cherchons la dérivée de $(x+2)\times(x+3)$
On peut l'obtenir en développant : $(x+2)\times(x+3) = x^2+5x+6$ dont la dérivée est $2x+5$.
Or la dérivée de chaque facteur est 1, et $1 \times 1 \neq 2x+5$!
La formule, elle, donne la bonne dérivée $(x+2)'(x+3)+(x+2)(x+3)' = 1\times(x+3)+(x+2)\times 1 = 2x+5$.

6.5 Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g(mx+p)$

On admettra le résultat suivant :

Propriété 6.3. *Soit $f(x) = g(mx+p)$ où m et p sont des réels et g une fonction définie et dérivable, alors f est dérivable et $f'(x) = mg'(mx+p)$*

Exemple 6.1. Soit f définie sur $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$.
On a $f(x) = g(3x-1)$ avec $g(X) = \sqrt{X}$.
Or $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ pour $X > 0$.
Donc $f'(x) = 3g'(3x-1) = 3\frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

6.6 Variations d'une fonction

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x.

Il est *naturel* de penser que lorsque la tangente *monte*, la courbe *monte* et que lorsque la tangente *descend*, la courbe *descend*, et réciproquement ou, plus mathématiquement, que lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement.

Or la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.

On admettra donc le résultat suivant :

Théorème 6.4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*
- $f'(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *croissante sur* I
- $f'(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *décroissante sur* I
- $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *constante sur* I

On admettra aussi la propriété suivante :

Propriété 6.5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante)*

Remarque. On notera qu'on n'a pas l'équivalence ($\Leftrightarrow$) dans ce cas, une fonction pouvant être strictement croissante avec une dérivée qui s'annule seulement en quelques valeurs. C'est le cas, par exemple, de la fonction cube, dont la dérivée s'annule seulement en 0.

6.7 Extremum local

Par ailleurs, lorsque la fonction change de sens de variation en a, on dit qu'elle admet un extremum local en a (minimum ou maximum). On a donc :

Propriété 6.6. *Soit f une fonction définie et dérivable su un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.*
f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a

On l'admettra

On a un maximum lorsque $f'(x)$ est positive avant a et négative après, et un minimum lorsque $f'(x)$ est négative avant a et positive après.

Remarque. Local signifie qu'aux alentours de a ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum comme on a pu le voir dans l'activité 6.4 page 57.

6.8 Exercices et problèmes

6.8.1 Exercices

Exercice 6.1.
Montrer que la fonction racine carrée est dérivable en tout nombre appartenant à $]0;+\infty[$ mais pas en 0

Exercice 6.2.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$
4. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
5. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$
6. $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
7. $f(x) = \left(2x^2+3x+1\right)^5$

Exercice 6.3.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

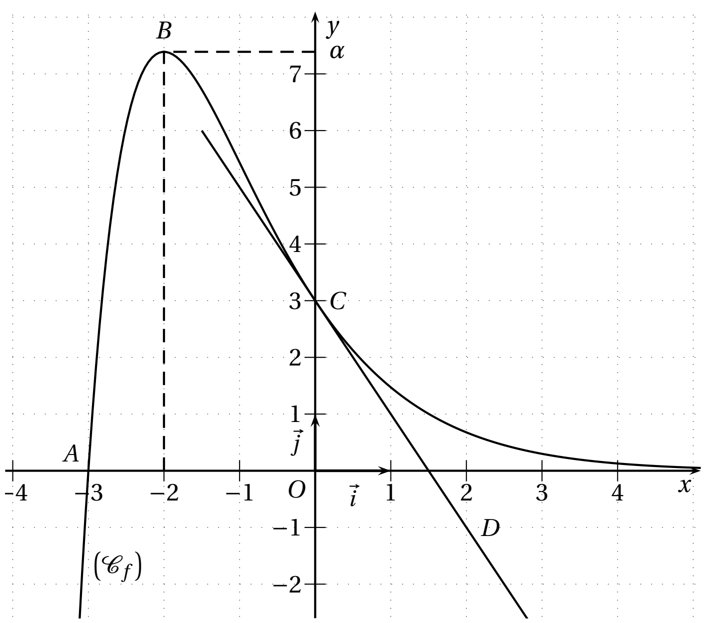
1. $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^2$
2. $f(x) = (x-1)^2(3-x)^3$
3. $f(x) = (x-1)^4(x+1)^4$
4. $f(x) = x^3\left(1+\sqrt{x}\right)$
5. $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$
6. $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$
7. $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$
8. $f(x) = \sqrt{2-x}$

Exercice 6.4.
Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

1. $f(x) = \dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$;
2. $g(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^3$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Exercice 6.5.
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,+\infty[$.
On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3;0)$, $B(-2;\alpha)$ où $\alpha \approx 7{,}39$ et $C(0;3)$ sont des points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$;
- la droite tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en son point C passe par le point $D(2;-1)$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

1. $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2\,;+\infty[$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.
3. Soit une fonction g telle que $g' = f$ sur l'intervalle $[-4\,;+\infty[$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.

Exercice 6.6.

Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-4,5$

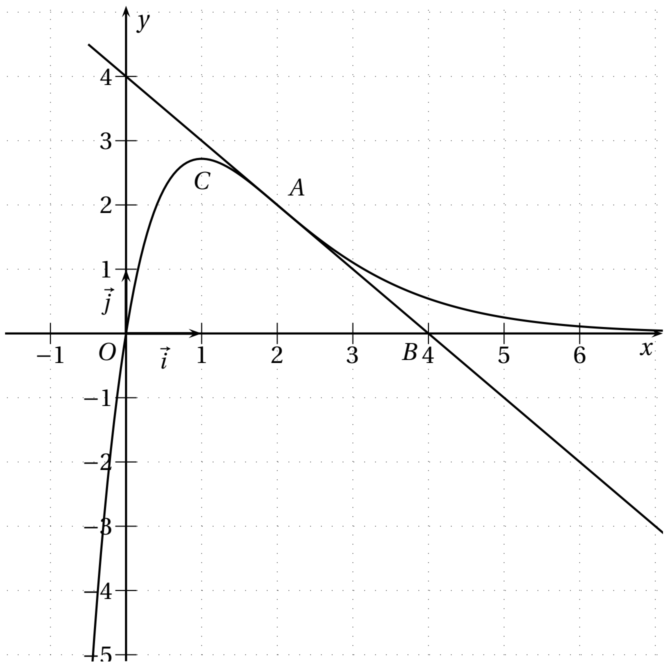
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = -2$
   - admet une seule solution
   - admet deux solutions
   - admet quatre solutions.
2. On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   - $y = 4$
   - $y = 4(x-2)$
   - $x = 4$.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\,;2)$ est $y = 3x-1$.
   On a :
   - $f(2) = 1$
   - $f'(1) = -1$
   - $f'(1) = 3$.
4. Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
   - est croissante
   - est décroissante
   - n'est pas monotone.

Exercice 6.7.

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(2\,;2)$.

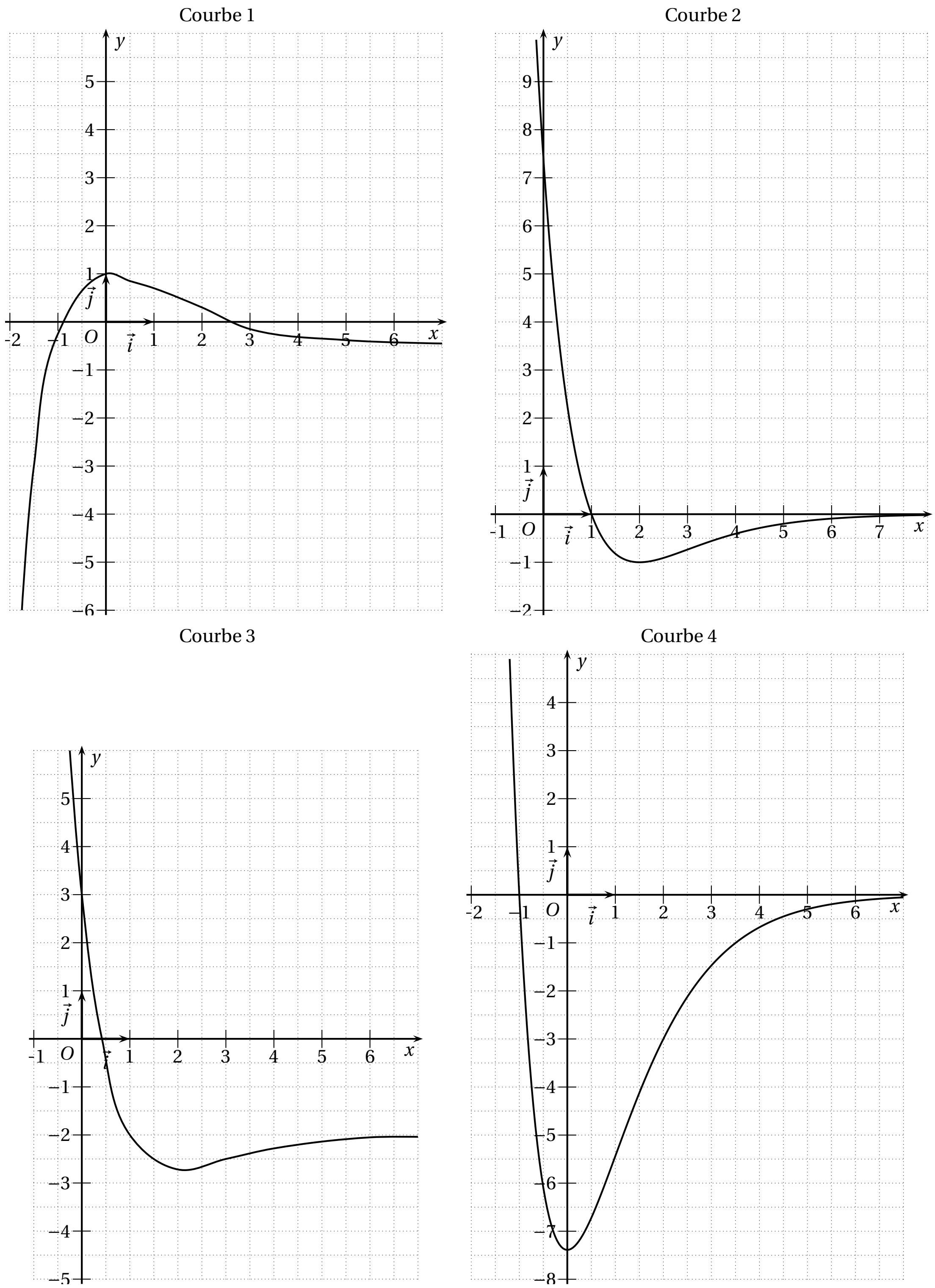
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page suivante, représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

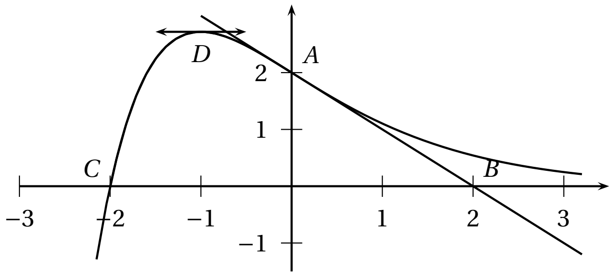
FIGURE 6.1 – Courbes de l'exercice 6.7



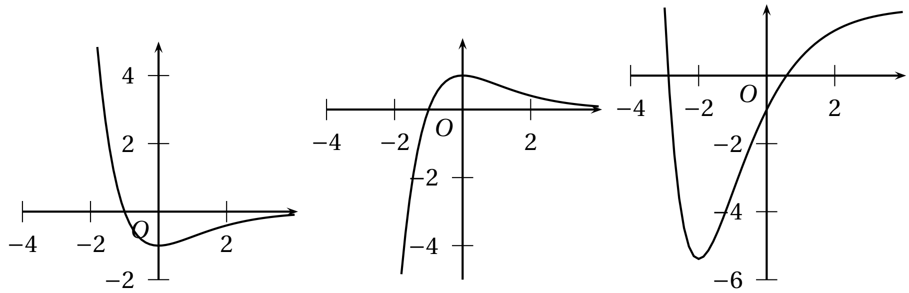
Exercice 6.8.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonornal, d'une fonction f définie sur ℝ. La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur ℝ. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h. *Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix*



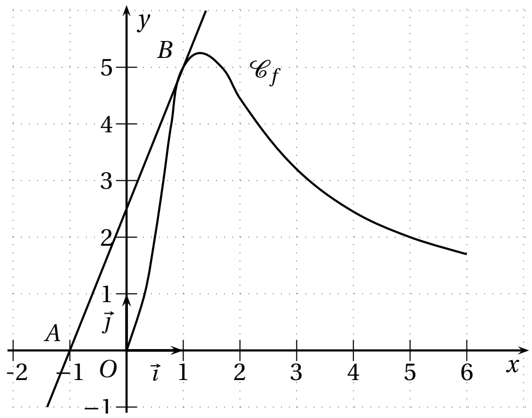
Courbe 1 *Courbe 2* *Courbe 3*



Exercice 6.9.

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;6]$. Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\ ;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 page suivante représente la fonction f'. Laquelle ? *Justifier votre réponse.*



Exercice 6.10.

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur ℝ.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que f admet un extremum.

Exercice 6.11.

On donne $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 18x - 7$ définie sur $[0;2]$.

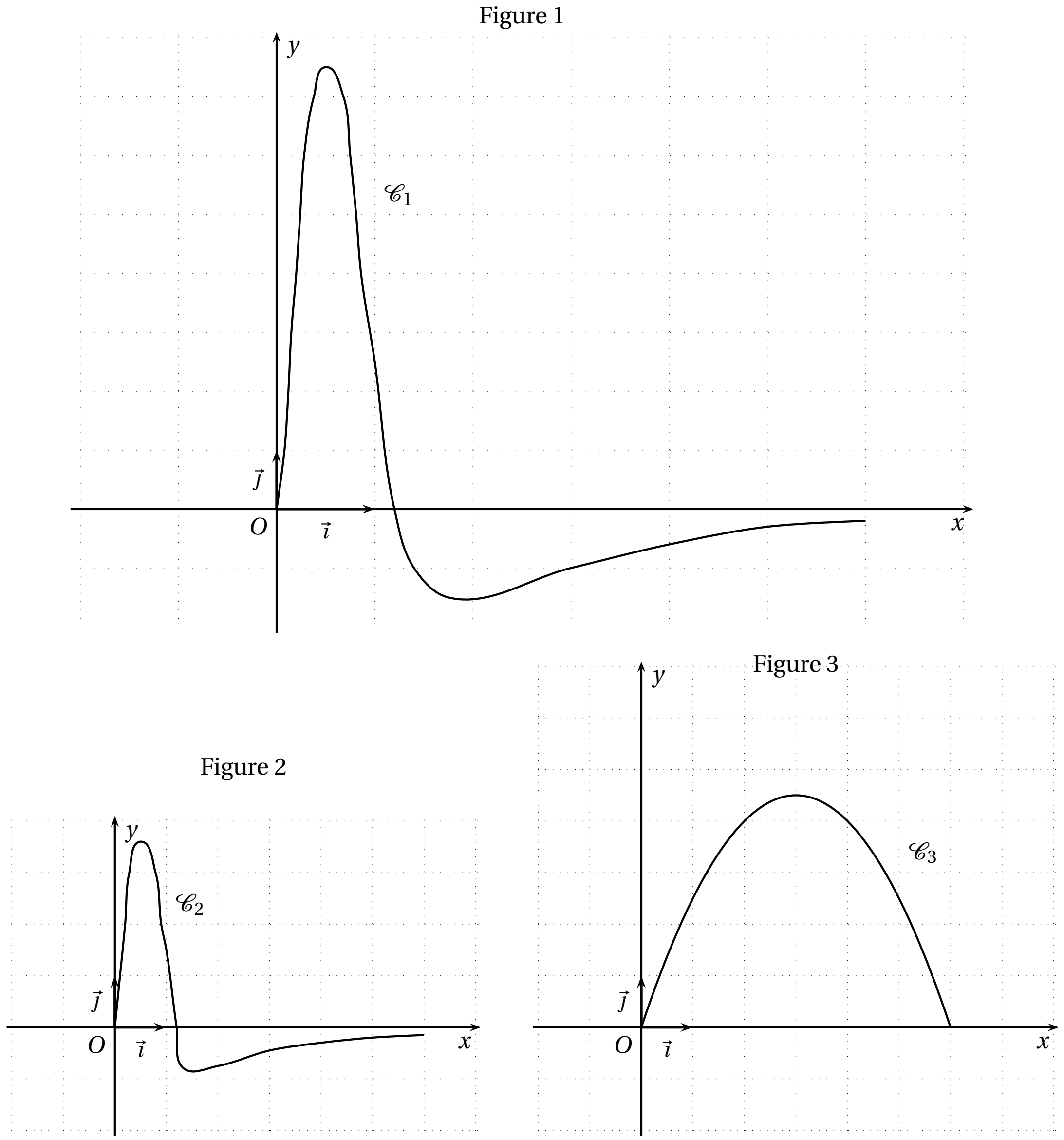
1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Tracer les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0, 1 et 2 ainsi qu'aux extremums locaux, puis la courbe de f.

Exercice 6.12.

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'interception de la courbe avec l'axe des abscisses.

FIGURE 6.2 – Courbes de l'exercice 6.9



Exercice 6.13.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T et $\mathscr{C}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
5. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 6.14.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

Exercice 6.15.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

Exercice 6.16.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-3x$ et $g(x)=x^3-3x$.

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. Faire de même pour g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-2;2]$ et on prendra un pas de 0,5).
   (b) Á l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 6.17.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
3. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

Exercice 6.18.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1$ et $g(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de f.
2. Calculer la dérivée g' de g, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;5]$ et on prendra un pas de 0,25).
   (b) Á l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 6.19.
Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x)=x^2+2x-3$
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-2x^2+1$ et $g(x)=x^3-3x+1$.

1. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
2. Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g.
3. Tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;3]$).
4. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)\leq g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire).

Exercice 6.20.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient direteur -3.
7. (a) Déterminer une approximation affine locale au voisinage de 2.
   (b) En déduire une valeur aprochée de $f(2,003)$ et de $f(1,996)$.

6.8.2 Problèmes

Problème 6.1.

On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

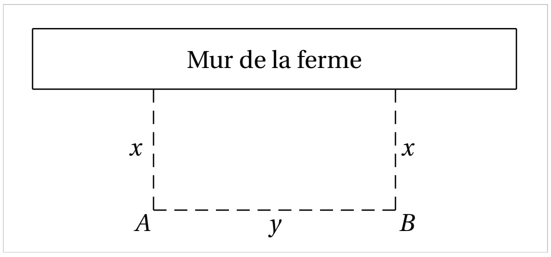
1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

Problème 6.2.

Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?

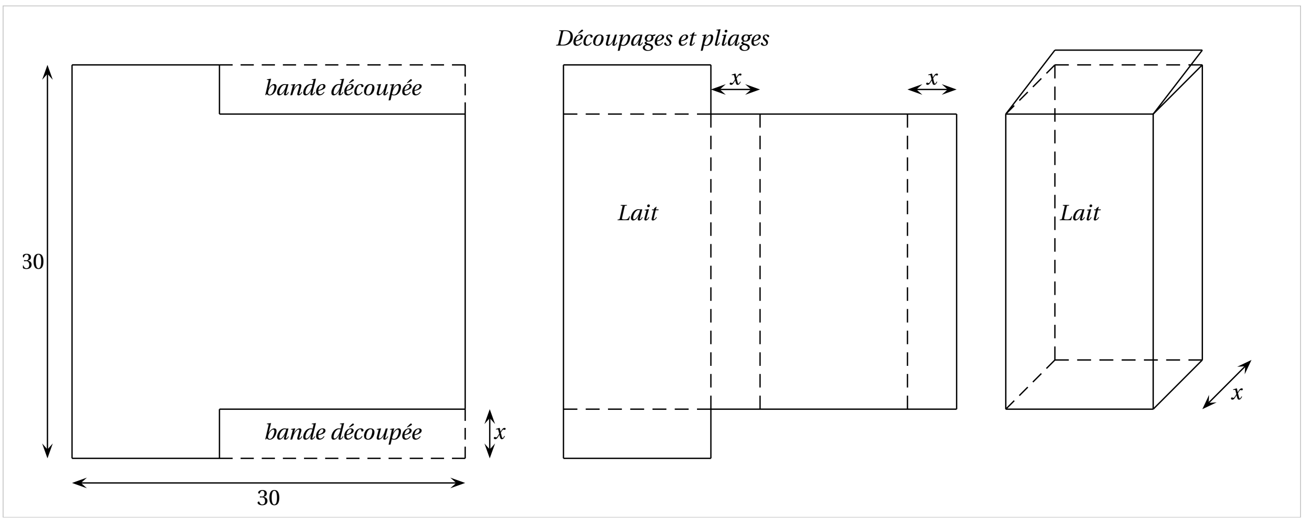
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distace entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \dfrac{2x^2+392}{x}$
3. Calculer la dérivée l' de l. en déduire le tableau des variations de l.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelle la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.



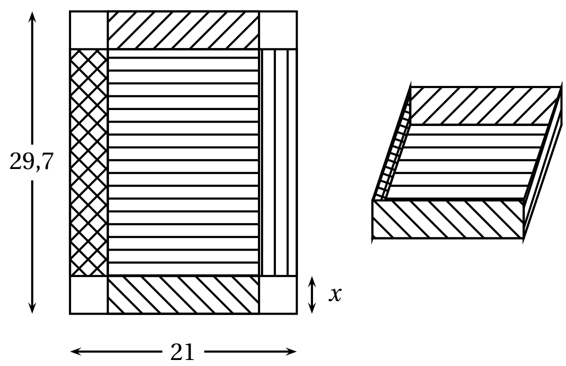
Problème 6.3.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau des variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
   (c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   (d) Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0;20]$.
2. Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir la figure de la présente page). Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.
   (a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   (b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.



Problème 6.4.
On dispose d'une feuille de dimensions 21 cm × 29,7 cm avec laquelle on veut fabriquer une boite sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x. On obtient le patron de la boite. On se propose d'étudier le volume de la boite en fonction de x.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On appelle $V(x)$ le volume de la boite.
   (a) Montrer que $V(x) = x(29,7-2x)(21-2x)$.
   (b) Étudier les variations de V.
   (c) En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) le volume de la boite est maximum. *On donnera le(s) résultat(s) au millimètre.*



Problème 6.5.
Quel doit être le format (hauteur, rayon) d'une boite de conserve cylindrique pour que, pour un volume donné, la quantité de métal pour la concevoir, qu'on supposera proportionnelle à sa surface, soit minimale.

Problème 6.6.
Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique d la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer l'abscisse de l'autre point de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.

Problème 6.7.
Une parabole $\mathscr{P}$ admet, dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une équation du type : $y = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.
Déterminer les coefficients a, b et c sachant que $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnées 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x+2$ pour tangente.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.

Problème 6.8.
Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 120. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 95x + 1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 228x$.
On suppose que chaque porte est vendue.

1. Étude de la fonction bénéfice
   (a) Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
   (b) Calculer $B'(x)$ pour tout x de $[0; 120]$.
   (c) Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction B.
   (d) À l'aide du tableau de variation et d'un tableau de valeurs donné par la calculatrice, donner les arrondis au dixième des solutions de l'équation $B(x) = 0$.
   En déduire le nombre de portes vendues pour que la fabrication soit rentable. Justifier votre réponse.
   (e) Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Justifier votre réponse.
2. Courbe représentative de la fonction B
   (a) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction B.
   (b) Vérifier graphiquement vos réponses aux questions d) et e) de la partie 1.

Problème 6.9.

Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, etc.), d'autre part, les coûts variables (ingrédients, salaires, etc.) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.
On estime que la fonction de coût total de cette entreprise est donnée par la fonction suivante :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$$

où q est le nombre de lots fabriqués et $C(q)$ est exprimé en dizaine d'euros.

1. Études du coût marginal et du coût total.
   Le coût marginal, noté $C_m(q)$ est, pour une quantité q donnée, l'augmentation du coût occasionnée par la production d'une unité supplémentaire. Sa valeur exacte est donc $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ mais dans la pratique on prend la valeur approchée $C_m(q) = C'(q)$, la différence entre les deux valeurs étant négligeable.
   (a) Étudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[1;8]$.
   (b) Étudier les variations de la fonction C' sur l'intervalle $[1;8]$.
   (c) Représenter graphiquement, dans le même repère, les fonctions C et C' (unités graphiques : 2 cm pour un lot en abscisses et 1 cm pour 5 dizaines d'euros en ordonnées).
2. Étude du coût moyen.
   Le coût de production par unité produite est appelé coût moyen de production ; on le note généralement $C_M(q)$.
   On a donc $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.
   (a) Une fonction auxiliaire
   Soit $D(q)$ la fonction définie sur $[1;8]$ par $D(q) = q^3 - 2q^2 - 20$
      i. Étudier les variations de $D(q)$ puis dresser son tableau de variations.
      ii. En déduire que l'équation $D(q) = 0$ admet une unique solution q_0 dans $[1;8]$.
      iii. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de q_0 au dixième.
   (b) Expliquer pourquoi l'entreprise à tout intérêt à produire une quantité telle que $C_M(q)$ soit minimale.
   (c) Montrer que $C'_M(q) = \dfrac{q^3 - 2q^2 - 20}{q^2}$
   (d) Dresser le tableau des variations de C_M
   (e) En déduire la production optimale de l'entreprise.
   (f) i. Représenter C_M dans le même graphique que C et C_m.
      ii. Déterminer l'abscisse du point d'intersection des courbes de C_M et C_m.
      Que constate-t-on ? *Cette propriété est toujours vraie.*
3. Concurrence parfaite.
   Dans cette partie on suppose que l'on est en situation de concurrence parfaite, c'est-à-dire que le prix de vente est imposé par le marché.
   Le prix de vente du lot est calculé à partir du prix de vente unitaire fixé à 7,5 € la pizza.
   (a) Calculer le prix de vente d'un lot de pizzas.
   Quelle est la recette $R(q)$, en dizaines d'euros, pour q lots vendus ?
   (b) Sur le même graphique que précédemment, tracer la droite d'équation $y = 30$.
   (c) « Tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, l'entreprise a intérêt à produire. »
   Expliquer pourquoi.
   (d) Le bénéfice produit par la vente de q lots de pizzas est $B(q) = R(q) - C(q)$.
   Étudier les variations de la fonction B et en déduire la production qui assure le bénéfice maximal.
   Que représente cette production sur le graphique précédent ?

Devoir surveillé n°6

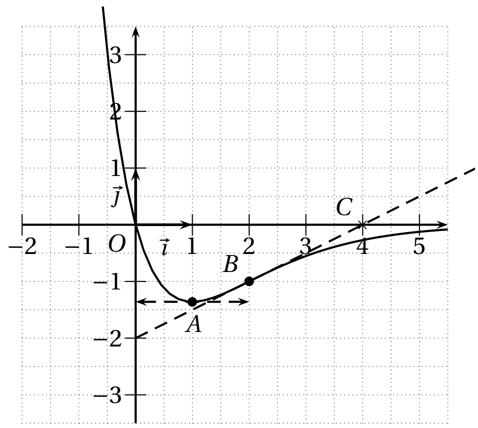
Fonction dérivée – Matrices

Exercice 6.1 (3,5 points).

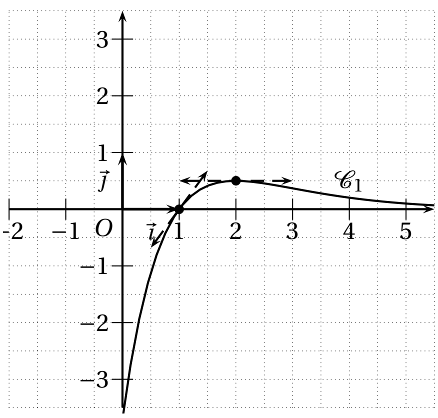
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

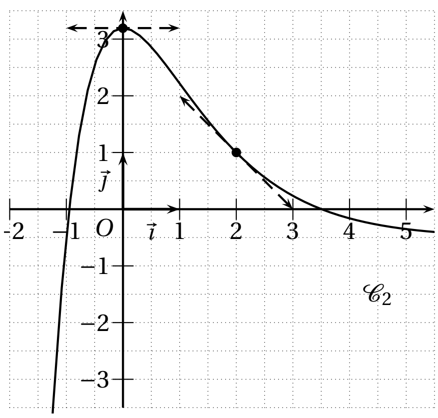
On donne les renseignements suivants :

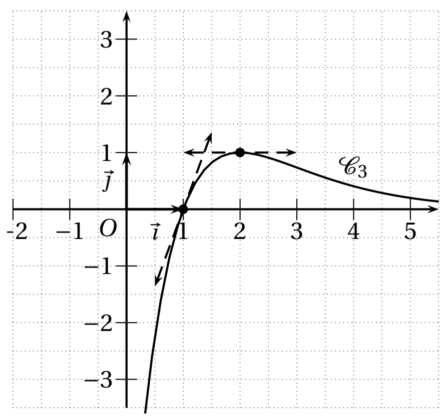
- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2\,;-1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4\,;0)$;



1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques ci-dessous, représente la fonction dérivée f' de f, une autre représente une fonction h telle que $h' = f$. En justifiant vos choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques* :
   (a) déterminer la courbe associée à la fonction f'.
   (b) déterminer la courbe associée à la fonction h.







Exercice 6.2 (6 points).

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (x^2 + 2x + 3)\sqrt{x}$
- $g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$
- $h(x) = (2x + 3)^3$

Exercice 6.3 (5 points).

f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 11x + 28}{x - 3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne en annexe page ci-contre un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

Exercice 6.4 (5,5 points).

Pour les élèves ***ayant suivi*** *l'enseignement de spécialité.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. Développer le calcul matriciel : $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$, où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Déduisez des résultats précédents la matrice inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

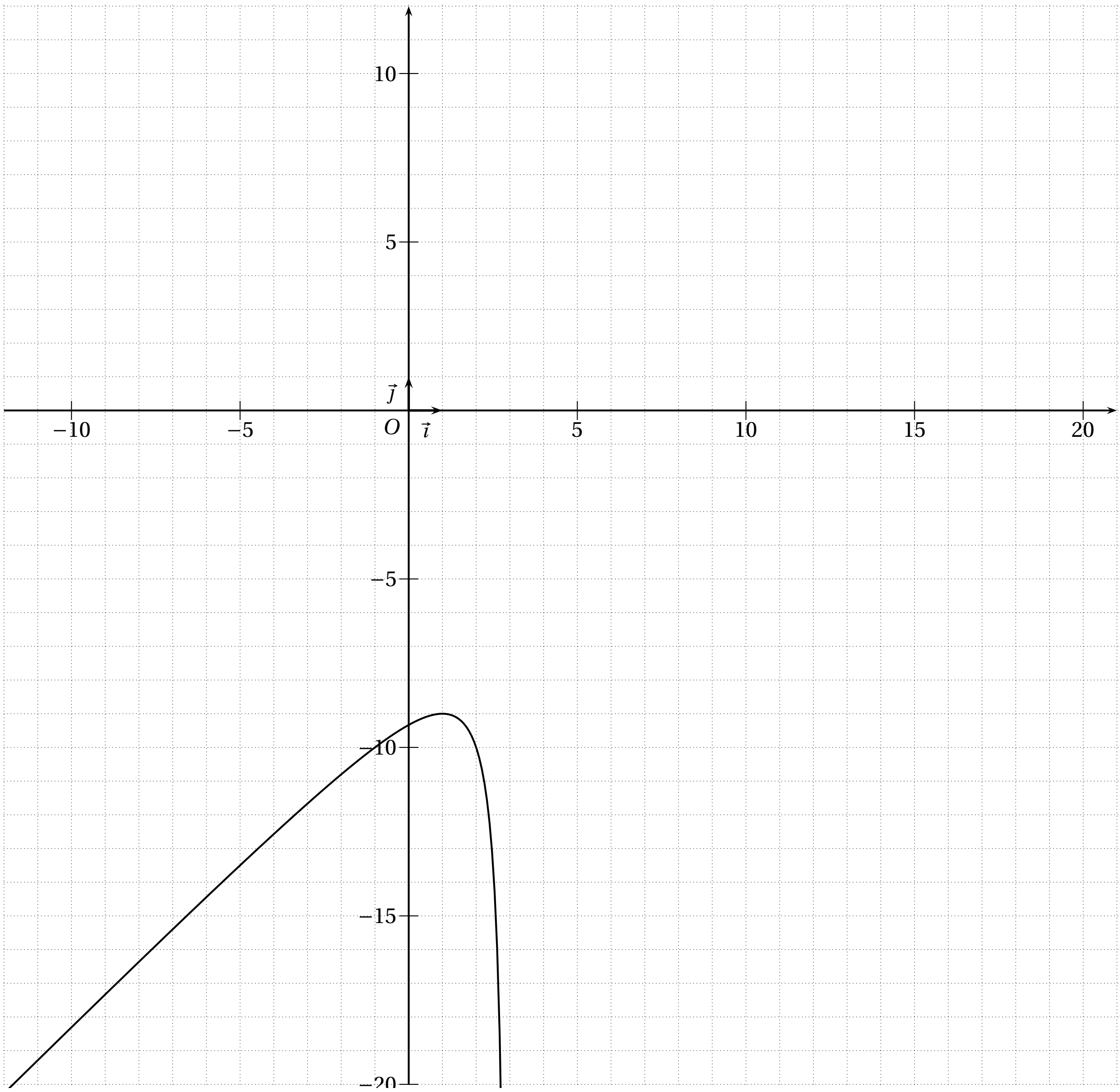
Exercice 6.4 (5,5 points).

Pour les élèves ***n'ayant pas suivi*** *l'enseignement de spécialité.*

Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 360. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 95x + 1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 305x$.
On suppose que chaque porte est vendue.

1. Montrer que $B(x) = -0,001x^3 + 0,1x^2 + 210x - 1500$ pour x variant de 0 à 360.
2. Calculer $B'(x)$ pour x variant de 0 à 360.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction B.
4. Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Justifier votre réponse. Quel est ce bénéfice maximal ?

FIGURE 6.1 – Annexe de l'exercice 6.3



Chapitre 7

Probabilités

Sommaire

7.1 Activités

7.1.1 Quelques fonctions du tableur

Les activités suivantes font appel au tableur. Les fonctions suivantes pourront vous être utiles :

- toute formule de calcul commence par « = » sinon le tableur pense qu'il s'agit de texte à afficher ;
- A2 fait référence au contenu de la case située à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne A ; cette référence est relative et est donc modifiée lors d'un copié collé ;
- A2 fait référence à la même case mais c'est une référence absolue et n'est donc pas modifiée lors d'un copié collé (on peut aussi utiliser $A2 pour ne fixer que la colonne ou A$2 pour ne fixer que la ligne) ;
- SI(*test* ; *valeursivrai* ; *valeursifaux*) renvoie *valeursivrai* si le test est vrai, *valeursifaux* sinon ;
  par exemple SI(A2>6 ;"youpi" ;"zut") affiche dans la case *youpi* si le contenu de A2 est un nombre strictement plus grand que 6 et *zut* sinon ;
- SOMME(*plage*) fait la somme de tous les nombres contenus dans les cases de la *plage* ;
- ENT(*nombre*) renvoie la partie entière du *nombre* ;
- ALEA() renvoie un nombre réel pseudo-aléatoire de l'intervalle $[0 ; 1[$;
  6*ALEA() renvoie un nombre réel pseudo-aléatoire de l'intervalle $[0 \times 6 ; 1 \times 6[= [0 ; 6[$;
  ENT(6*ALEA()) renvoie donc un nombre entier pseudo-aléatoire de l'intervalle $[0 ; 6[$, donc un nombre entier de l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$;
  Et finalement ENT(6*ALEA())+1 renvoie un nombre entier pseudo-aléatoire compris entre 1 et 6 (comme un dé à 6 faces) ;
- sur Calc seulement, ALEA.ENTRE.BORNES(*min* ; *max*) renvoie un nombre entier pseudo aléatoire compris entre *min* et *max* ;
  ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) équivaut donc à ENT(6*ALEA())+1 ;
- NB.SI(*plage* ; *critère*) indique le nombre de cases de la *plage* correspondant au *critère* ;
  ainsi NB.SI(A2 : B6 ; 2) indique le nombre de 2 contenus dans les cases de la plage rectangulaire allant de A2 à B6 ;
  les critères peuvent être dans une autre plage : « >2 » dans la case C1 ; « =3 » dans la case C2 ;
  ainsi NB.SI(A2 : B6 ; C1 : C2) indique le nombre de données dans la plage rectangulaire allant de A2 à B6 qui vérifient le critère de la case C1 **additionné** au nombre de données qui vérifient le critère de la case C2 ; ainsi, si la plage contient 1, 3, 4, 5, et 6, la fonction renvoie 5 (4 nombres vérifiant C1 + 1 nombre vérifiant C2) ;

7.1.2 Les activités

Activité 7.1 (L'affaire Castaneda contre Partida).
Trouvé sur le site de l'IREM de Paris 13.
L'ensemble des faits évoqués ci-dessous est réel.
En novembre 1 976 dans un comté du sud du Texas, RODRIGO PARTIDA était condamné à huit ans de prison pour cambriolage d'une résidence et tentative de viol.
Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 79,1 % de la population de comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoqués pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine.

But du T.P.
On se propose de simuler 100 fois le tirage de 870 jurés pour voir s'il est vraisemblable que le hasard ne désigne que 339 Américains d'origine mexicaine dans une population où 79,1 % est d'origine mexicaine.

Partie A : Simulation de la désignation d'un juré

1. À combien de jurés d'origine mexicaine pourrait-on s'attendre en choisissant au hasard 870 personnes dans la population ?
2. Expliquer pourquoi la formule = ENT(ALEA() + 0,791) renvoie un, 79,1 fois sur 100 et zéro sinon. *On pourra s'aider de schémas pour représenter des intervalles.*

Partie B : Simulation de 100 séries de 870 désignations de jurés

1. Après avoir rentré la formule précédente dans la case A1 et « tiré la poignée » verticalement, simuler le tirage des 870 jurés.
2. Dans la cellule A871 entrer la formule = SOMME(A1 : A870).
   Qu'obtient-on ?
   En appuyant plusieurs fois sur la touche F9 (Excel) ou CTRL+MAJ+F9 (Calc), indiquer autour de quel nombre le total de jurés d'origine mexicaine semble osciller.
3. Après avoir sélectionné toute la colonne A1 : A871, « tirer la poignée » horizontalement pour simuler 100 fois le tirage de 870 jurés.
4. Représenter avec un nuage de points les données de la dernière ligne (*commencer par sélectionner la ligne 871 puis utiliser l'assistant graphique*).
5. Entre quelles bornes pourrait-on envisager le nombre de jurés mexicains sans qu'on puisse évoquer un problème de discrimination ?
6. Recopier et compléter la phrase : « d'après notre simulation de 100 élections de 870 jurés on n'a jamais obtenu moins de … jurés d'origine mexicaine ».
7. Obtient-on obligatoirement 688 jurés d'origine mexicaine ? Qu'observez-vous ?
8. (a) Est-il arrivé au hasard de distribuer un nombre de jurés d'origine mexicaine comparable à celui obtenu dans ce comté du Texas ?
   (b) Comment expliquez-vous cette situation ?

Activité 7.2 (Fille ou garçon).
On se propose d'utiliser le tableur pour résoudre le problème suivant :
« Monsieur X est invité chez des nouveaux amis qu'il sait très joueurs mais qu'il connait à peine. Au cours de la conversation il apprend que ses nouveaux amis ont deux enfants mais il oublie de demander leur sexe. Soudain l'un de ces deux enfants entre dans la salle. Il s'agit d'un garçon.
"– Vous avez donc un garçon et … ? demande-t-il
– Je parie que tu ne devineras pas. Sur quoi mises-tu ? un gars ? une fille ?"
Sur quoi doit miser monsieur X pour maximiser ses chances de clore le bec à ces amis un peu lourds avant de prendre congé ? »

On suppose pour simplifier les choses qu'un enfant sur deux qui nait est une fille et l'autre un garçon.

1. Que *conjecturez-vous* a priori quant au sexe de l'autre enfant ?
2. On se propose d'utiliser la colonne A pour simuler le sexe du premier enfant, la colonne B pour celui du second enfant et la colonne C pour compter le nombre de garçons.
   Proposer une formule utilisant la fonction ALEA (ou ALEA.ENTRE.BORNES avec Calc) permettant de simuler le sexe d'un enfant dans les cases A1 et B1 et une formule adaptée pour compter le nombre de garçons de la fratrie dans la case C1.
   Demander au professeur de valider les deux formules avant d'aller plus loin.

3. « Tirer la poignée » verticalement de façon à simuler 100 familles de deux enfants.
4. Dans la plage F4 : J5 dresser un tableau de la forme suivante :

Nombre de garçons	0	1	2	total
Effectif				

   où les cases *Effectif* seront automatiquement complétées par le tableur (utiliser la fonction NB.SI)
5. En appuyant plusieurs fois sur la touche F9 (Excel) ou CTRL+MAJ+F9 (Calc), indiquer autour de quels effectifs semblent osciller les types de famille.
6. Puisque l'un des enfants est un garçon, quel type de famille doit-on exclure ?
   En observant les types de famille restants, déterminer sur quel sexe doit miser Monsieur X et dans quelle proportion il a des chances de gagner son pari.
   Votre conjecture est-elle validée ?

Activité 7.3.
On lance deux dés à six faces qu'on suppose équilibrés et on s'intéresse à la somme de deux numéros indiqués par les faces supérieures des dés.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. À l'aide du tableur, en vous inspirant de la façon de procéder de l'activité précédente (une colonne pour chaque dé), conjectuer, sur mille lancers, la fréquence autour de laquelle oscille chaque somme (on rappelle que la fréquence d'une valeur est l'effectif de cette valeur divisé par le total des effectifs).
3. Comment expliquer ces fréquences ?

7.2 Vocabulaire des ensembles

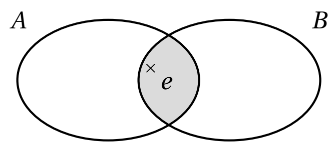
Les mathématiques utilisent toutes sortes d'ensembles (finis, infinis dénombrables, infinis non dénombrables). Le but de ce paragraphe n'est pas de faire une étude systématique de la théorie des ensembles (qui s'avérerait très complexe) mais de proposer une approche des notions les plus utilisées de cette théorie.

Ainsi, nous ne tenterons pas de définir rigoureusement ce qu'est un ensemble. Disons simplement qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objets distincts possédant un propriété commune (par exemple l'ensemble des entiers naturels pairs, l'ensemble des entiers qui n'ont que deux diviseurs (nombres premiers), l'ensemble des polynômes de degré 2, etc.). On considère ces objets dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel.

Un ensemble se note avec des accolades : par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9, on notera $E = \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble : par exemple $2 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ et $3 \notin \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Enfin, nous noterons $\varnothing$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

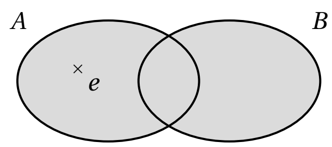
Définition 7.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

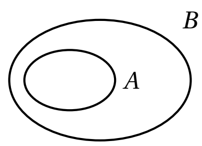
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 7.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 7.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$.



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

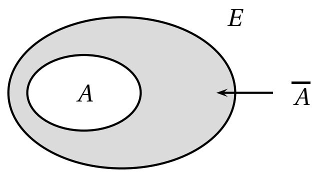
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples 7.1. On a toujours :

- $A \subset A \cup B$;
- $B \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A$;
- $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;
- $\varnothing \subset A$;
- $\varnothing \cap A = \varnothing$;
- $\varnothing \cup A = A$.

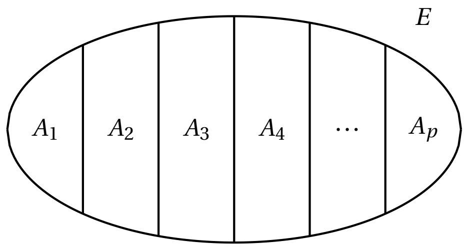
Définition 7.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ ou encore $C_E(A)$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 7.5. Des parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1 ; \dots ; p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = E$.



Définition 7.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de* E. Ce nombre est noté Card(E). On convient que Card$(\varnothing) = 0$.

Exemple 7.2. Si $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ alors Card$(E) = 6$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

7.3 Expériences aléatoires

7.3.1 Issues, univers

Définition 7.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Exemples 7.3.

- On lance un dé et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P ; I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P ; F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i ; j)$ où $1 \leqslant i \leqslant 6$ et $1 \leqslant j \leqslant 6\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant les hypothèses faites : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenus, on obtient respectivement :

- $\Omega_P = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24 ; 25 ; 30 ; 36\}$;
- $\Omega_S = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$.

Événements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2 ; 3 ; \cdots ; 11 ; 12\}$.

Le tableau 7.1 page suivante définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

TABLE 7.1 – Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3; 6; 9; 12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10; 11; 12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un événement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement « A et B » (noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{6; 12\}$
Événement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements	$A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

7.4 Probabilités

7.4.1 Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 7.8. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0; 1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum\limits_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Exemple 7.4. Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement A = « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
   D'après la définition, $p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0,3$ [1].
2. Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
   D'après la définition, $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$, donc $p(6) = 0,5$.

1. La notation rigoureuse est $p(\{1\})$ mais on peut noter $p(1)$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

Propriété 7.1. *Soit A et B deux événements de* Ω*, alors :*
- *La probabilité de l'événement certain est 1 :* $p(\Omega) = 1$ *;*
- *La probabilité de l'événement impossible est 0 :* $p(\varnothing) = 0$ *;*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ *;*
- *Si A et B sont incompatibles ,* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ *;*
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 7.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 7.2. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers* Ω*, pour tout événement élémentaire* ω *et tout événement A on a :*
- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple 7.5. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.

On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).

Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Loi des grands nombres

Définition 7.10. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω donnée le nombre : $f_i = \dfrac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres* ; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 7.3 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Remarques.
- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

7.5 Exercices

Exercice 7.1.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de Ω les événements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   - B : « obtenir un numéro impair » ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des événements suivants, les écrire sous forme de partie de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup C$;
   - $A \cap C$;
   - $C \cup B$;
   - $C \cap B$;
   - $\overline{A}$;
   - $\overline{A} \cup C$;
   - $\overline{A} \cap C$;

Exercice 7.2.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les événements :
   - A : « obtenir un as » ;
   - P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?
   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?
   (c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.
   (d) Déterminer Card$(A \cap P)$ et Card$(A \cup P)$.

Exercice 7.3.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

Exercice 7.4.
E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus.
On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - A : « il est un multiple de 2 »
   - B : « il est un multiple de 4 »
   - C : « il est un multiple de 5 »
   - D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
2. Calculer la probabilité de :
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$;
   - $A \cap C$;
   - $A \cup C$.

Exercice 7.5.
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :

- E_1 : « la ligne A est occupé » ;
- E_2 : « la ligne B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

Exercice 7.6.
On considère un jeu de 32 cartes (la composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 « couleurs » : coeur ; carreau ; trèfle et pique.)
On tire, au hasard, une carte du paquet, chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :

- V : « Obtenir un valet » ;
- F : « Obtenir une figure[2] » ;
- T : « Obtenir un trèfle ».

1. Calculer les probabilités suivantes :
   - $p(V)$;
   - $p(F)$;
   - $p(T)$.
2. Décrire l'événement $F \cap T$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap T)$.
   En déduire la probabilité $p(F \cup T)$ d'obtenir une figure ou un trèfle.
3. Décrire l'événement F et calculer (simplement !) sa probabilité $p(F)$.

Exercice 7.7.

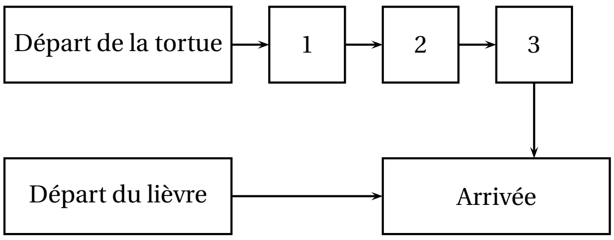
On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ».

1. Décrire $\overline{A}$.
2. Exprimer en fonction de n la probabilité $p(\overline{A})$.
3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
4. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$								

5. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?
6. Le lièvre et la tortue font la course.
   Le lièvre se divertit longuement mais quand il part, il file à l'arrivée. La tortue, quant à elle, avance inexorablement mais lentement vers l'arrivée.
   On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :
   - si le 6 sort, le lièvre avance ;
   - sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné.
     Voir figure 7.1.

FIGURE 7.1 – Figure de l'exercice 7.7



Déterminer la probabilité que le lièvre l'emporte et celle que la tortue l'emporte.

Exercice 7.8.

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « les trois enfants seront de sexes différents ».

Exercice 7.9.

Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste à autant de chance de passer que de s'arrêter).

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   (a) les trois feux verts ?
   (b) deux des trois feux verts ?

2. Les figures sont les valets, les dames et les rois

Exercice 7.10.

Un sac contient quatre jetons rouges, trois jetons verts et deux jetons bleus.

1. On tire des jetons, avec remise après tirage, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés.
   Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.
2. Même question si on tire les jetons sans remise.

Exercice 7.11.

Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

- Un billet ?
- Deux billets ?

Chapitre 8

Comportement asymptotique

Sommaire

8.1 Activités

Activité 8.1.

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ et h, définie sur $[0\,;+\infty[$, par $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				

2. Comment semblent se comporter ces trois fonctions quand x devient grand ?
3. Résoudre sur $[0\,;+\infty[$:
   - $f(x) > 10^{12}$
   - $f(x) > 10^{24}$
4. Faire de même pour g et h.

Finalement, on peut rendre $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que leur limite, quand x tend vers $+\infty$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Activité 8.2.
Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+2$.

1. (a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				

   (b) Comment semble se comporter cette fonction quand x devient grand ?

   (c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x devient grand ?
   On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

   (d) Résoudre, pour $x>0$, les inéquations suivantes :
   - $f(x)-2<0,1$
   - $f(x)-2<0,001$

   Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

   On dira que
   - la limite de f, quand x tend vers $+\infty$ est 2 et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$;
   - la droite d'équation $y=2$ est une asymptote (horizontale) à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. (a) Compléter le tableau suivant :

x	1,5	1,1	1,01	1,0001
$f(x)$				

   (b) Comment semble se comporter cette fonction quand x se rapproche de 1 ?

   (c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x se rapproche de 1 ?
   On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

   (d) Résoudre, pour $x>0$, les inéquations suivantes :
   - $f(x)>10$
   - $f(x)>1000$

   Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

   On dira que
   - la limite de f, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures à 1 est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$;
   - la droite d'équation $x=1$ est une asymptote (verticale) à la courbe $\mathscr{C}$ (forcément en 1).

8.2 Limite d'une fonction

8.2.1 En l'infini

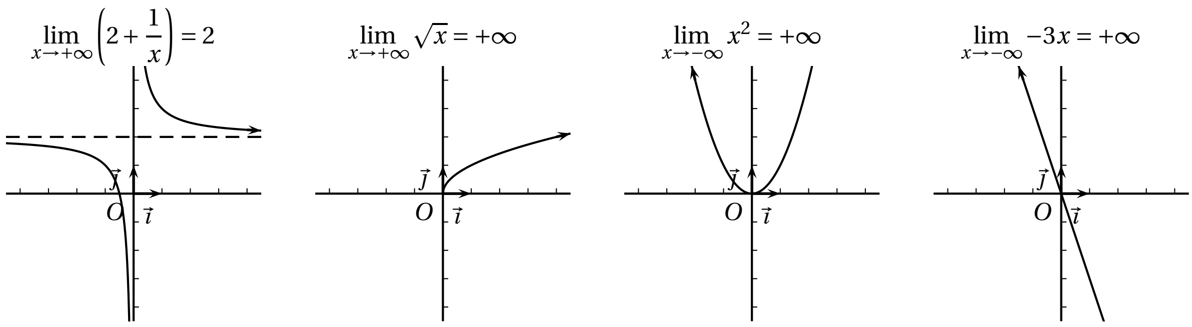
Définition 8.1. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$.
Lorsque x prend des valeurs *de plus en plus grandes en valeur absolue et positives*, on dit aussi *lorsque x tend vers $+\infty$*, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :
- grands en valeur absolue et positifs (tendent vers $+\infty$), on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;
- grands en valeur absolue et négatifs (tendent vers $-\infty$), on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;
- proches d'un réel l (tendent vers l), on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Remarques.
- Ces définitions sont, conformément au programme, très intuitives. Il en existe de plus rigoureuses, mais elles ne sont pas exigibles.
- On utilisera parfois dans la suite les termes de « limite infinie » quand la limite d'une fonction est $+\infty$ ou $-\infty$ et de « limite finie » quand la limite d'une fonction est un nombre l.

On a des définitions équivalentes en $-\infty$:

Définition 8.2. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, si les nombres $f(x)$:
- tendent vers $+\infty$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;
- tendent vers $-\infty$, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;
- tendent vers un réel l, on dit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.

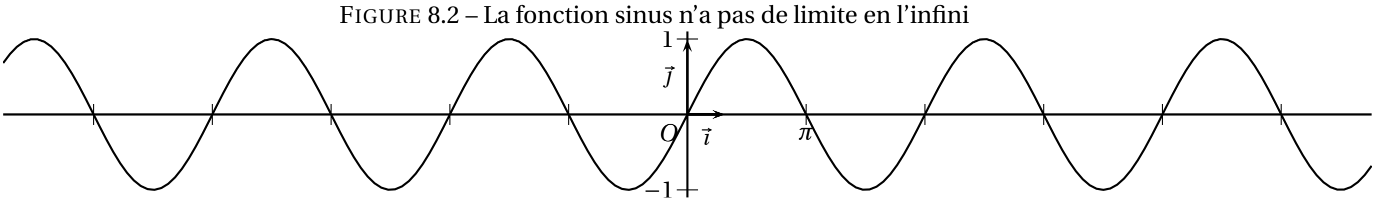
FIGURE 8.1 – Quatre exemples de limites en l'infini



Exemples 8.1. La figure 8.1 de la présente page présente quatre exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche :

Exemple 8.2. Certaines fonctions n'ont pas de limite en l'infini. C'est le cas, par exemple, de la fonction $\sin x$ (voir sa courbe représentative sur la figure 8.2 de la présente page).

FIGURE 8.2 – La fonction sinus n'a pas de limite en l'infini



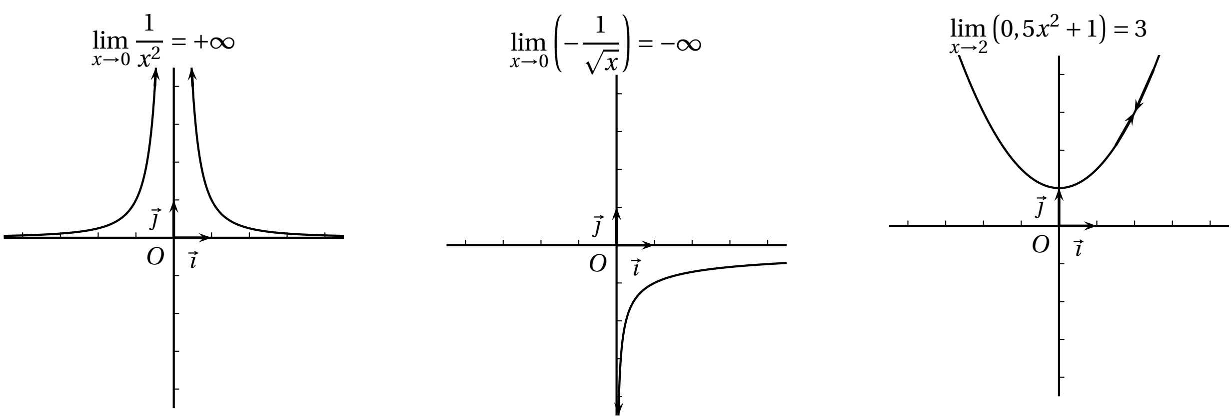
8.2.2 En un réel a

Définition 8.3. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D.
Lorsque x tend vers a, si les nombres $f(x)$:

- tendent vers $+\infty$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$;
- tendent vers $-\infty$, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$;
- tendent vers un réel l, on dit que f a pour limite l en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

Exemples 8.3. La figure 8.3 de la présente page présente trois exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche.

FIGURE 8.3 – Limites en a



En un réel a, à droite ou à gauche

Certaines fonctions n'ont pas de limite en un réel a, au sens de la définition précédente. C'est le cas de la fonction inverse.

Lorsque x tend vers 0, les nombres $\frac{1}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x est positif, et vers $-\infty$ quand x est négatif. On parle alors de « limite à droite de 0 » et de « limite à gauche de 0 » (les x positifs et les x négatifs étant situés en général respectivement à droite de 0 et à gauche de 0 sur l'axe des abscisses).

On dit aussi que la limite de la fonction inverse en 0^+ (quand x tend vers 0 et est positif) est $+\infty$ et que la limite de la fonction inverse en 0^- (quand x tend vers 0 et est négatif) est $-\infty$.

On notera alors indifféremment : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Par abus de langage, on écrira « $x \to a^+$ » pour dire « x tend vers a et $x > a$ » et « $x \to a^-$ » pour dire « x tend vers a et $x < a$ ».

Finalement, ce n'est que lorsque la limite à droite et à gauche de a sont égales qu'on dit que f admet une limite en a, comme par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en 0. Lorsque les limites à gauche et à droite sont différentes, la fonction n'a pas de limite en a.

Ainsi, comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on peut écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$, la fonction inverse n'a pas de limite en 0.

8.3 Limite des fonctions usuelles

Propriété 8.1. *Soit f une des fonctions usuelles (affine, carré, cube, inverse, racine carrée, sinus et cosinus) et D_f leurs ensembles de définition respectifs.*

- *Si $a \in D_f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*
- *Sinon, aux bornes de leur ensemble de définition, les fonctions usuelles ont les limites résumées dans le tableau ci-dessous :*

f	D_f	*Limites*
$f(x) = mx+p$	$\mathbb{R}$	*Si* $m>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = -\infty$ *Si* $m<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = +\infty$ *Si* $m=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = p$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Les définitions rigoureuses des limites étant hors programme, les démonstrations de ces propriétés et des suivantes le sont aussi, mais les activités montrent comment elles peuvent se faire.

Remarques.

- Les fonctions constantes ($f(x) = k$) et linéaires ($f(x) = kx$) sont aussi des fonctions usuelles mais sont considérées comme des cas particuliers des fonctions affines $f(x) = mx+p$ avec, respectivement, $m=0$ et $p=0$.
- $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = x^2$ si n est pair et que $f(x) = x^3$ si n est impair (on l'admettra).
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = \frac{1}{x}$ si n est impair et que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si n est pair (on l'admettra).

8.4 Opérations sur les limites

Dans les paragraphes suivants, nous parlerons parfois de « forme indéterminée », notée F.I. Cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, mais que la règle énoncée ne permet pas de conclure dans le cas général, qu'il faut étudier chaque cas particulier.

8.4.1 Règle essentielle

On admettra que les sommes, les produits, les inverses, les quotients ou les composées des fonctions usuelles qui nous étudierons en première vérifient tous :

Si $a \in D_f$, où D_f est l'ensemble de définition de f, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans les autres cas, aux bornes de leur ensemble de définition, on appliquera les propriétés des paragraphes suivants.

8.4.2 Limite d'une somme

Propriété 8.2. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction somme $f+g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

On l'admettra.

Exemples 8.4.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{1}{x}-1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-x+\frac{1}{x}-1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-x-1) = -0-1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

8.4.3 Limite d'un produit

Propriété 8.3. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction produit $f\times g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq 0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq 0$	$l\times l'$	0	$\pm\infty$
$l=0$	0	0	F.I.
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$

On l'admettra.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du produit est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits.

Exemples 8.5.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^2\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5) = -5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2+x\right) = 0+0 = 0$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

8.4.4 Limite de l'inverse

Propriété 8.4. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f une fonction ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction $\frac{1}{f}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l \neq 0$	$l = 0^+$	$l = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$0\ (0^+)$	$0\ (0^-)$

On l'admettra.

Exemples 8.6.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $x^2 > 0$ quand $x \in \mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+2} = \frac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+2\right) = 4$

8.4.5 Limite d'un quotient

Propriété 8.5. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction quotient $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	0
$l = 0$	0	F.I.	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du quotient est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits (qui est aussi la règle des signes des quotients).

Preuve. $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ or, d'après les limites de l'inverse,
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l'}$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{g(x)} = 0$.

En appliquant les propriétés des limites d'un produit, on obtient :

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{g(x)}$	$\frac{1}{l'}\ (\neq 0)$	$\pm\infty$	0
$l \neq 0$	$l \times \frac{1}{l'} = \frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	0
$l = 0$	0	F.I.	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

◊

Exemple 8.7.
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3}{2x^2+3} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -3 = -3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2+3) = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\cos x}{x^2-2x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2-2x) = 0$ et $x^2-2x = x(x-2) < 0$ (négatif entre les racines 0 et 2)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x-1\right) = +\infty$

8.4.6 Cas des formes indéterminées

Finalement, il y a quatre cas d'indétermination qui sont, **en utilisant un abus d'écriture qui ne vous sera pas autorisé sur vos copies** :

$$« \frac{0}{0} » \qquad « 0 \times \infty » \qquad « \frac{\infty}{\infty} » \qquad « \infty - \infty »$$

Pour lever l'indétermination, on peut tenter transformer l'expression (par exemple développer s'il s'agit d'un produit). Si cela ne donne rien, il est toujours possible de mettre en facteur le terme de plus haut degré (les termes quand il s'agit d'un quotient) : cela résoud la plupart des problèmes.

Quelques exemples

1. Nous avons vu que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + x - 1\right)$ était une forme indéterminée.

   Comme $x \to -\infty$, on peut considérer que $x \neq 0$, et donc écrire, en factorisant le terme de plus haut degré :

   $$x^2 + x - 1 = x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

   or, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, on a :

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 + 0 + 0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + x - 1\right) = +\infty$$

2. Nous avons vu que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x}\left(x^2 + x\right)$ est une forme indéterminée.

   Avec $x > 0$, donc $x \neq 0$, on peut écrire, en développant : $\dfrac{1}{x}\left(x^2 + x\right) = x + 1$

   or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x + 1) = 0 + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x}\left(x^2 + x\right) = 1$

3. Nous avons vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^3 + x - 1}$ est une forme indéterminée.
   Comme $x \to +\infty$ on peut considérer que $x \neq 0$ et, en factorisant le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on obtient :

   $$\frac{x^2 - x}{x^3 + x - 1} = \frac{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{x^3\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)}$$

   or, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, on a :

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 - 0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) = 1 + 0 - 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{x^3 + x - 1} = 0$$

4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.
   En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x - 1}{x^2}$
   or

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x - 1) = 0 - 1 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 = 0 \text{ et } x^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - 1}{x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

8.4.7 Fonctions polynôme et rationelle

On peut procèder de la même manière qu'aux exemples 1 et 3 du paragraphe précédent pour toute fonction polynôme ou rationelle et démontrer ainsi les propriétés suivantes :

Propriété 8.6. *Soit f une fonction polynôme de degré n :*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0$$

Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = \pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = \pm\infty$.

qui s'énonce aussi de la façon suivante :

« La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré. »

Propriété 8.7. *Soit f une fonction rationelle :*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Le détail de ces deux démonstrations est laissé en exercice au lecteur.

8.4.8 Règles d'encadrement

On admettra les théorèmes suivants :

Théorème 8.8. *Soient f et g deux fonctions définies au moins sur $[a\,;+\infty[$.*
Si on a :

- *pour tout x assez grand, $f(x) \geq g(x)$;*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Théorème 8.9. *Soient f et g deux fonctions définies au moins sur $[a\,;+\infty[$.*
Si on a :

- *pour tout x assez grand, $f(x) \leq g(x)$;*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Théorème 8.10 (des gendarmes)**.** *Soient f, u et v, trois fonctions définies au moins sur $[a\,;+\infty[$.*
Si on a :

- *pour tout x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$;*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Ces théorèmes ont leurs équivalents quand x tend vers $-\infty$.

8.5 Asymptotes

Définition 8.4. On appelle courbe asymptote une courbe simple (droite, cercle, etc.) dont une courbe plus complexe peut s'approcher.

Nous ne parlerons au lycée que de droite asymptote, en omettant le plus souvent de préciser même le terme de droite. Une asymptote sera donc une droite dont la courbe représentative d'une fonction s'approche (sans forcément l'atteindre). Nous avons vu dans les activités les trois types d'asymptote.

8.5.1 Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.
On a alors :

Définition 8.5. Si f une fonction admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, réel, on dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe de f.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a \text{ asymptote à } \mathscr{C}$$

Remarque. Il suffit qu'on ait soit une limite à droite, soit une limite à gauche qui vaut $\pm\infty$ pour avoir une asymptote verticale.

8.5.2 Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie en l'infini.
On a alors :

Définition 8.6. Si f une fonction admet une limite finie b en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote (horizontale) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b \text{ asymptote à } \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Une courbe peut avoir une asymptote en $+\infty$ sans en avoir pour autant en $-\infty$: il faut faire l'étude aux deux bornes.

8.5.3 Asymptote oblique

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f se comporte de plus en plus comme une fonction affine.
On a alors :

Définition 8.7. Soit f une fonction. S'il existe une fonction affine $g(x) = mx + p$ telle que la fonction $f - g$ admet comme limite 0 en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote (oblique) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (mx+p)\big) = 0 \Leftrightarrow y = mx + p \text{ asymptote à} \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Même remarque que ci-dessus.

8.6 Exercices

8.6.1 Technique

Exercice 8.1.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} \left(\dfrac{-6}{x^2}\right)$

Exercice 8.2.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}} \left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x<-2}} \left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

Exercice 8.3.

Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

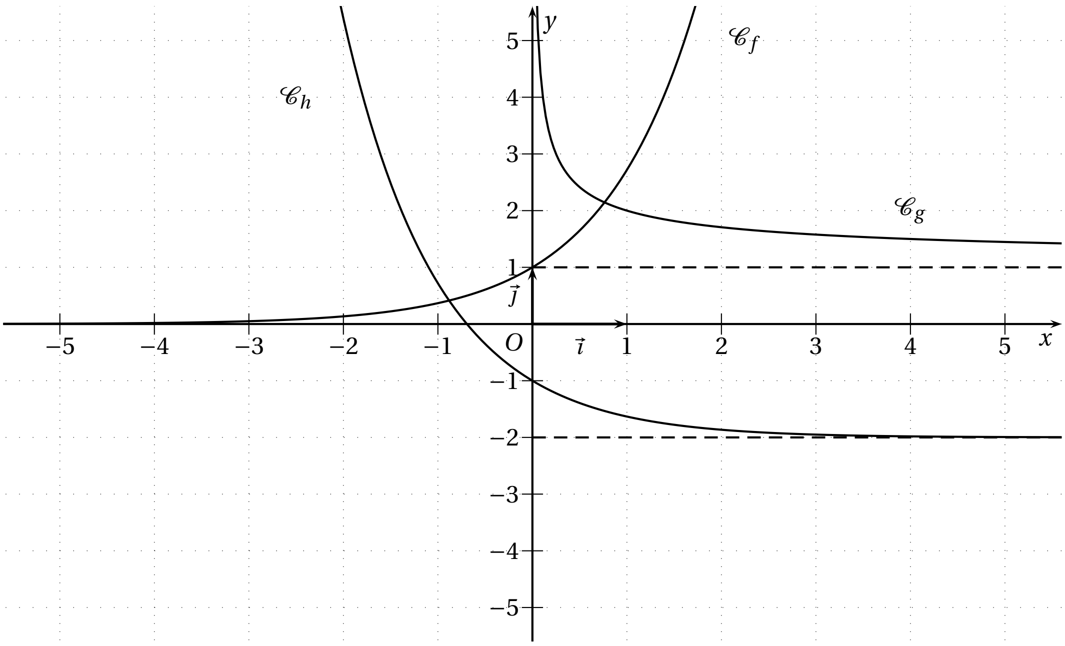
8.6.2 Lectures graphiques

Exercice 8.4.

On donne sur la figure ci-dessous les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.

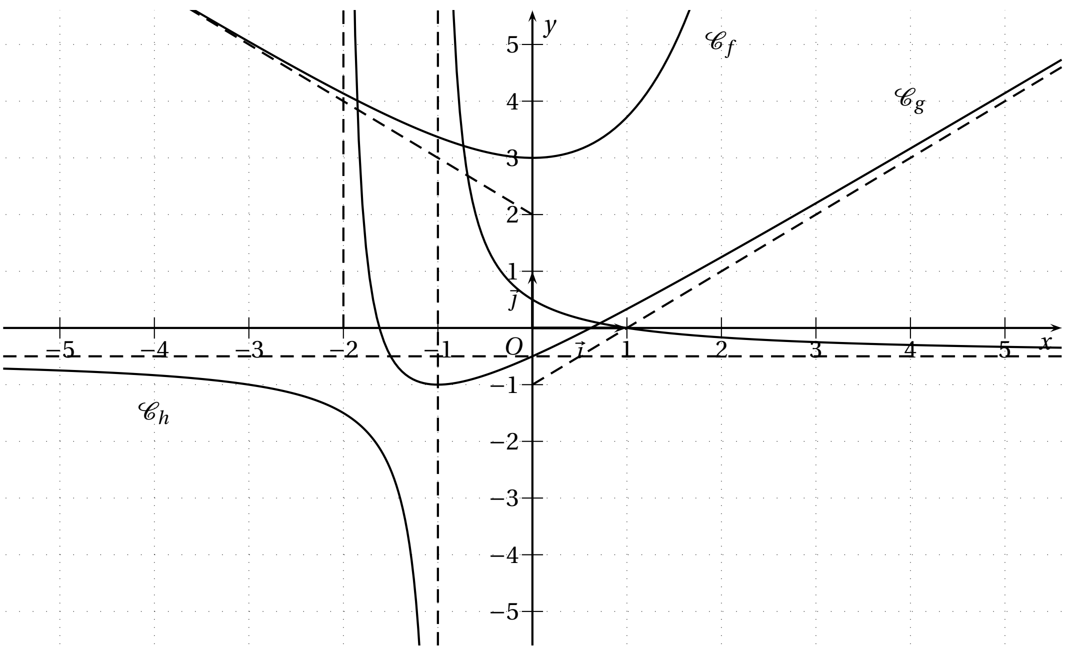
Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition.



Exercice 8.5.

Même exercice que le précédent (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties).



8.6.3 Étude de fonctions

Exercice 8.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\left(x^2-1\right)(x-2001)}{2001}$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8.7.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

Exercice 8.8.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x+1}{2x+3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

Exercice 8.9.
Le but de cet exercice est de déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+2}{3-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
   $$f(x) = ax+b+\frac{c}{3-x}$$
3. Étude en l'infini.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   (b) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote horizontale en l'infini ?
   (c) Montrer que la droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Étude au voisinage de 3.
   (a) Déterminer la limite du numérateur lorsque x tend vers 3.
   (b) Étudier le signe du dénominateur.
   (c) Déterminer la limite du dénominateur lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures.
   (d) En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$.
   (e) Procéder de même pour déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)$
   (f) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?

Exercice 8.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

Exercice 8.11.
Soit f la fonction qui a x associe

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{-x^2 + 2x + 3}$$

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
On commencera par étudier le signe de $-x^2 + 2x + 3$ *selon les valeurs de* x.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

Exercice 8.12.
Soit f la fonction définie pour $x \in [1\,;\, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1}$. Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que, pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$
3. En déduire que, pour tout $x \in [1\,;\, +\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$
4. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice 8.13.
Soit f, u et v les fonctions définies sur $[1\,;\, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x} \qquad u(x) = \frac{2x - 1}{x} \qquad v(x) = \frac{2x + 1}{x}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [1\,;\, +\infty[: u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.
2. Étudier les limites en $+\infty$ de u et de v.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.