

## Devoir surveillé n°4

### Généralités sur les fonctions – Systèmes

Exercice 4.1 (6 points). 1. On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{4}{x-1}$ .

À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de  $g$  et son ensemble de définition.

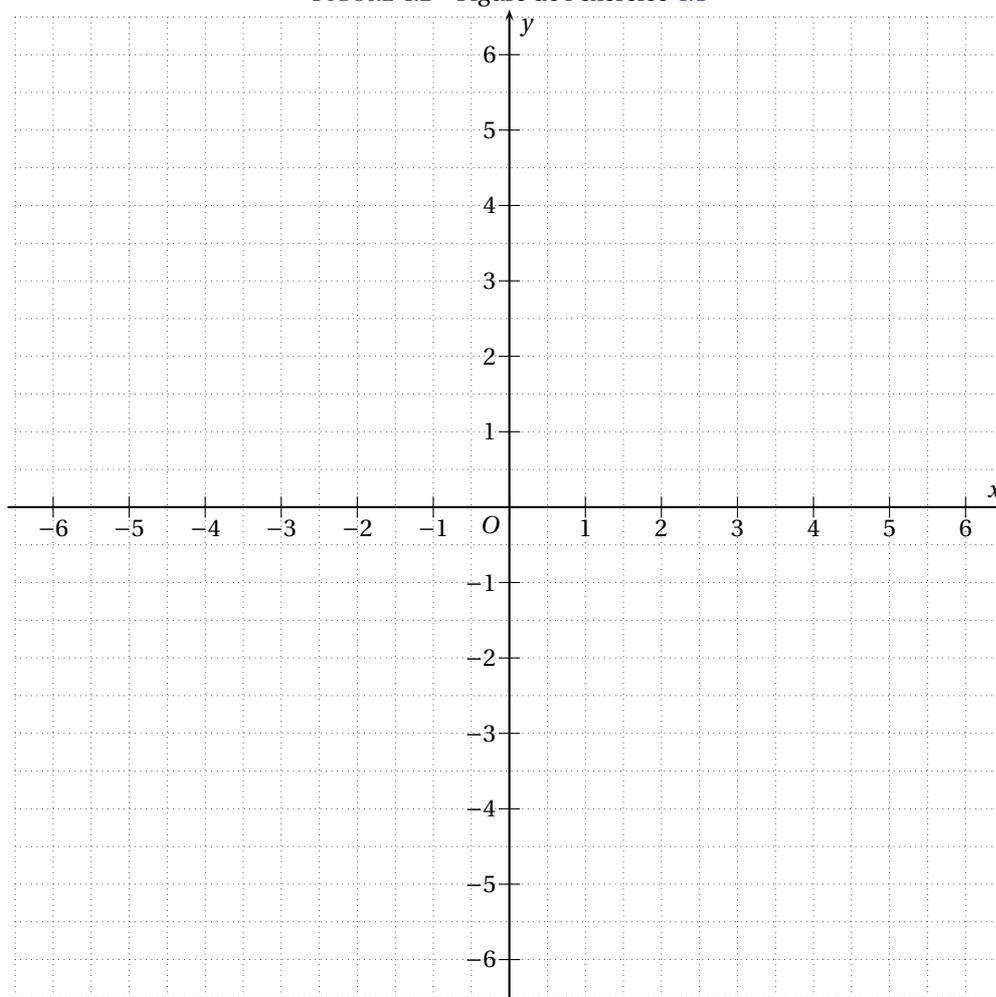
2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty; 1[ \cup ] 1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x - 1}$$

On appelle  $\mathcal{C}$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Montrer que  $f(x) = -x + 1 + \frac{4}{x-1}$  pour tout  $x \neq 1$ .
- À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction  $f$ .
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec chacun des axes du repère et les placer sur la figure 4.2 de la présente page.
- Tracer soigneusement  $\mathcal{C}$ .

FIGURE 4.2 – Figure de l'exercice 4.1



Exercice 4.2 (2 points).

Pour chacun des trois systèmes suivants :

1. déterminer s'il a ou non une unique solution ;
2. s'il a une unique solution, le résoudre.

•  $\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 1,5x + 3y = 1 \end{cases}$

•  $\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

•  $\mathcal{S}_3 : \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 4y - 2x = 1 \end{cases}$

Exercice 4.3 (6 points).

Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 4y + z = -1 \\ 2x - 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

Exercice 4.4 (6 points).

Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.

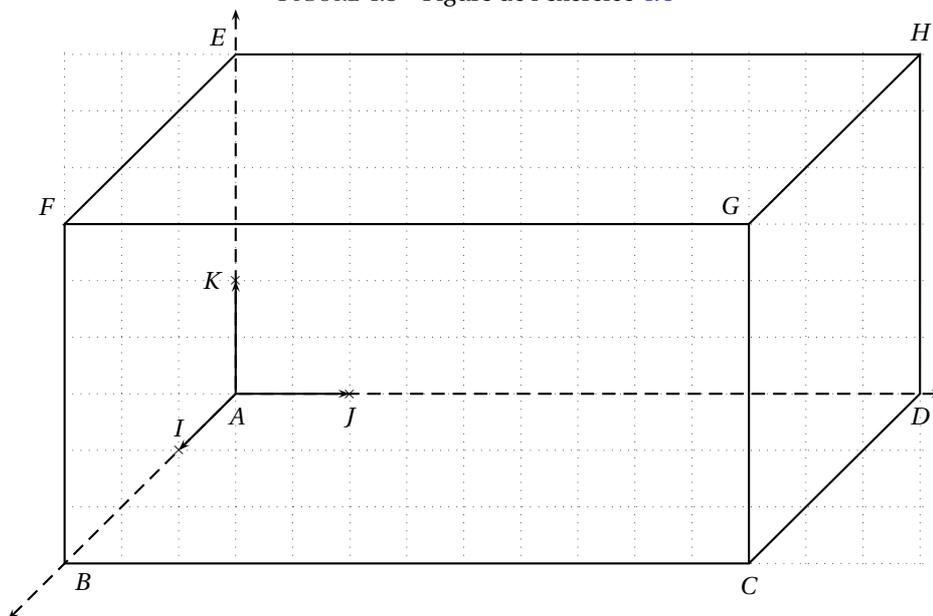
L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(A; \vec{AI}; \vec{AJ}; \vec{AK})$ .

Le parallélépipède rectangle  $ABCDEFGH$ , représenté sur la figure 4.3 de la présente page, est tel que  $B(3; 0; 0)$ ,  $D(0; 6; 0)$ ,  $E(0; 0; 3)$ .

$L, M$  et  $P$  sont trois points de coordonnées :  $L(1; 2; 0)$ ,  $M(0; 2; 1)$  et  $P(1; 0; 1)$ .

1. Placer les points  $L, M$  et  $P$  sur la figure ci-dessous.
2. Quelle est la nature du triangle  $LMP$  ?
3. (a) Donner (sans justification) les coordonnées des points  $C, F$  et  $H$ .  
 (b) Déterminer s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{PL} = a\vec{FH} + b\vec{FC}$ .  
 Que peut-on en déduire pour la droite  $(PL)$  et le plan  $(CFH)$  ?  
 (c) Montrer que la droite  $(LM)$  est parallèle au plan  $(CFH)$ .  
 (d) Que peut-on en déduire pour les plans  $(LMP)$  et  $(CFH)$  ?  
 (e) En déduire la trace du plan  $(LMP)$  sur le parallélépipède  $ABCDEFGH$ .

FIGURE 4.3 – Figure de l'exercice 4.4



Exercice 4.5 (6 points).

Au moment des fêtes, un artisan chocolatier propose des assortissements de chocolats par ballotins de 500 g :

- *Succès* : 300 g de chocolats au lait, 100 g de chocolats noirs et le reste en chocolats divers ;
- *Passion* : 400 g de chocolats noirs et le reste en chocolats divers ;

Madame Bomonde passe commande de  $x$  ballotins *Succès* et  $y$  ballotins *Passion*.

Elle désire proposer à ses invités au moins 1,8 kg de chocolats noirs, 1,2 kg de chocolats au lait et 900 g de chocolats divers.

1. Justifier que les contraintes se traduisent par le système suivant où  $x$  et  $y$  sont des entiers :

$$\begin{cases} x + 4y \geq 18 \\ x \geq 4 \\ x + y \geq 9 \end{cases}$$

2. Dans le repère orthonormal de la figure 4.4 de la présente page, représenter l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan dont les coordonnées vérifient le système ci-dessus.
3. Le prix d'un ballotin *Succès* est de 15 € et celui d'un ballotin *Passion* de 30 €.
  - (a) Exprimer le coût total de cet achat pour Madame Bomonde en fonction de  $x$  et  $y$ .
  - (b) Tracer la droite correspondant à un coût de 210 €. Existe-t-il des points solutions du système situés en dessous de cette droite ?
  - (c) Déterminer graphiquement le nombre de ballotins de chaque sorte acheté qui permet à Madame Bomonde un coût total minimum. Expliquer la méthode employée.
  - (d) En déduire le coût total de son achat.

FIGURE 4.4 – Figure de l'exercice 4.5

