Mathématiques en Terminale ES

David ROBERT

2008–2009

Sommaire

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions : Rappels et compléments

Sommaire

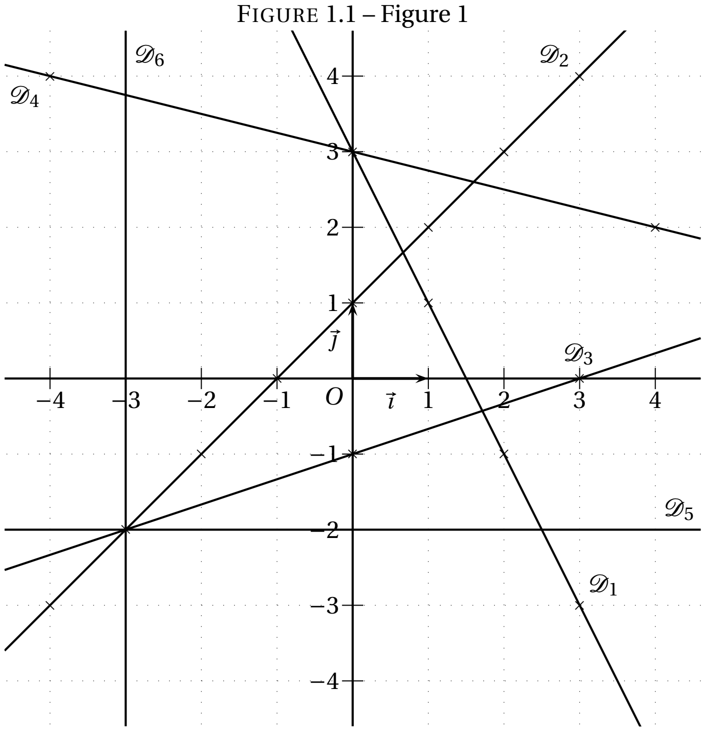
1.1 Généralités

1.1.1 Fonctions affines

Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x + 0,5$, définie sur $\mathbb{R}$?
   Déterminer si $A(150,5\,;\, -451)$ ou $B(-73,25\,;\, -219,5)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.
2. Mêmes questions dans les cas suivants :
   - $A\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{13}{6}\right)$ et $f(x) = 6x + \dfrac{1}{6}$;
   - $A(1\,;\,-7)$ et $f(x) = -\dfrac{3}{4}(x+2) - 5$;
   - $A\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\right)$ et $f(x) = \dfrac{1}{6}$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5}{2}x - 1$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
   (b) B est le point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée $-\dfrac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?
4. Dans un même repère, tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :
   - $f_1(x) = -\dfrac{1}{2}x + 5$;
   - $f_2(x) = 4x - 2$;
   - $f_3(x) = -3$;
   - $f_4(x) = \dfrac{3}{4}x - 4$.
5. Même question avec :
   - $f_1(x) = -5x + 10$;
   - $f_2(x) = \dfrac{3x-1}{6}$;
   - $f_3(x) = 6x - 14$;
   - $f_4(x) = \dfrac{-2x+1}{4}$.
6. Dans un même repère, tracer les droites suivantes :
   - $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3\,;\,1)$ et de coefficient directeur -1 ;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3\,;\,2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1\,;\,0)$ et de coefficient directeur 3 ;
   - $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0\,;\,2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
   - $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2\,;\,2)$ et de coefficient directeur 0 ;
7. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :
   - $A(1\,;\,2)$ et $B(3\,;\,-1)$;
   - $A(0\,;\,-1)$ et $B(2\,;\,3)$;
   - $A(1\,;\,3)$ et $B(1\,;\,4)$;
   - $A(4\,;\,4)$ et $B(-1\,;\,2)$;
   - $A(-2\,;\,2)$ et $B(3\,;\,2)$;
   - $A\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ et $B(3\,;\,5)$.
8. Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 1.1 de la présente page.

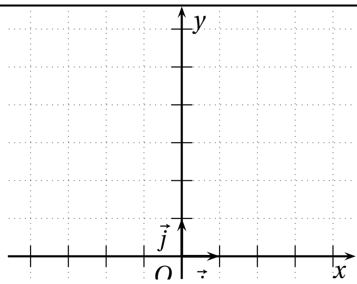
FIGURE 1.1 – Figure 1

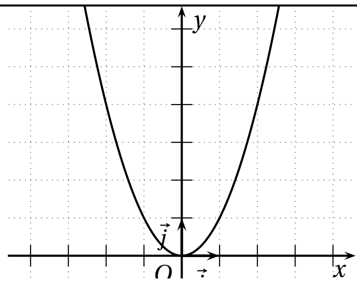


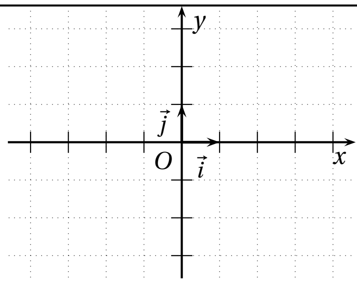
9. Même question pour les droites représentées sur la figure 1.2 page 4.

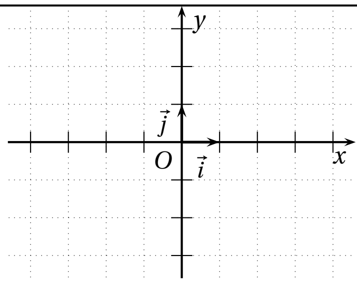
TABLE 1.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité 1.1.2

<table>
<tr><th>Fonction
Définie sur</th><th>Variations</th><th>Allure de la courbe représentative</th></tr>
<tr><td>Affine
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Carré
$f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) = x^2$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td><td>
Parabole</td></tr>
<tr><td>Cube
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Inverse
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Racine carrée
$f(x) =$

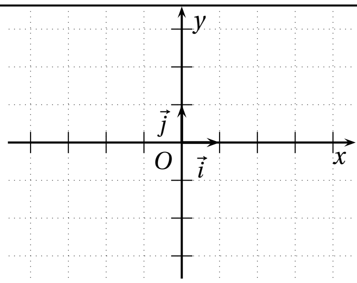
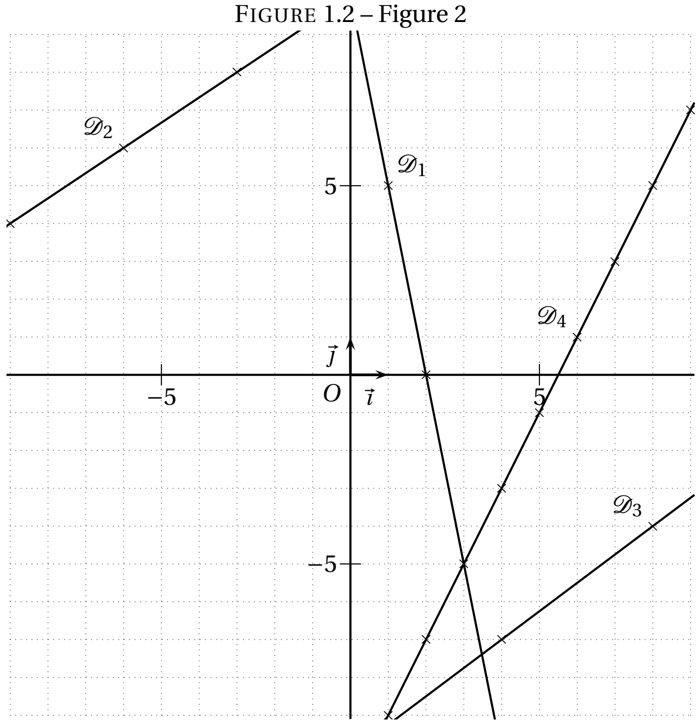
$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

FIGURE 1.2 – Figure 2



1.1.2 Autres fonctions usuelles

Compléter le tableau 1.1.2, page précédente, sur le modèle de la deuxième ligne.

1.1.3 Fonction trinôme

1. Une entreprise produit de la farine de blé.
   On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
   On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.
   (a) Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
   (b) Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
      i. tracer la courbe représentant le bénéfice ; quelle est sa nature ?
      ii. déterminer graphiquement puis par le calcul la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
      iii. déterminer graphiquement puis par le calcul la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.
2. Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisement on a : $x = 300 - 12p$.
   (a) Entre quelles valeurs peut varier le prix du billet ?
   (b) Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1 848 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
   (c) En déduire graphiquement puis par le calcul pour quelles valeurs de p la séance est rentable.
   (d) Déterminer graphiquement puis par le calcul le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

1.1.4 La continuité (approche graphique)

1. Voici quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$:
   - $f(x) = x^2$;
   - $g(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$;
   - $h(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 2 \\ 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$.
   - $l(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$;

   Représenter graphiquement ces fonctions et commenter les courbes obtenues.

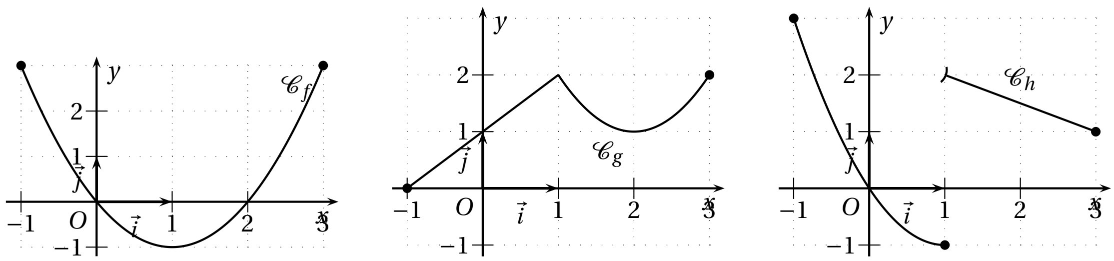
2. La fonction *partie entière* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe l'entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. On note E cette fonction.
   (a) Compléter le tableau ci-dessous :

x	$-1,2$	-1	$-0,5$	0	0,99	1	1,5	2
$E(x)$								

   (b) Représenter graphiquement E.

3. Les fonctions f, g et h représentées sur le figure 1.3 de la présente page par leurs courbes respectives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, sont définies sur $[-1;3]$.

FIGURE 1.3 – Trois courbes



   (a) Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1;3]$?
   (b) Si la fonction n'est pas continue sur $[-1;3]$, donner les intervalles sur lesquels elle est continue.

4. f est la fonction définie sur $[-2;5]$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in [-2;1[\\ f(x) = x+p & \text{si } x \in [1;5] \end{cases}$
   (a) Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $p = 2$;
   - $p = 1$;
   - $p = -2$.

   (b) f est-elle continue sur $[-2;1[$? Sur $[1;5]$?
   (c) Comment choisir p pour que f soit continue sur $[-2;5]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

5. f est la fonction définie sur $[-2;3]$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + bx + 3 & \text{si } x \in [-2;2] \\ f(x) = 2x+1 & \text{si } x \in]2;3] \end{cases}$
   (a) Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $b = 1$;
   - $b = -2$.

   (b) Comment choisir b pour que f soit continue sur $[-2;3]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

6. f est la fonction définie sur $[-3;2]$ par : $\begin{cases} f(x) = ax^2 + x + 2 & \text{si } x \in [-3;-1[\\ f(x) = x+1 & \text{si } x \in [-1;2] \end{cases}$
   (a) Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $a = 1$;
   - $a = 0$;
   - $a = -2$.

   (b) Comment choisir a pour que f soit continue sur $[-3;2]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

1.1.5 Composition de fonctions

Une entreprise raffine de la matière première puis vend le produit raffiné.
La fonction f qui donne le nombre de tonnes de produit raffiné en fonction du nombre de tonnes x de matière première est $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ pour $0 \leqslant x \leqslant 4$.
La fonction g qui donne le bénéfice de la vente (en milliers d'€) de X tonnes de produit raffiné est $g(X) = -X^2 + 5X - 4$.

1. Que représente la fonction $h(x) = g(f(x))$?
2. Déterminer h pour $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$.
3. (a) Déterminer l'expression de h en fonction de x.
   (b) Qu'aurait-on obtenu si g donnait le nombre de tonnes de produit raffiné et f le bénéfice ?
4. Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x + 2$ et soit h la fonction définie par $h(x) = f\left(g(x)\right)$.
   (a) Déterminer, s'ils existent, $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ et $h(5)$.
   (b) Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x.
   (c) Déterminer l'expression de $l(x) = g\left(f(x)\right)$. A-t-on $l = h$?
5. Mêmes questions qu'au 4 avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
6. Mêmes questions qu'au 4 avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.

1.2 Dérivation

1.2.1 Variations : Fonctions associées – Somme de fonctions

1. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{-4}{x+1}$.
   À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g et son ensemble de définition.
2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.
   Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.
   (b) Placer les points trouvés aux questions précédentes dans un repère approprié et tracer soigneusement $\mathscr{C}$.

1.2.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Compléter le tableau 1.2 de la présente page.

TABLE 1.2 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	définie sur	Fonction dérivée f'	définie sur
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) =$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$	$f'(x) =$	

1.2.3 Opérations algébriques et dérivation

Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I. Compléter le tableau 1.3 de la présente page.

TABLE 1.3 – Opérations sur les fonctions dérivées

Fonction	Fonction dérivée
ku avec $k \in \mathbb{R}$	
$u + v$	
$u \times v$	
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	
$\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	

1.2.4 Fonction rationnelle – Tangentes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -3.

1.2.5 Tableau de variations

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4,5$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=-2$
   - admet une seule solution
   - admet deux solutions
   - admet quatre solutions.

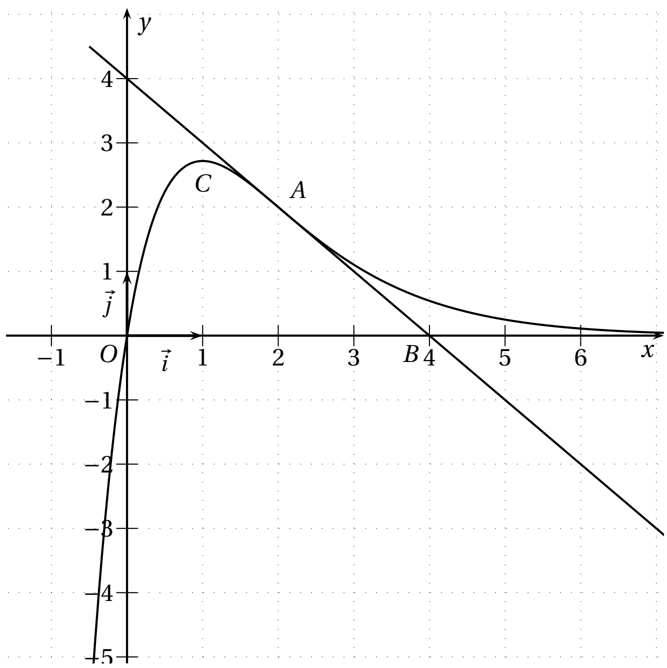
2. On sait que $f'(2)=0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   - $y=4$
   - $y=4(x-2)$
   - $x=4$.

3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\,;2)$ est $y=3x-1$.
   On a :
   - $f(2)=1$
   - $f'(1)=-1$
   - $f'(1)=3$.

4. Sur l'intervalle $[-1\,;0]$, la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$
   - est croissante
   - est décroissante
   - n'est pas monotone.

1.2.6 Lectures graphiques

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(2\,;2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



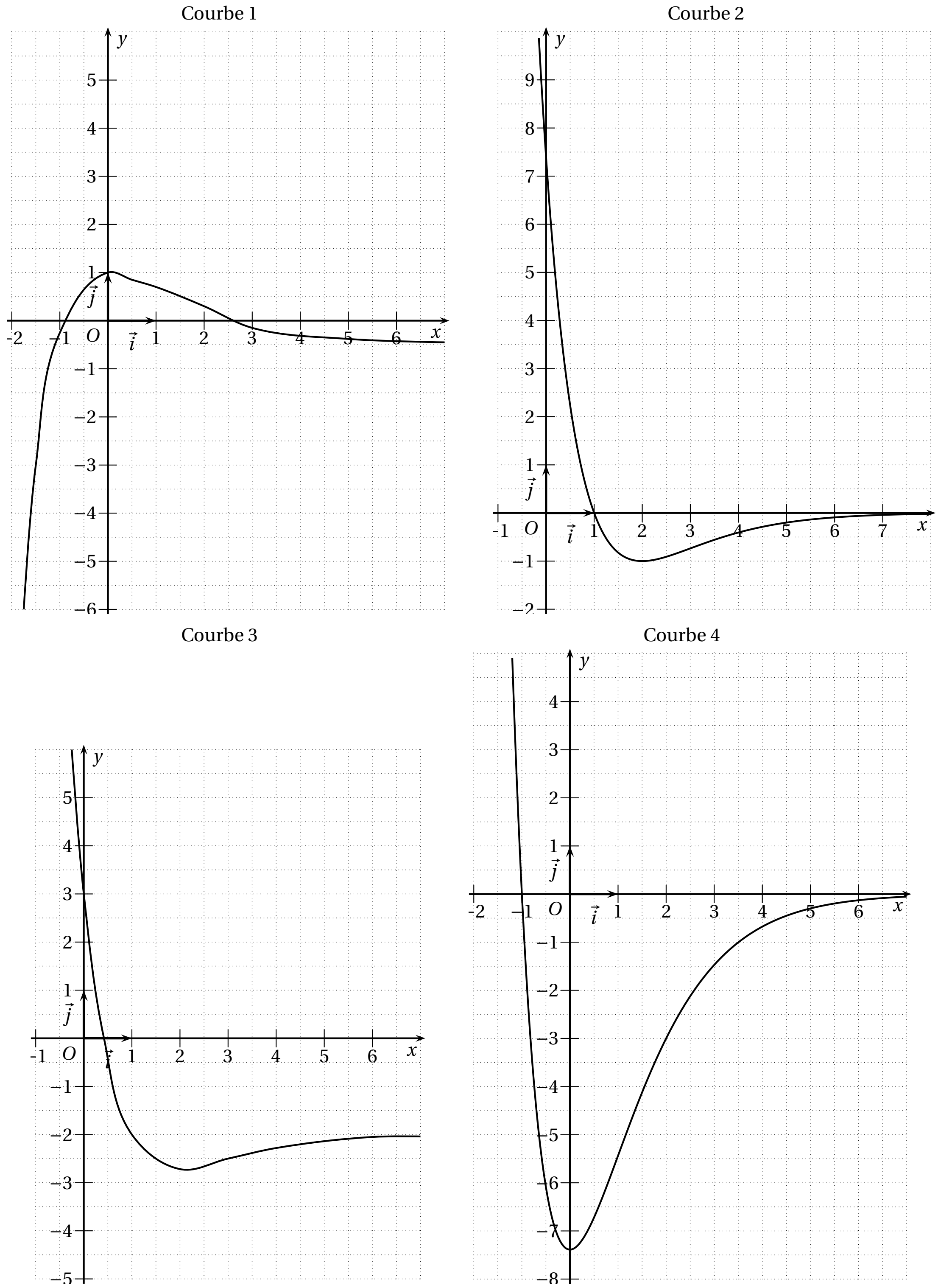
1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.

2. Une des représentations graphiques page ci-contre, figure 1.4, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.

3. Une des représentations graphiques page suivante, figure 1.4, représente une fonction h telle que $h'=g$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

FIGURE 1.4 – Courbes de l'activité 1.2.6



1.2.7 Lectures graphiques (bis)

On a représenté de la présente page la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$;
   - $f(x) \leq 2$;
   - $f(x) \geq 3$;
   - $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques 1.6 de la présente page, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à Ia fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

FIGURE 1.5 – Courbe de l'activité 1.2.7

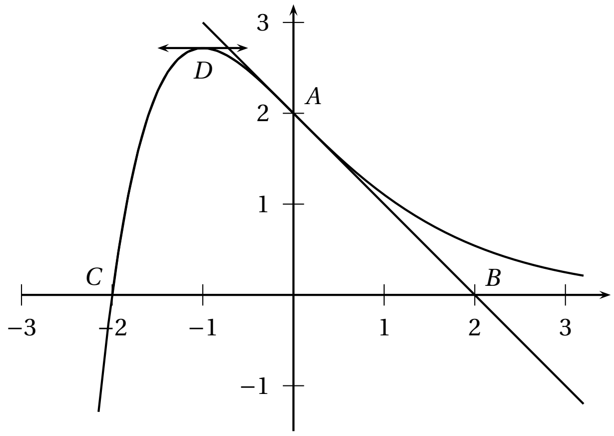
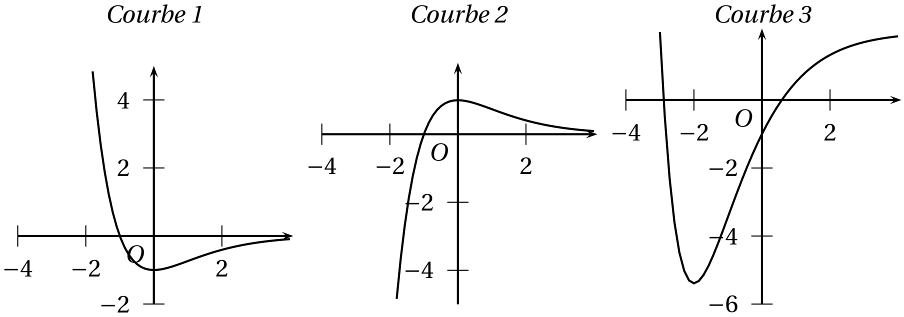


FIGURE 1.6 – Courbes de l'activité 1.2.7



1.2.8 Fonction dérivée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau des variations de f.
3. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -1.
   (d) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
5. (a) Dans un repère orthogonal placer les points et représenter les tangentes rencontrés dans les questions précédentes. (*unités graphiques 1 cm = 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm = 2 unités sur l'axe des ordonnées*)
   (b) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

1.2.9 Fonction dérivée (bis)

f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-11x+28}{x-3}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
   (d) Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 4 et T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la droite T.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-3}$ pour tout réel $x \neq 3$.
3. Dans un repère :
   (a) placer les points correspondant aux extremums locaux de f et A ;
   (b) tracer T et les tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$;
   (c) tracer $\mathscr{C}$.

1.2.10 Dérivée et composition

1. On donne dans le tableau ci-dessous pour plusieurs fonctions f données, la dérivée de $f(x)$ et la dérivée de $f(g(x))$ où g est une fonction définie, dérivable et telle que la composée de f et de g est aussi définie et dérivable.

$f(x)$	$f'(x)$	$(f(g(x))'$
$mx+p$	m	$m\times g'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n(g(x))^{n-1}\times g'(x)$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{-n}{(g(x))^{n+1}}\times g'(x)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\times g'(x)$

   Conjecturer la formule générale qui donne la dérivée de la fonction $f(g(x))$.
2. Appliquer cette formule pour $f(x) = x^5$ et :
   - $g(x) = 2x-4$;
   - $g(x) = x^2+3x-4$.
3. Appliquer la formule pour déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, où u est une fonction dérivable et strictement positive, à l'aide de la formule générale obtenue en 1 :
   - u^n ;
   - $\frac{1}{u}$;
   - $\sqrt{u}$.
4. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes à l'aide des formules obtenues en 3 :
   - $f(x) = (3x^2+2x+7)^5$;
   - $g(x) = \frac{1}{x^3+2x+1}$;
   - $h(x) = \sqrt{x^2+x+4}$;
   - $l(x) = \sqrt{(x+1)^5}$.
5. On pose $h(x) = f(g(x))$ pour tout réel x. Recopier et compléter les inégalités suivantes dans chacun des cas suivants :
   (a) en supposant que f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$;
   (b) en supposant que f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;
   (c) en supposant que l'une est croissante et l'autre décroissante sur $\mathbb{R}$.

   Soient a et b tels que $a<b$
   alors $g(a)\ldots\ldots g(b)$ car $g\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   et $f(g(a))\ldots\ldots f(g(b))$ car $f\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   finalement $h(a)\ldots\ldots h(b)$
   La fonction h est donc $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$

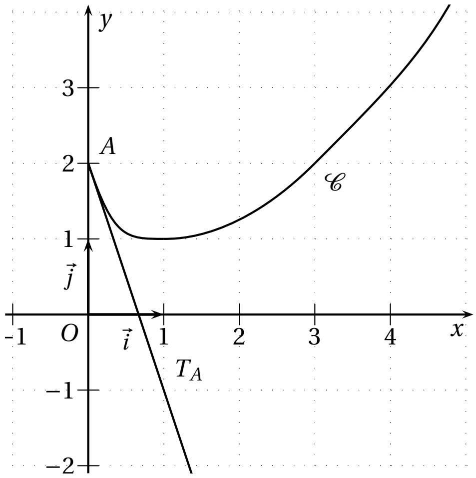
   Conjecturer alors le sens de variation de la fonction h en fonction des sens de variations de f et de g.
6. Soient f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x+1$ et $h(x) = -x+2$ et l la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.
   En utilisant la propriété obtenue en 5, déterminer le sens de variation des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto f(g(x))$;
- $x \longmapsto g(f(x))$;
- $x \longmapsto f(h(x))$;
- $x \longmapsto g(h(x))$;
- $x \longmapsto h(g(x))$;
- $x \longmapsto h(l(x))$.

1.2.11 Fonctions composées, sujet d'annales

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 1.7 de la présente page représente une fonction f définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On note f' la fonction dérivée de f.
La droite T_A est la tangente au point A d'abscisse 0. La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.
Enfin, la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.

FIGURE 1.7 – Courbe de l'activité 1.2.11



1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes.
   (a) Compléter le tableau :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

   (b) Donner le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.
2. On considère la fonction g inverse de la fonction f, c'est-à-dire $g = \frac{1}{f}$. On note g', la fonction dérivée de g.
   (a) Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.
   (b) Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$? Justifier la réponse donnée.
   (c) Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.
   (d) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g.
   Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonromal (unité : 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

1.3 Limites

1.3.1 Limites des fonctions usuelles (rappels)

Compléter le tableau 1.4 de la présente page.

TABLE 1.4 – Tableau du 1.3.1

f	D_f	Limites
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	Si $m>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ Si $m<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ Si $m=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=\ldots\ldots$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=\ldots\ldots$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\ldots\ldots$

1.3.2 Opérations sur les limites (rappels)

Compléter les tableaux 1.5, 1.6, 1.7 et 1.8 de la présente page en indiquant dans chaque case, lorsqu'on peut conclure, respectivement, les valeurs de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[f(x)+g(x)\right]$, de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[f(x)\times g(x)\right]$, de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ et de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ (l et l' sont des réels).

TABLE 1.5 – Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l			
$+\infty$			
$-\infty$			

TABLE 1.6 – Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$			
$l=0$			
$\pm\infty$			

TABLE 1.7 – Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$	$l\neq0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$					

TABLE 1.8 – Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$			
$l=0$			
$\pm\infty$			

1.3.3 Détermination de limites (rappels)

Déterminer les limites suivantes et indiquer les asymptotes que l'on peut en déduire :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\dfrac{-6}{x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

1.3.4 Limites, asymptotes et lectures graphiques (rappels)

On donne, sur les figures 1.8 et 1.9 page suivante, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.

Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition ;
3. indiquer les asymptotes à chacune des courbes.

1.3.5 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles (rappels)

1. Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x\right)$
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x\right)$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
   (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
2. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{-x+1}{x+3}$.
   On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
   (a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
   (b) Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
   (c) Étudier les variations de f.
   (d) Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$.
   On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx}{x^2+1}$
   (b) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
   (d) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
4. Soit f la fonction qui a x associe $f(x)=\dfrac{1-2x}{-x^2+2x+3}$.
   (a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (c) En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

FIGURE 1.8 – Lectures graphiques : premier cas

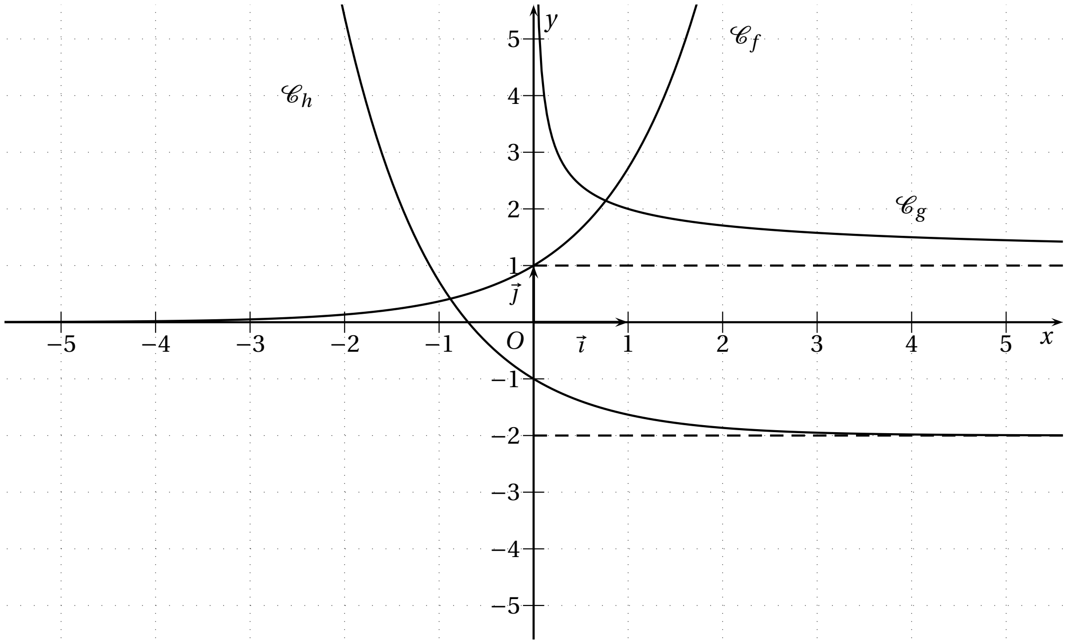
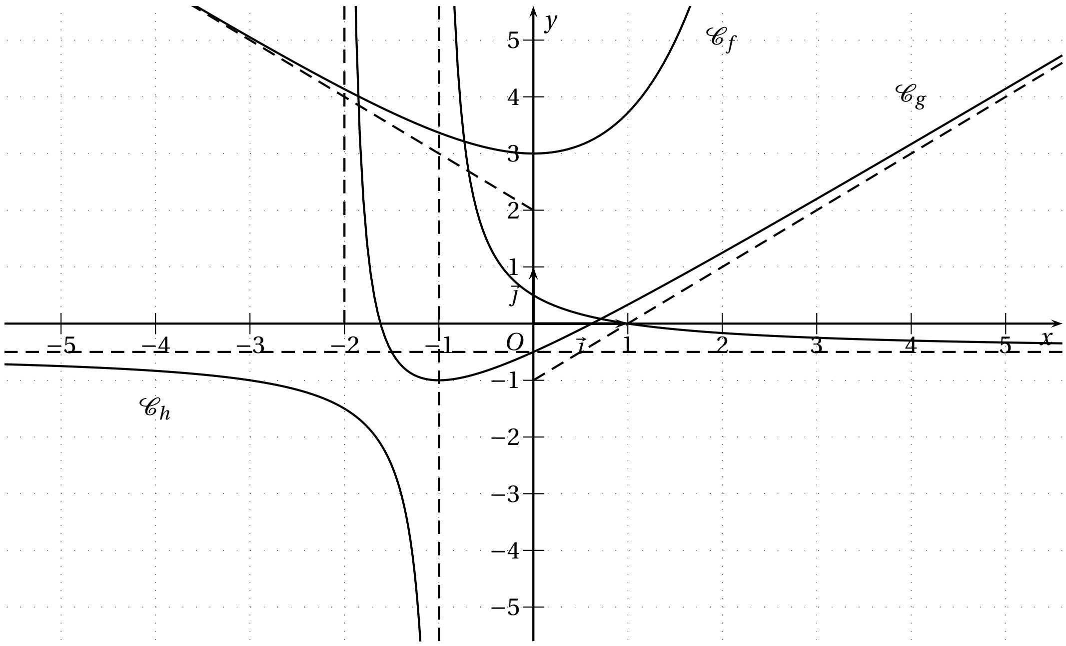


FIGURE 1.9 – Lectures graphiques : second cas (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties)



1.3.6 Limites de fonctions composées : lectures graphiques

Les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_u$ de la figure 1.10 page suivante représentent respectivement la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et une fonction u définie sur $]4\,;+\infty[$.

On considère la fonction composée $f = u \circ g$ définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;2\right[\cup]3\,;+\infty[$.

1. Déterminer graphiquement $f(1)$, $f(3{,}5)$ et $f(10)$
2. Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} u(X)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} g(x)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$?
4. Déterminer $a = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} g(x)$ et $\lim\limits_{X\to a} u(X)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$?
5. Déterminer de la même manière la dernière limite aux bornes de son ensemble de définition de f.

1.3.7 Limites de fonctions composées : calculs

On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

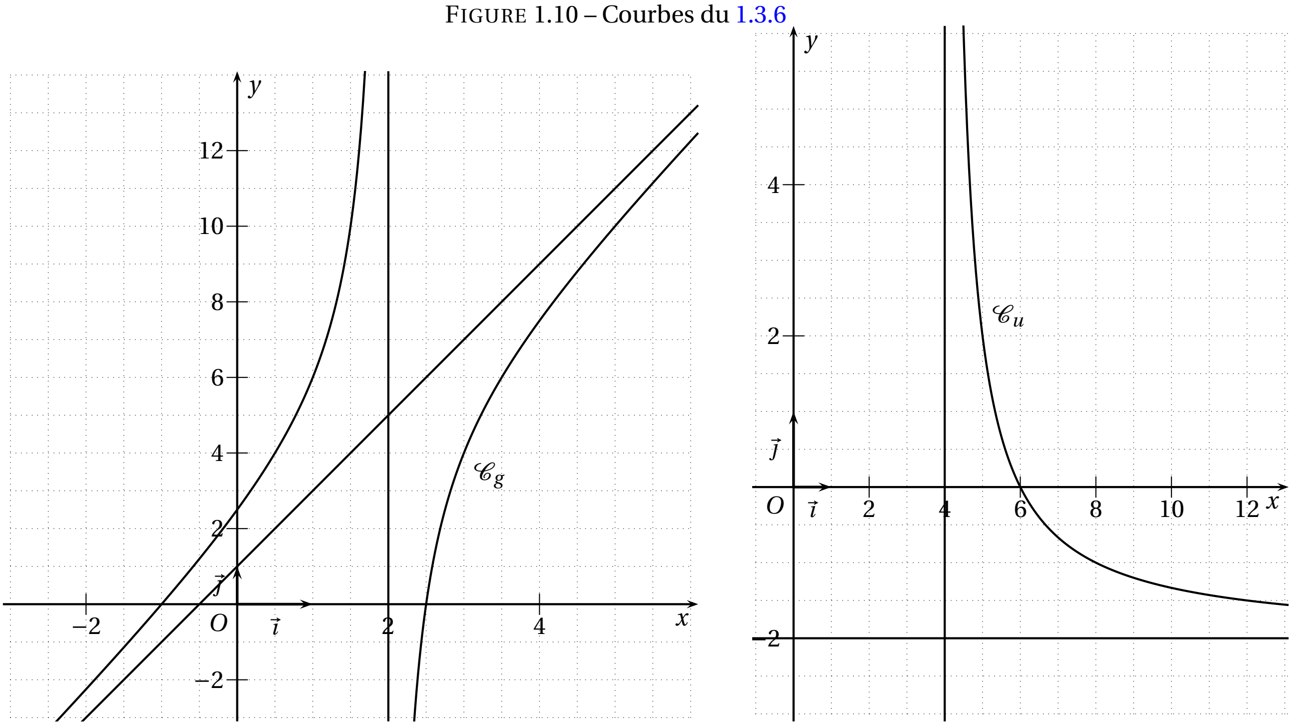
1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} g\circ f(x)$.
3. Déterminer l'expression de $g\circ f$ et retrouver les limites de $g\circ f$ en $+\infty$ et $-\dfrac{1}{2}$

1.3.8 Inégalités et limites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{9x^2+1}-2x$.

1. Montrer que $\sqrt{9x^2+1} \geq 3x$.
2. En déduire que $f(x) \geq x$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

FIGURE 1.10 – Courbes du 1.3.6



1.4 Bilan et compléments

1.4.1 Fonction continue

En terminale ES on ne vous demandera pas de démontrer qu'une fonction est continue et l'appréhension graphique de la notion est suffisante. Ainsi une fonction est dite continue si sa courbe représentative ne présente aucun saut, aucun trou, aucune asymptote verticale. Cependant la continuité est définie précisément en mathématiques de la façon suivante :

Définition 1.1. Une fonction f est dite continue en un réel a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarques. Cette définition implique que :

- il est nécessaire que $f(x)$ soit définie en a pour être éventuellement continue ;
- il faut en plus que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ pour qu'elle y soit continue.

Définition 1.2. Une fonction f est dite continue sur un intervalle I si, pour tout réel $a \in I$, f est continue en a.

Propriété 1.1. *Les fonctions affines, carrée, cube, racine, polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
Les fonctions inverses et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition, c'est-à-dire en tout point où leur dénominateur ne s'annule pas.

On l'admettra.

Valeurs intermédiaires

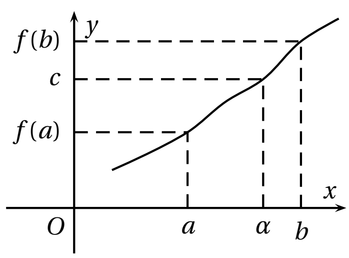
Propriété 1.2 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution $\alpha \in [a\,;\,b]$.*

Théorème 1.3 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution $\alpha \in [a\,;\,b]$.*

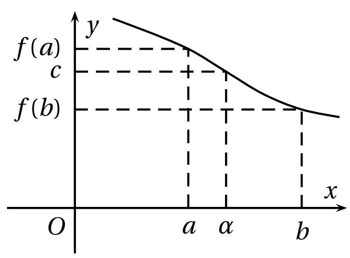
On l'admettra.

Exemples 1.1. La figure 1.11 de la présente page présente quatre cas typiques.

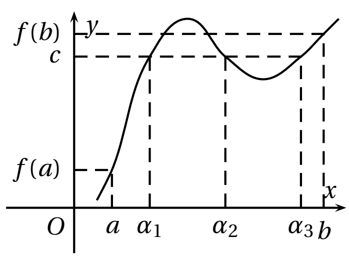
FIGURE 1.11 – Quatre schémas illustrant propriété et théorème des valeurs intermédiaires



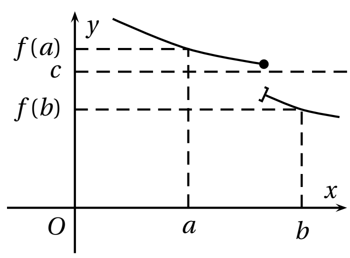
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ peut avoir plusieurs solutions.



f n'est pas continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solution.

Tableau de variation

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation signifie que sur l'intervalle considéré la fonction est continue et strictement croissante. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (voir l'activité 1.2.5 page 8).

1.4.2 Inégalités et limites

Propriété 1.4. *Soient f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I et soient α et β pouvant être des réels ou $\pm\infty$.*
- *Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.*
- *Si $f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.*
- *Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = \beta$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$.*

On l'admettra.

Remarque. La dernière propriété est parfois appelée « le théorème des gendarmes ».

1.4.3 Fonctions composées

Définition 1.3. Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.
On appelle fonction composée de f et de g la fonction h définie pour tout $x \in D_f$ par $h(x) = g\big(f(x)\big)$.
On notera parfois $h = g \circ f$.

Propriété 1.5. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.*
Si f et g sont dérivables alors la fonction $h = g \circ f$ est dérivable et $h'(x) = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$.

On l'admettra.

Exemples 1.2. On démontre facilement les formules suivantes (qui sont plus faciles à appliquer que celle de la propriété) :
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété 1.6. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.*
Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{X \to \beta} g(X) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g\big(f(x)\big) = \gamma$ où α, β et γ peuvent être des réels ou $\pm\infty$.

On l'admettra.

1.5 Exercices

Exercice 1.1.

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 24$.

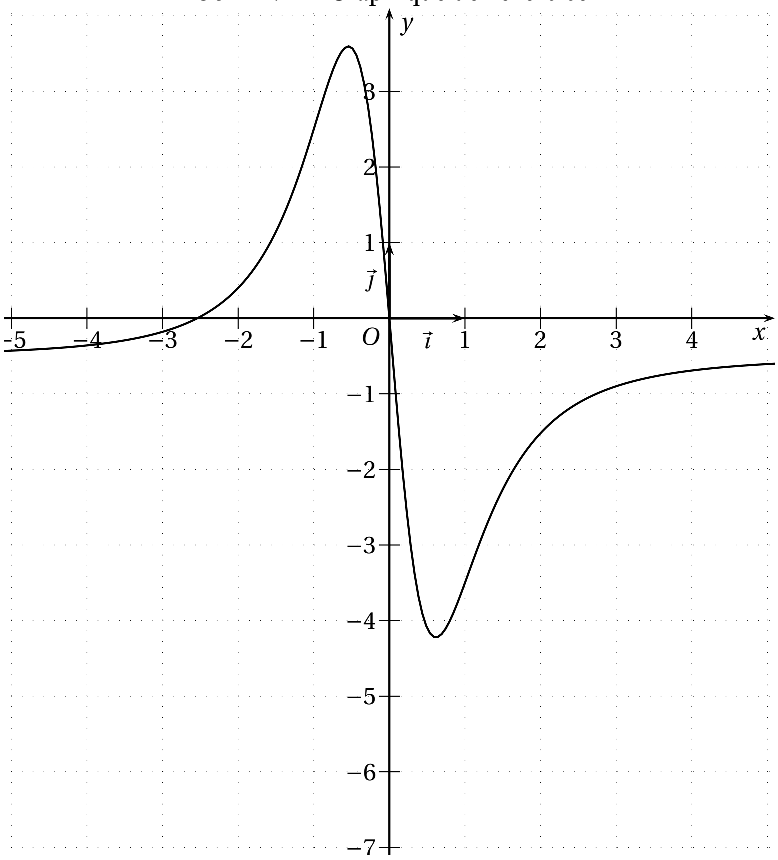
1. Étudier la fonction g (limites aux bornes et variations).
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(x) = 0$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B. Étude de la fonction f.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^3 - 8x^2 + 4}{2x^2 + 2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-2x \times g(x)}{\left(2x^2 + 2\right)^2}$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f.
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -\frac{x}{2} - 4$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.
5. Donner les équations des tangentes $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectviement aux points d'abscisses 1 et -1.
6. Le courbe Γ représentative de la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Représenter les droites Δ, $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ puis $\mathscr{C}_f$.

FIGURE 1.12 – Graphique de l'exercice 1



Exercice 1.2 (D'après Liban 2005).

Le tableau d'informations n°1 ci-dessous fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

TABLE 1.9 – Tableau d'informations n°**1**.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $u(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $u'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	

1. Établir un tableau des variations de la fonction u.
2. On considère maintenant les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ et $g(x) = (u(x))^3$ où u désigne la fonction de la question précédente.
   (a) Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :
   Affirmation 1 : « La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ » ;
   Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ ».
   (b) Donner les variations des fonctions f et g. Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).
   (c) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$.
   (d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u'.

TABLE 1.10 – Tableau d'informations n°**2**.

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$u(x)$	4	-2	$-\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	-5	1	0	3	5

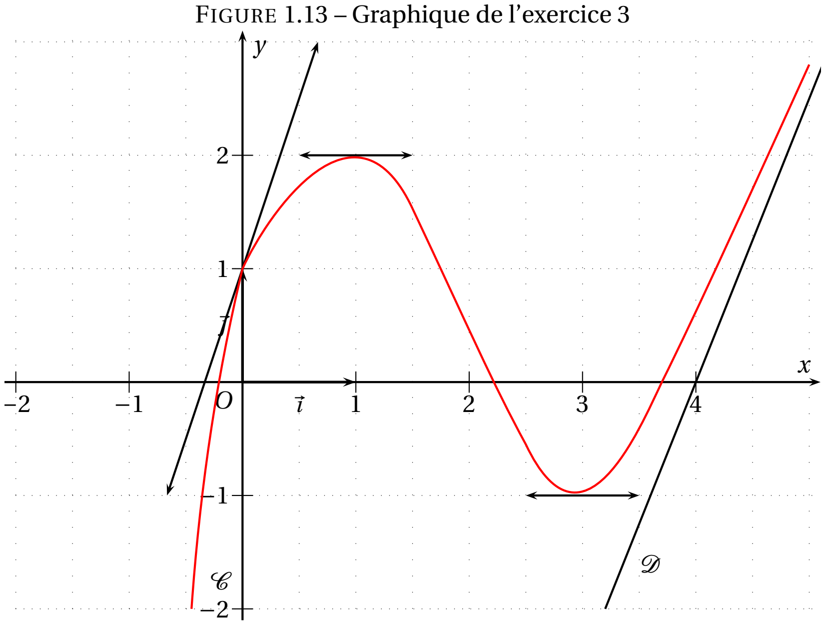
Terminer chacune des deux phrases **a.** et **b.** par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres ci-dessous, en justifiant votre choix.

(a) La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :
- à l'axe des abscisses
- à la droite d'équation $y = x$
- à la droite d'équation $y = 3x$

(b) Le nombre $f'(-2)$:
- n'existe pas
- vaut -20
- vaut $-\dfrac{4}{5}$
- vaut $-\dfrac{5}{4}$
- vaut $\dfrac{5}{4}$

Exercice 1.3 (D'après Liban 2006).
La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. On sait que la fonction f est croissante sur $]-1\,;1]$ et sur $[3\,;+\infty[$ et que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

FIGURE 1.13 – Graphique de l'exercice 3



I. Étude graphique de la fonction *f*

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point ; une mauvaise réponse retire* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point.*

1. Une asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation :
   - $y=-1$
   - $x=1$
   - $x=-1$
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation :
   - $y=\dfrac{5}{2}x-10$
   - $y=\dfrac{5}{2}x-9$
   - $y=3x-10$
3. Le nombre dérivé de f en 0 est :
   - 1
   - 3
   - -3
4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $]-1\,;+\infty[$ est :
   - 2
   - 1
   - 3

II. Étude d'une fonction *g*

On note g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

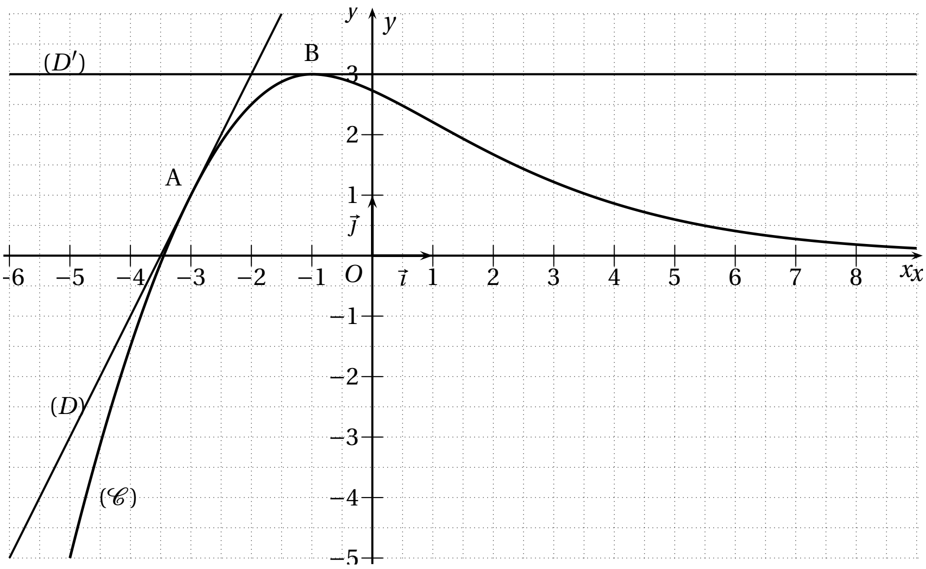
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$.
2. Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.
3. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, l'ensemble des solutions sur $]-1\,;\,+\infty[$ de l'inéquation $g(x)\leqslant 1$.

Exercice 1.4 (D'après Nouvelle Calédonie mars 2007).

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$			3		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				0

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points A$(-3$ $1)$ et B$(-1\,;3)$ et son intersection avec l'axe des abscisses a pour abscisse α. Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.



1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(f(x)\right)^3$.
   On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier que f et g ont les mêmes variations.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (on justifiera les résultats).
   (c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   On admet que h est dérivable sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$.
   (a) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition (on justifiera le résultat).
   (b) Calculer $h'(-3)$.

Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions – Dérivation – Graphes

Les figures sont données en annexe. Le barème n'est qu'indicatif.

Exercice 1.1 (9 points).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.
On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Montrer que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x+2+\dfrac{4}{x-1}$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Dresser le tableau de variations de f en indiquant les extremums locaux.
3. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Dans le repère de la figure 1.2 page 25 :
   (a) placer les points de $\mathscr{C}$ correspondant aux extremums locaux ;
   (b) placer les éventuelles intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ;
   (c) tracer les tangentes de la question 4 ;
   (d) tracer la courbe $\mathscr{C}$

Exercice 1.2 (5 points).

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 1.5 page 27 est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $I =]-\infty ; 2[$. On note f' sa fonction dérivée.
La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{3}{4}$ et l'axe des ordonnées au point $B(0 ; -1)$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptotes les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives $y = -1$ et $x = 2$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(-2 ; -2)$ est parallèle à l'axe des abscisses.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est (BD).
A l'aide de ces informations et en précisant les arguments graphiques répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f(-2)$, $f(0)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.
4. On pose $g(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $h(x) = g\big(f(x)\big)$.
   (a) Pour quelle(s) valeur(s) de x, $h(x)$ n'est-il pas défini ? Justifier.
   (b) Déterminer $h(-2)$ et $h(0)$.

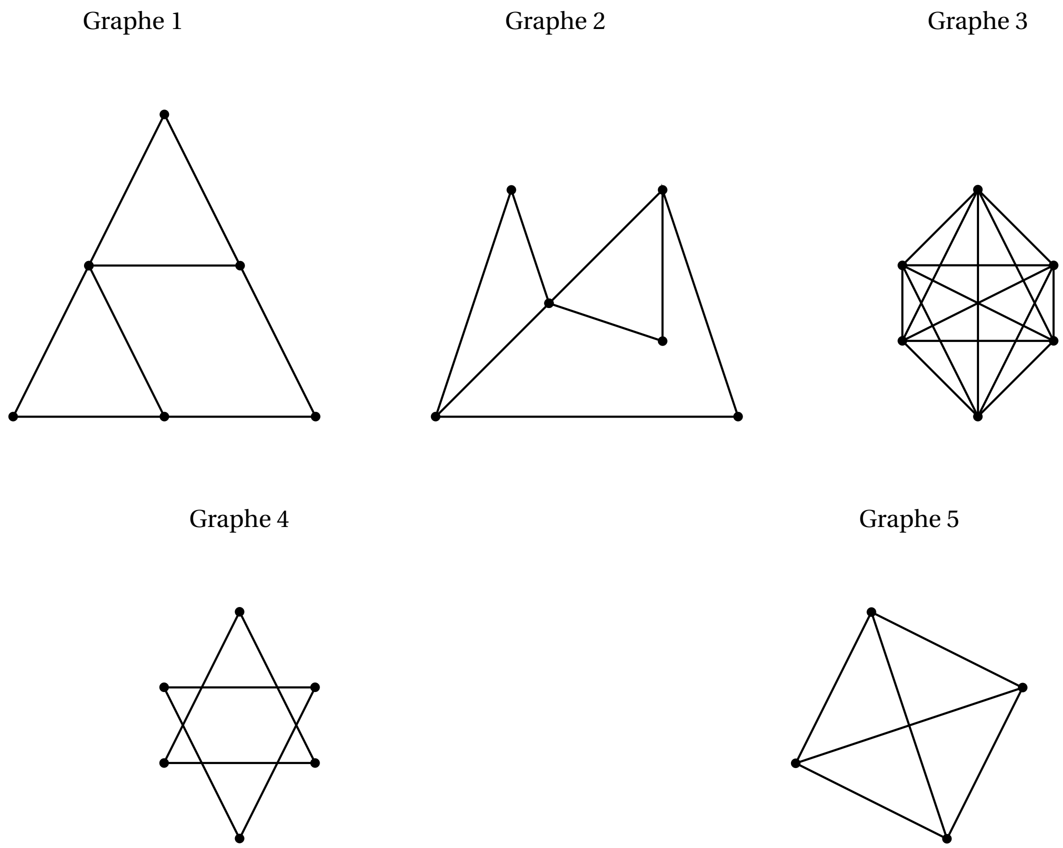
Exercice 1.3 (4 points).

*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée sur la figure 1.3 page 26.
L'une des courbes de la figure 1.4 page 26 est la courbe représentative de f', la fonction dérivée de f, une autre est la courbe représentative d'une fonction g telle que $g' = f$.
Déterminer quelles courbes peuvent convenir pour f' et pour g.
On justifiera ses réponses par des arguments graphiques.

Exercice 1.4 (4 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*

1. La figure 1.1 de la présente page propose cinq graphes.

FIGURE 1.1 – Graphes de l'exercice 1.4



   (a) Déterminer ceux qui sont suceptibles de décrire une même situation en justifiant.
   (b) Indiquer ceux qui sont complets en justifiant.
   (c) Indiquer ceux qui sont connexes en justifiant et, pour ces graphes connexes, indiquer leur diamètre sans justifier.
2. Dans un groupe de six enfants est-il possible que :
   (a) cinq d'entre eux aient exactement 3 amis et le dernier exactement 2 amis (justifier) ?
   (b) l'un d'eux ait exactement 4 amis, un autre ait exactement 3 amis, trois autres aient exactement 2 amis et le dernier exactement 1 ami (justifier) ?
   (c) l'un d'eux ait exactement 6 amis, deux autres aient exactement 3 amis, un autre ait exactement 2 amis et les deux derniers exactement 1 ami (justifier) ?

Exercice 1.5 (2 points).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2-2x-2 & \text{si } x<1 \\ mx+2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ On appelle $\mathscr{C}_m$ sa représentation graphique.

1. Dans le repère de la figure 1.6 page 27 tracer en bleu $\mathscr{C}_1$ et en vert $\mathscr{C}_{-2}$ (c'est-à-dire les représentations de f pour $m=1$ et $m=-2$).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est continue.
3. *Question bonus (à ne traiter qu'une fois tout le reste terminé)* : Déterminer m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Tracer alors sa représentation en rouge.

Annexes

FIGURE 1.2 – Repère de l'exercice 1.1

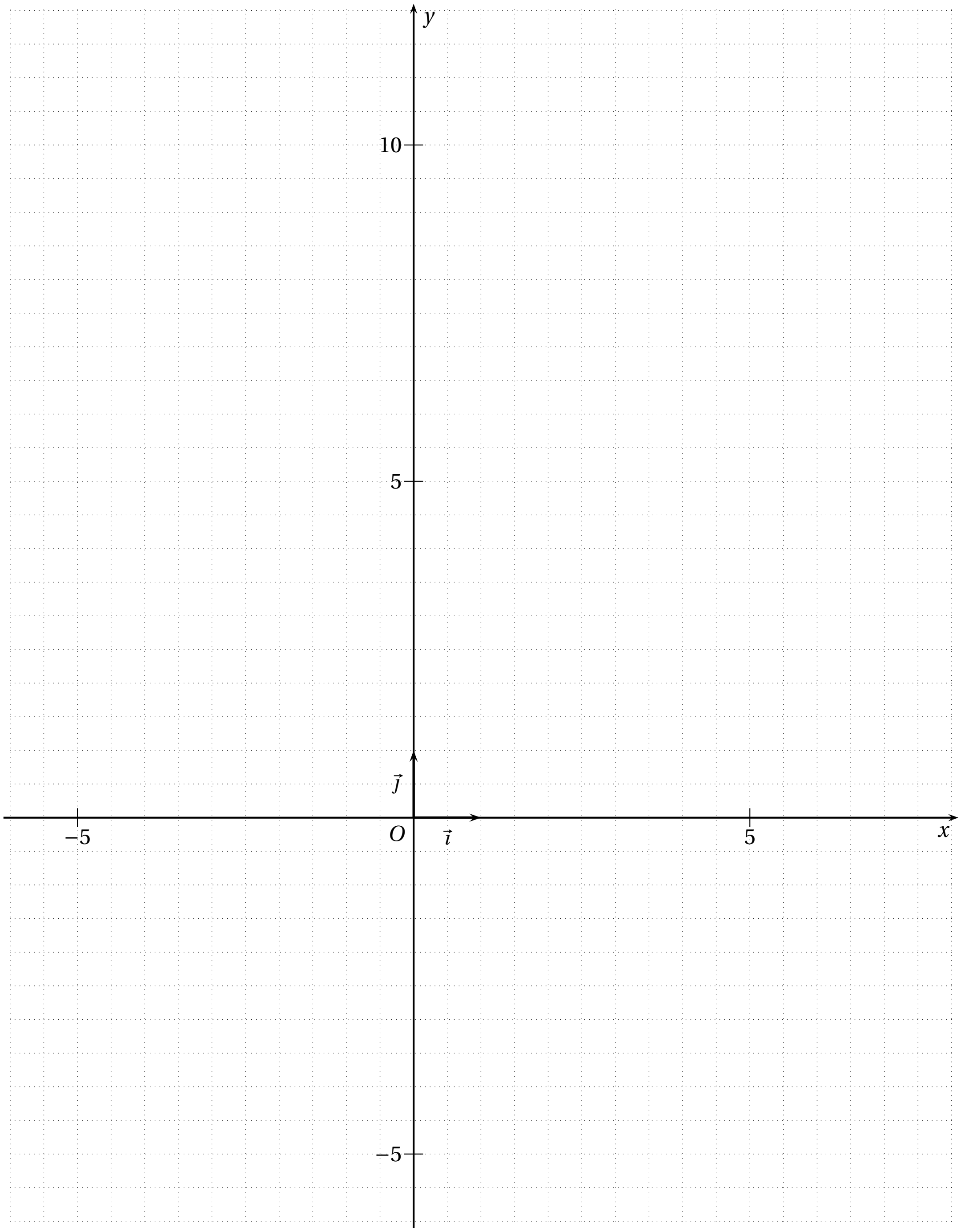


FIGURE 1.3 – Courbe $\mathscr{C}$ de l'exercice 1.3

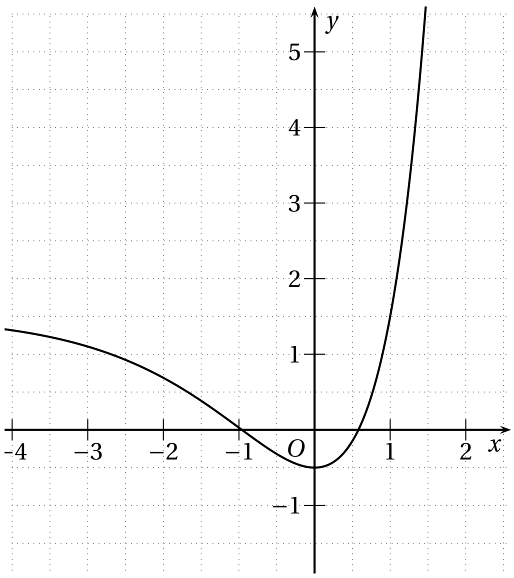


FIGURE 1.4 – Les trois courbes possibles de l'exercice 1.3

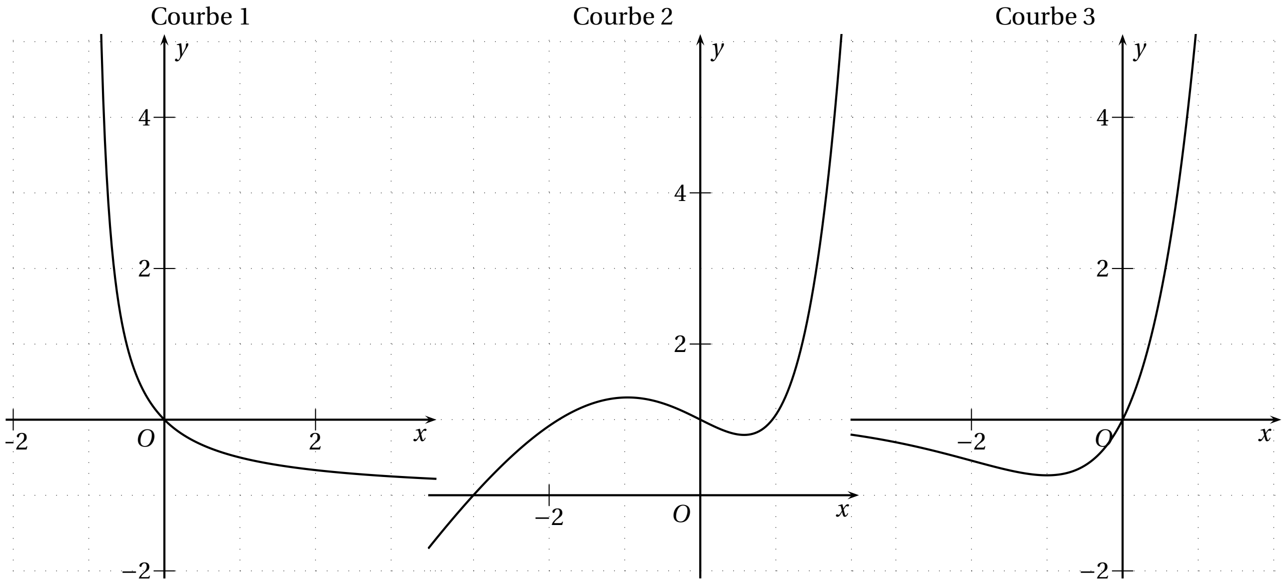


FIGURE 1.5 – Figure de l'exercice 1.2

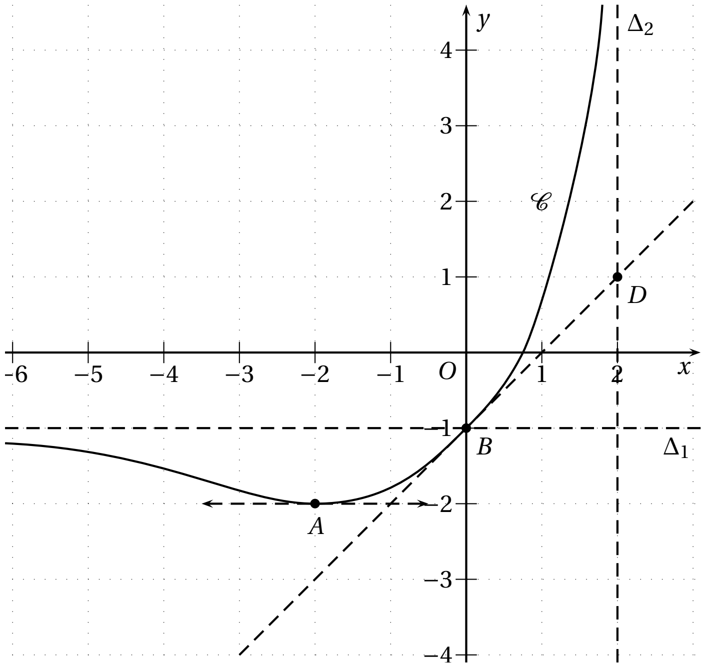
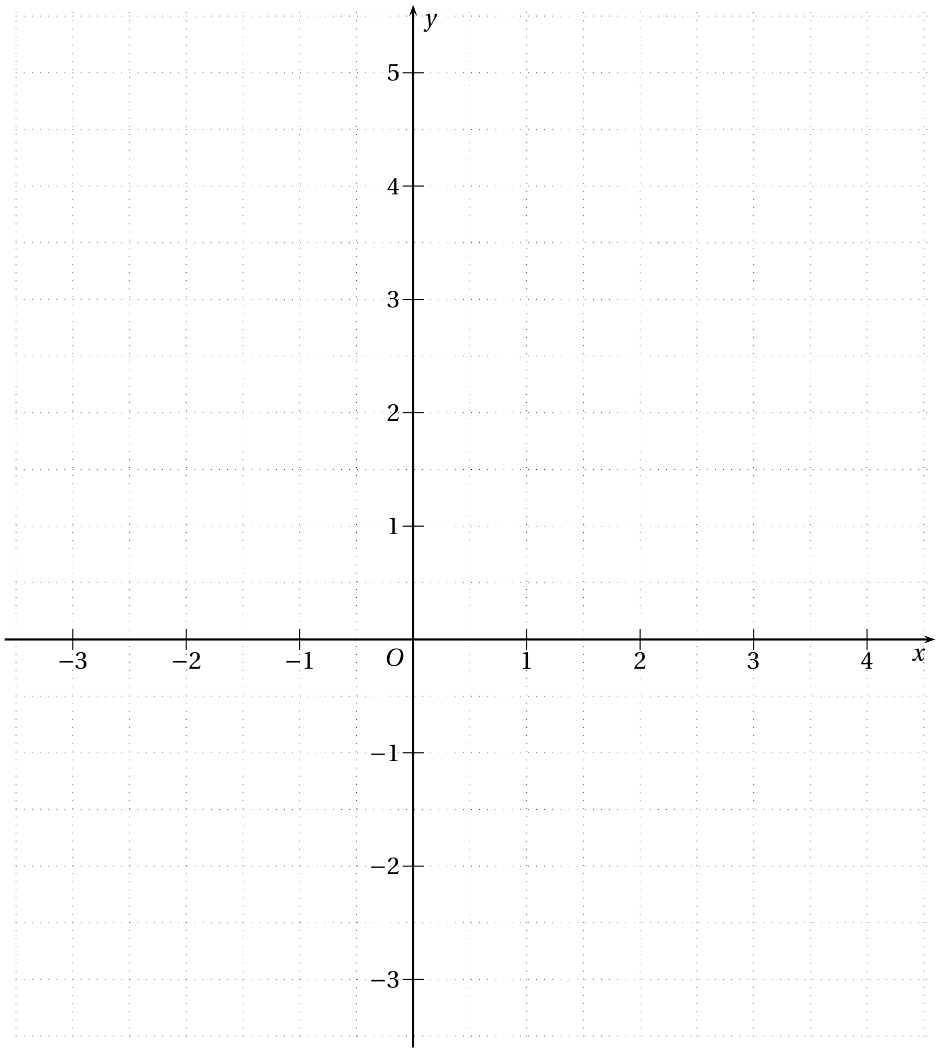


FIGURE 1.6 – Repère de l'exercice 1.5



Devoir surveillé n°2 – TES1

Généralités sur les fonctions – Limites – Graphes eulériens

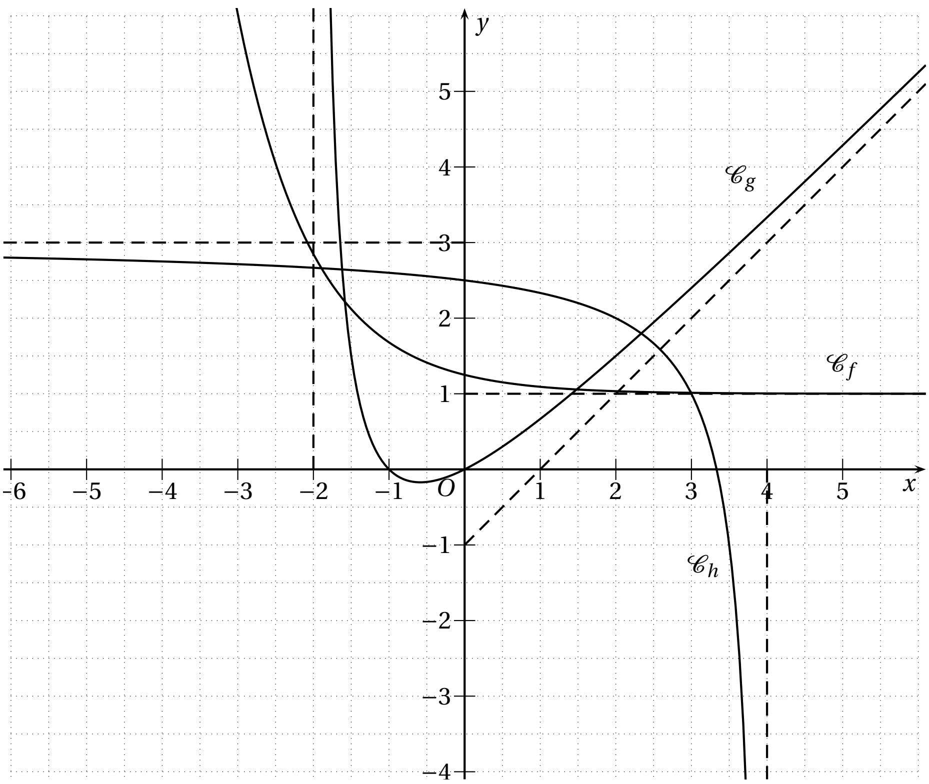
Exercice 2.1 (4,5 points).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (2x^3 + x + 1)^5$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
- $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^4}$

Exercice 2.2 (4,5 points).
La figure 2.1 page 33 présente les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h.

1. Déterminer graphiquement D_f, D_g et D_h, les ensembles de définition respectifs de f, g et h.
2. Déterminer graphiquement les limites aux bornes de leurs ensembles de définition de ces trois fonctions.
3. Indiquer les éventuelles asymptotes à ces trois courbes (*on en précisera le type et l'équation*).

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.2



Exercice 2.3 (7 points).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x+1}$$

On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x+1}$ pour tout réel $x \neq -1$.
2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En déduire des éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
3. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$ pour tout réel $x \neq -1$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
4. Dresser le tableau des variations de f en faisant apparaître le signe de la dérivée, en indiquant les extremums locaux et les limites aux bornes de son ensemble de définition.
5. En utilisant l'expression de $f(x)$ la plus adaptée, montrer que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 3$.

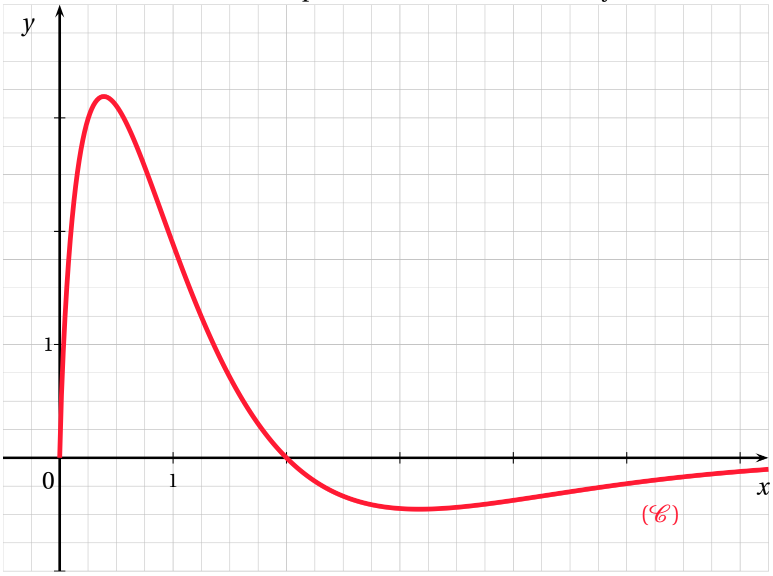
Exercice 2.4 (4 points).

Pour les élèves **ne suivant pas l'enseignement de spécialité**.

La courbe $(\mathscr{C})$ de la figure 2.2 page 34 est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$. On sait que :

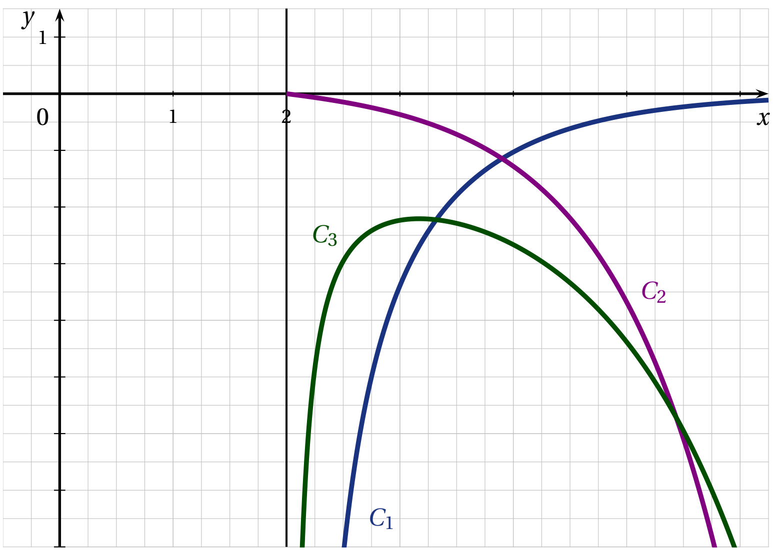
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(2\,;\,0)$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote l'axe des abscisses.

FIGURE 2.2 – Courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f de l'exercice 2.4



1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$? Justifier.
3. On définit une fonction g sur $J =]2;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
   À l'aide des informations de l'énoncé, du graphique ou des réponses aux question précédentes :
   (a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.
   (c) En déduire laquelle des trois courbes de la figure 2.3 page 34 est la représentation graphique de la fonction g.

FIGURE 2.3 – Courbes de la question 3c de l'exercice 2.4



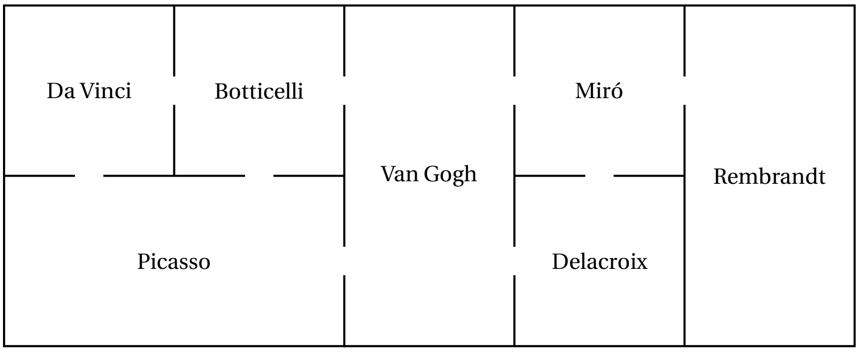
Exercice 2.5 (4 points).

Pour les élèves **suivant l'enseignement de spécialité**.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On construit un musée dont les pièces sont disposées comme indiqué sur la figure 2.4 de la présente page (les entrées et sorties du musée ne sont pas crées).
   (a) Montrer qu'il est impossible d'organiser un parcours dans ce musée qui emprunterait une et une seule fois chaque passage entre deux salles.
   (b) Quel passage doit-on condamner, ou quel passage doit-on créer pour qu'un tel trajet soit possible ? Dans quelle(s) pièce(s) doit-on alors créer l'entrée et la sortie du musée ?

FIGURE 2.4 – Figure de la question 1 de l'exercice 2.5



2. On donne la matrice d'adjacence M d'un graphe G et quelques unes de ses puissances. Répondre aux questions suivantes, en justifiant vos réponses soigneusement uniquement à l'aide des matrices données.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 9 & 4 & 13 & 8 & 8 \\ 9 & 23 & 9 & 15 & 4 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 7 & 7 & 3 \\ 4 & 15 & 8 & 15 & 2 & 6 & 2 \\ 13 & 4 & 7 & 2 & 11 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

   (a) Quel est l'ordre du graphe G ?
   (b) Ce graphe est-il orienté ?
   (c) Quel est l'ordre du sommet 3 ?
   (d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Une chaîne eulérienne ?
   (e) Quelle est la distance entre le sommet 2 et le sommet 7 ?
   (f) Quel est le diamètre de G ?
   (g) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 qui partent du sommet 6 et qui y reviennent ?

Devoir surveillé n°2 – TES3

Généralités sur les fonctions – Limites

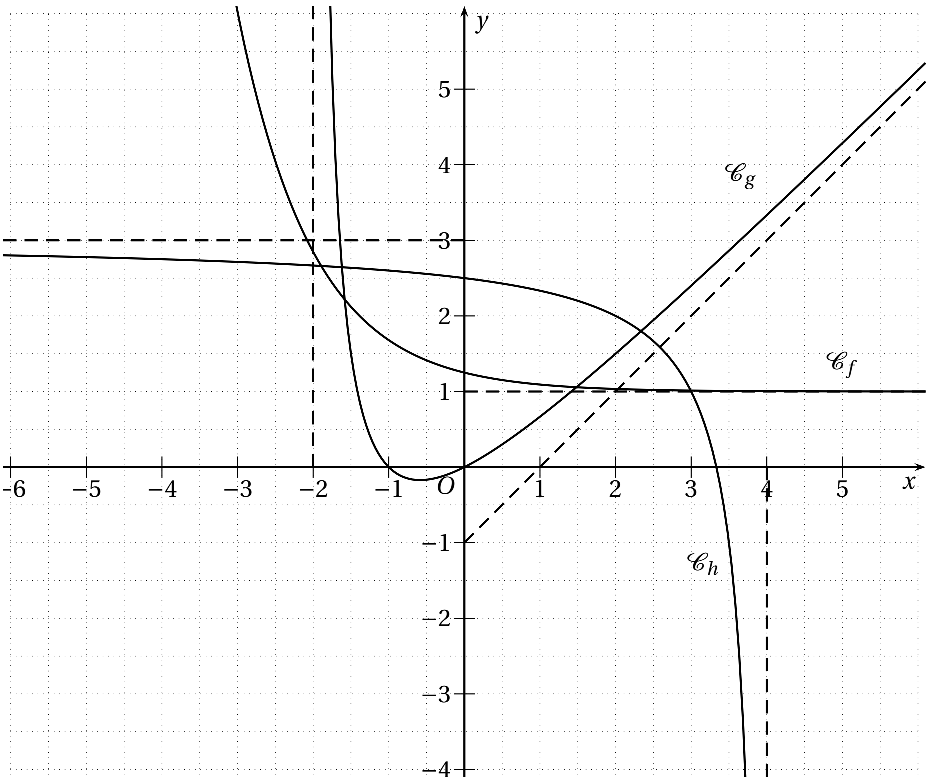
Exercice 2.1 (4,5 points).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (2x^3 + x + 1)^5$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
- $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^4}$

Exercice 2.2 (4,5 points).
La figure 2.1 de la présente page présente les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h.

1. Déterminer graphiquement D_f, D_g et D_h, les ensembles de définition respectifs de f, g et h.
2. Déterminer graphiquement les limites aux bornes de leurs ensembles de définition de ces trois fonctions.
3. Indiquer les éventuelles asymptotes à ces trois courbes (*on en précisera le type et l'équation*).

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.2



Exercice 2.3 (7 points).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x+1}$$

On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x+1}$ pour tout réel $x \neq -1$.
2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En déduire des éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
3. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$ pour tout réel $x \neq -1$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
4. Dresser le tableau des variations de f en faisant apparaître le signe de la dérivée, en indiquant les extremums locaux et les limites aux bornes de son ensemble de définition.
5. En utilisant l'expression de $f(x)$ la plus adaptée, montrer que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 3$.

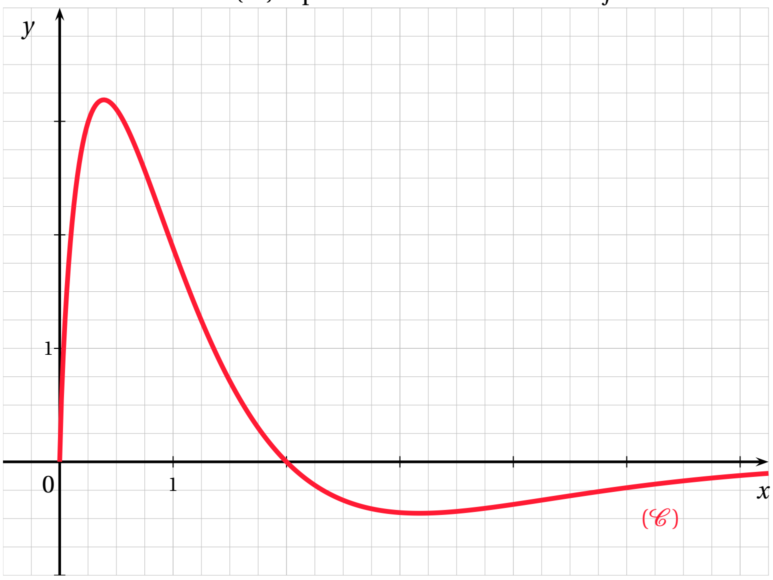
Exercice 2.4 (4 points).

Pour les élèves **ne suivant pas l'enseignement de spécialité**.

La courbe $(\mathscr{C})$ de la figure 2.2 de la présente page est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$. On sait que :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(2\,;0)$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote l'axe des abscisses.

FIGURE 2.2 – Courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f de l'exercice 2.4



1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$? Justifier.
3. On définit une fonction g sur $J =]2;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

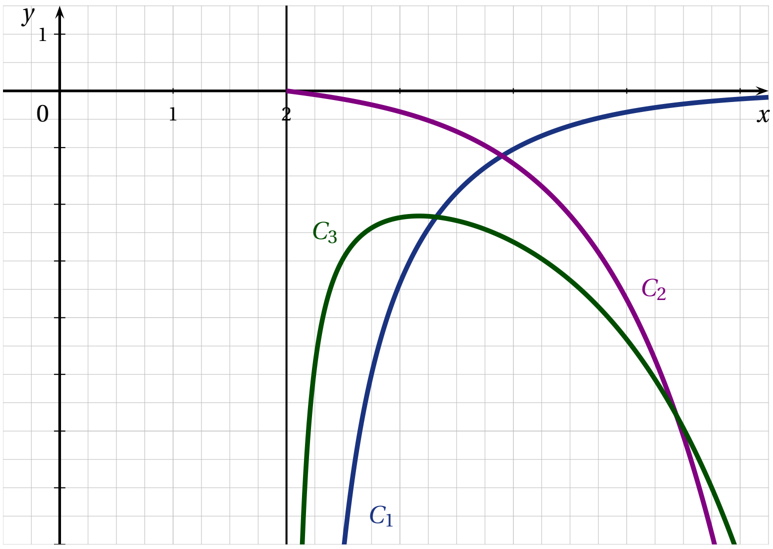
   À l'aide des informations de l'énoncé, du graphique ou des réponses aux question précédentes :

   (a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   (b) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

   (c) En déduire laquelle des trois courbes de la figure 2.3 de la présente page est la représentation graphique de la fonction g.

FIGURE 2.3 – Courbes de la question 3c de l'exercice 2.4



Chapitre 2

Statistiques à deux variables

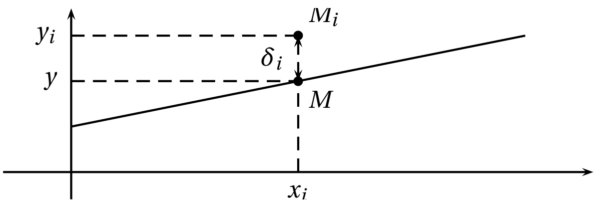
Sommaire

2.1 Activité

Activité 2.1 (Délit d'initié (d'après Yallouz Arie)).
La petite histoire racontée ci-dessous n'a bien sûr rien à voir avec des faits réels.
Un financier assure lors d'un procès intenté contre lui sous le motif de « délit d'initié », avoir basé ses achats d'actions d'une grande entreprise sur les données publiques résumées dans le tableau ci-dessous, donnant pour onze trimestres consécutifs un indicateur des ventes et un indicateur de la valeur de ses actions en bourse.

Trimestre i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vente	100	95	67	80	87	55	70	90	82	50	90
Cours	85	77	74	62	67	69	56	63	71	68	54

1. Représenter graphiquement l'évolution du cours des actions en fonction de l'indicateur des ventes.
   Cette représentation graphique permet-elle d'anticiper le cours de l'action ?
2. Au cours du procès l'avocat du financier présente un graphique où l'on regarde comment évolue l'indicateur du cours boursier en fonction de l'indicateur de vente du trimestre *précédent.*
   (a) Représenter graphiquement l'évolution du cours des actions en fonction de la vente au trimestre précédent.
   (b) Quelle est la forme du nuage de points obtenu ?
   (c) N_1 désigne le nuage correspondant aux cinq premiers points et N_2 celui correspondant aux cinq derniers points.
   - Calculer les coordonnées du point moyen G_1 du nuage N_1 et celles du point moyen G_2 du nuage N_2.
   - Donner une équation de la droite (G_1G_2) (*on arrondira les coefficients au centième*) et la tracer.
   - Vérifier que cette droite passe par le point moyen G du nuage de points.
3. Le financier assure avoir basé sa prévision du cours de bourse à l'aide d'une droite Δ d'équation : $y = 0,44x+31,86$.
   L'objet de cette question est de comparer les deux types d'ajustement.
   (a) On ajuste les points (M_i) d'un nuage par une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$, on note δ_i l'écart entre le point $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ du nuage et le point M de même abscisse x_i appartenant à la droite Δ.
   Ainsi $\delta_i = y_i - y = y_i - (ax_i + b)$ (voir figure ci-contre).
   Compléter le tableau 2.1 page suivante.



   (b) La somme $\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$ est appelée somme des résidus quadratiques en y. Comparer les deux sommes.
   Que remarquez-vous ?

4. L'objet de cette question est d'effectuer un ajustement affine par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire de déterminer la droite D d'équation $y = ax + b$ telle que la somme des résidus quadratiques $S = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$ soit minimale. Cette droite est appellée droite de régression.
   (a) Dans un premier temps, on suppose connu le coefficient directeur a de la droite D.
   - Le premier résidu est : $(77-100a-b)^2 = b^2 - 2b(77-100a) + (77-100a)^2$.
     Développer de même les neufs autres résidus.
   - Vérifier que la somme S est un polynôme du second degré en b.
   - Montrer que la somme S est minimale pour $b = 66{,}1 - 77{,}6a$.
   - En déduire que le point moyen G appartient à la droite D.

   (b) Calcul du coefficient directeur a.
   - En remplaçant b par $66{,}1-77{,}6a$, vérifier que la somme S est un polynôme du second degré en a.
   - En déduire la valeur de a pour laquelle S est minimal, puis celle de b.
   - Donner l'équation réduite de la droite D. Comparer avec celle de Δ.

TABLE 2.1 – Comparaison des ajustements

x_i (vente au trimestre i)	y_i (cours au trimestre $i+1$)	Avec la droite (G_1G_2) $\left[y_i - (0{,}43x_i + 32{,}59)\right]^2$	Avec la droite Δ $\left[y_i - (0{,}44x_i + 31{,}86)\right]^2$
100	77		
95	74		
67	62		
80	67		
87	69		
55	56		
70	63		
90	71		
82	68		
50	54		
Somme			

2.2 Bilan et compléments

2.2.1 Nuage de points, point moyen

On suppose que, suite à une étude, on s'intéresse à deux variables numériques discrètes sur une population. À chaque individu de cette population on associe ainsi un couple $(x_i\,;\,y_i)$, où x_i est la valeur de la première variable et y_i la valeur de la seconde.
L'ensemble des couples forme une série satistique double à deux variables, notée simplement $(x_i\,;\,y_i)$.
Si la première variable est le temps, on parle de série chronologique.

Définition 2.1. Soit $(x_i\,;\,y_i)$ une série satistique à deux variables.
- L'ensemble des points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ est appelé le *nuage de points* de la série.
- Le *point moyen* de ce nuage est le point $G\,(\overline{x}\,;\,\overline{y})$ où $\overline{x}$ est la moyenne des x_i et $\overline{y}$ la moyenne des y_i.
- On appelle *droite de régression*, ou ajustement affine, toute droite conçue pour passer *au plus près* des points du nuage.

Remarque. Un ajustement affine n'a de sens que si les points sont presque alignés (si le nuage a une forme allongée régulière). Il existe d'autres types d'ajustements quand le nuage de point n'a pas cette allure et nous en verrons quelques uns en exercice.

2.2.2 Droite de régression par la méthode de MAYER

Définition 2.2. Soit N un nuage de points. Soient N_1 et N_2 les deux sous nuages constitués respectivement de la première moitié des points de N et de la dernière moitié des points de N. Soient enfin G_1 et G_2 les points moyens respectifs de N_1 et N_2.
Alors la droite (G_1G_2) est appelée *droite de* MAYER.

Remarque. Si le nombre de points de N est impair, l'un des deux sous nuages contient un point de plus que l'autre.

2.2.3 Droite de régression par la méthode des moindres carrés

La distance d'un point $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ à une droite d'équation $y = ax + b$ étant celle entre le point M_i et le point de la droite d'abscisse x_i et S la somme des carrés de ces distances, on admet qu'il existe une droite pour laquelle S est minimale :

Propriété 2.1. *La* droite de régression *de y en x par la méthode des moindres carrés est la droite :*

- *passant par le point moyen* $G\left(\overline{x}\,;\overline{y}\right)$ *;*
- *de coefficient directeur :* $a = \dfrac{cov(x\,;\,y)}{V(x)}$ *où :*
  - $V(x) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ *est la variance des* x_i
  - $cov(x\,;\,y) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$ *est la* covariance *de x et y.*

L'équation réduite de cette droite de régression est alors $y = a(x - \overline{x}) + \overline{y}$.

On l'admettra.

Remarques.

- La calculatrice permet d'obtenir directement les coefficients de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, ce qui évite les longs calculs (voir le tableau 2.2 de la présente page).
- La droite de régression de y en x n'est pas la même que la droite de régression de x en y. La première minimise la somme des carrés des distances « verticales », la seconde la somme des carrés des distances « horizontales ».

TABLE 2.2 – Utilisation de la calculatrice

On peut retrouver tous ces paramètres statistiques en utilisant les listes d'une calculatrice.

<table>
<tr><th></th><th>TI-82</th><th>Casio Graph 25</th></tr>
<tr><td>Effacer les anciennes données</td><td>$\boxed{\text{STAT}}$
4 : ClrList $\boxed{4}$
$\boxed{2^{nd}}\boxed{\text{L1}}$
$\boxed{,}$
$\boxed{2^{nd}}\boxed{\text{L2}}$
$\boxed{\text{ENTER}}$</td><td>Sélectionner le menu STAT
$\boxed{\text{F6}}$
DEL-A $\boxed{\text{F4}}$
YES $\boxed{\text{F1}}$
$\boxed{\triangleright}$
DEL-A $\boxed{\text{F4}}$
YES $\boxed{\text{F1}}$</td></tr>
<tr><td>Entrer les nouvelles données.
On entre les valeurs des x_i dans la première colonne (L1 ou list 1) et les valeurs des y_i dans la deuxième colonne (L2 ou list 2) ;</td><td>$\boxed{\text{STAT}}$
1 : Edit $\boxed{\text{ENTER}}$
A l'écran :<table><tr><th>L1</th><th>L2</th><th>L3</th></tr><tr><td>30</td><td>12</td><td></td></tr><tr><td>40</td><td>19</td><td></td></tr><tr><td>50</td><td>24</td><td></td></tr><tr><td>60</td><td>30</td><td></td></tr><tr><td>…</td><td>…</td><td></td></tr></table></td><td>A l'écran<table><tr><th></th><th>List 1</th><th>List 2</th><th>List 3</th></tr><tr><td>1</td><td>30</td><td>12</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>40</td><td>19</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>50</td><td>24</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>60</td><td>30</td><td></td></tr><tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Calculer les paramètres statistiques</td><td>CALC $\boxed{\triangleright}$
4 : Linreg $(ax+b)$ $\boxed{\text{ENTER}}$
A l'écran :
Linreg $(ax+b)$
$y = ax + b$
$a =$
$b =$
$r =$</td><td>CALC $\boxed{\text{F2}}$
REG $\boxed{\text{F3}}$
X $\boxed{\text{F1}}$
A l'écran :
Linreg
$a =$
$b =$
$r =$
$r^2 =$
$y = ax + b$</td></tr>
</table>

2.3 Exercices

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Exercice 2.1.

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
Nombre de lits X	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes Y	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ correspondant à cette série (*unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 10 lits ; en ordonnée 1 cm pour 20 postes*).
   D'après l'allure du nuage, un ajustement affine est-il justifié ?
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. (a) Sans utiliser les fonctions statistiques de votre calculatrice, mais en vous aidant éventuellement du tableau 2.3 de la présente page ou d'un tableur :

TABLE 2.3 – Tableau pour la question3a

	x_i	y_i	$X_i = x_i - \overline{x}$	$Y_i = y_i - \overline{y}$	$Y_i X_i$	X_i^2
	122	205				
	177	249				
	77	114				
	135	178				
	109	127				
	88	122				
	185	242				
	128	170				
	120	164				
	146	188				
	100	172				
Somme						
Moyenne						

   i. Déterminer $V(x) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$

   ii. Déterminer $\text{cov}(x\,;\,y) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$

   iii. En déduire le coefficient directeur de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés puis son équation.
   Tracer $\mathscr{D}$ sur le graphique.

   (b) On dit que la droite de régression obtenue par la méthode des moindres carrés est très sensible aux valeurs extrêmes (ou aberrantes). Faites une expérience pour illustrer cette affirmation en changeant l'une des données (*on pourra pour cette question utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice*).
4. Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 3a, à combien peut-on estimer, par le calcul, le nombre de postes de personnel non médical ? Illustrer votre réponse sur le graphique.

Exercice 2.2.

La tableau suivant donne le PNB (en € par habitant) ainsi que le nombre d'hôpitaux (pour 1 million d'habitants) dans quelques pays européens :

Pays	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X = PNB (en € par habitant)	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	22 500	26 200	28 900
Y = nombre d'hôpitaux par million d'habitants	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 250	3 800	4 200

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(X\,;\,Y)$ (*unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 000 € ; en ordonnée 1 cm pour 200 hôpitaux*).
   On prendra pour origine le point (5 000 ; 600).
   D'après l'allure du nuage un ajustement affine est-il justifié ?

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Placer G sur le graphique.
3. *Droite de* MAYER
   Dans cette question, on considère deux sous-nuages : celui constitué des points correspondants aux pays P_1, P_2, P_3 et P_4 et celui constitué des points P_5, P_6, P_7 et P_8.
   (a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux sous-nuages. Placer G_1 et G_2 sur le graphique.
   (b) Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2), où les coefficients sont arrondis à 10^{-2}, est : $y = 0,15x - 199$. La représenter sur le graphique.
   (c) Compléter le tableau suivant :

X	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	22 500	26 200	28 900
Y	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 250	3 800	4 200
$0,15X - 199$								
$Y - (0,15X - 199)$								
$[Y - (0,15X - 199)]^2$								

   En déduire la somme des résidus quadratiques S associée à la droite de MAYER.
4. *Par les moindres carrés*
   Déterminer une équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés. La représenter sur le graphique.
5. La somme des résidus quadratiques S' associée à $\mathscr{D}$ est $S' \approx 35\,482,50$. Laquelle des deux droites réalise-t-elle le meilleur ajustement affine ?
6. *Estimations*
   À l'aide de l'équation de $\mathscr{D}$ et en détaillant les calculs répondre aux questions suivantes :
   (a) Un pays a un PNB de 23 400 € par habitant. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux par million d'habitants dans ce pays ? (*Arrondir à l'unité*)
   (b) Un pays a 3 500 hôpitaux par million d'habitants. À combien peut-on estimer son PNB en € par habitant ? (*Arrondir à l'unité*)

Exercice 2.3.

Un hypermarché dispose de 20 caisses. Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes :

Nombre de caisses ouvertes X	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

1. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ correspondant à cette série statistique. (*Unités graphiques : en abscisse 1 cm pour une caisse ouverte ; en ordonnée 1 cm pour une minute d'attente*).
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. *Un ajustement affine*
   (a) Déterminer l'équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés. La représenter sur le graphique.
   (b) Estimer, à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de $\mathscr{D}$:
      i. le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes ;
      ii. le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.
      Pensez-vous dans ce cas que l'ajustement affine soit fiable ?
4. *Un ajustement non affine*
   On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(X) = \dfrac{\lambda}{X}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer λ de façon à avoir : $f(3) = 16$.
   (b) Tracer alors $\mathscr{C}$ dans le repère utilisé pour le nuage.
   (c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant la fonction f :
      i. le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 min ;
      ii. le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.

Exercice 2.4.

Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau en m^3 utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne les résultats suivants :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé en m^3 : y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

1. Représenter la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$.
   (*Unités graphiques : abscisse 1 cm pour un jour ; ordonnée 0,5 cm pour un m^3*).
2. Donnez l'équation de la droite Δ des moindres carrés sous la forme $y = mx + p$ où m et p sont les coefficients arrondis à 10^{-2}. La représenter sur le graphique.
3. Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par une parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $A(1\,;2,25)$ et $B(10;27)$, et qui a pour équation $y = ax^2 + b$ où a et b sont des réels.
   Déterminer a et b et donnez l'équation de la parabole $\mathscr{P}$. La représenter sur le graphique.
4. Dans cette question, on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	10
y_i	2,25	4,3	8	17,5	27
$\lvert y_i-(mx_i+p)\rvert$	2,54	0,91	2,71		
$\lvert y_i-(ax_i^2+b)\rvert$	0	0,05	0,25		

   Les sommes des deux dernières lignes évaluent, pour chaque ajustement, la somme des écarts entre les ordonnées des points du nuage et les ordonnées des points de même abscisse de l'ajustement.
   Donnez les arrondis à 10^{-1} des deux totaux.
   Déduisez l'ajustement qui paraît le mieux adapté.

Exercice 2.5.

Une étude fictive faite en France sur le taux d'équipement des ménages en automobile et l'âge des femmes lors de leur premier mariage donne les résultats suivants :

années	1 979	1 981	1 984	1 986	1 990	1 991	1 992	1 979	1 993	1 994	1 995
taux x_i	68,6	70	72,9	73,4	74,6	76,5	76,8	77	78	79,5	79
âge y_i	22,9	23,1	23,9	24,5	25	25,6	25,8	26,1	26,4	26,7	26,9

1. Représenter la série statistique.
   (Unités graphiques : abscisse 1 cm pour 1 % origine à 66 ; ordonnée 1 cm pour 1 an origine à 22)
   L'allure du nuage semble-t-il justifier un ajustement affine ?
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis déterminer l'équation réduite de la droite de regression de y en x par la méthode des moindres carrés.
3. Suivant cet ajustement affine, quel serait l'âge au premier mariage pour un taux de 90 % ? Ce calcul a-t-il un sens ?
4. Peut-on en déduire qu'il y a un lien entre le taux d'équipement des ménages en automobile et l'âge du premier mariage ? Comment expliquer la corrélation entre ces deux grandeurs ?

Exercice 2.6.

Au cours d'une séance d'essais, un pilote automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.
Au moment du top sonore, on mesure v_i (en km/h) de l'automobile, puis la distance d_i (en m) nécessaire pour arrêter le véhicule.
Pour sept expériences, on a obtenu les résultats suivants :

vitesse v_i	20	43	62	80	98	115	130
distance d'arrêt d_i	3,5	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8	168,5

1. Dans le premier repère fourni sur la figure 2.1 page 42, représenter le nuage de points de coordonnées $(v_i\,;\,d_i)$.
   Un ajustement affine semble-t-il pertinent ? Argumenter.
2. On pose $y_i = \sqrt{d_i}$.
   (a) Reproduire et compléter le tableau suivant (*on arrondira les résultats au centième*) :

v_i	20	43	62	80	98	115	130
y_i							

   (b) Dans le second repère fourni sur la figure 2.1 page 42, construire le nuage des points de coordonnées $(v_i\,;\,y_i)$ associé à cette nouvelle série double avec pour unités.
   La forme du nuage permet-elle d'envisager un ajustement affine ? Argumenter.

(c) Donner l'équation de la droite de régression de y en v obtenue par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients au millième*) et la tracer.

(d) À l'aide de cette équation estimer (*arrondis au centième*) :
- la vitesse v d'un véhicule lorsque sa distance d'arrêt est de 180 m ;
- la distance d'arrêt d de ce véhicule s'il roule à 150 km/h.

(e) Le manuel du code de la route donne, pour calculer la distance d'arrêt (en m), la méthode suivante : « Prendre le carré de la vitesse exprimée en dizaines de km/h ».
Comparer les résultat obtenus au 2d à ceux que l'on obtiendrait avec cette méthode.

Exercice 2.7.
La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1 998, elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en milliers d'euros y_i	64	75	100	113	125	127

1. (a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal.
Les unités graphiques seront 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage (*arrondir au dixième*). Placer le point G dans le repère.
2. En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.

   (a) Donner une équation de la droite d'ajustement ($\mathscr{D}$) obtenue par la méthode des moindres carrés (*arrondir les coefficients au centième*).

   (b) Tracer cette droite ($\mathscr{D}$) dans le repère.

   (c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2 005 avec cette approximation ?
3. En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement donné par $y = f(x)$ avec

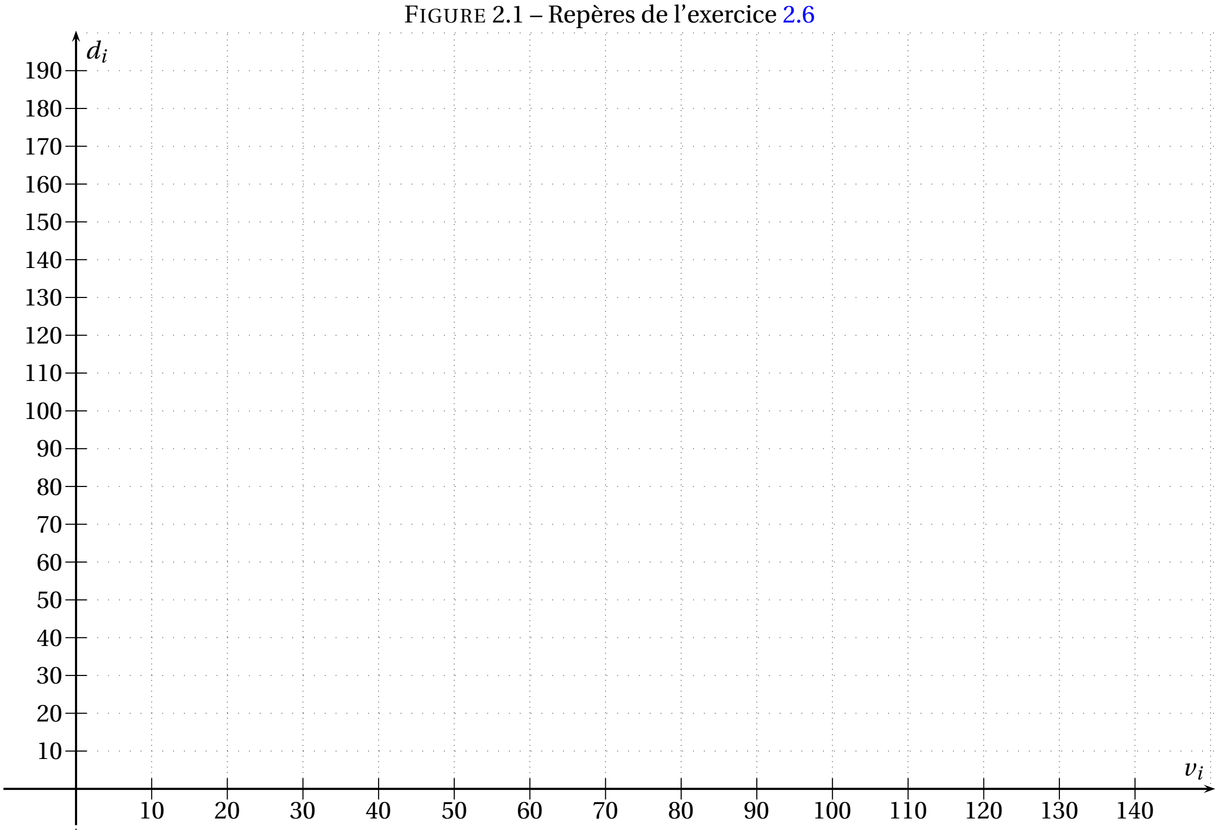
$$f(x) = -2x^2 + 23x + 63.$$

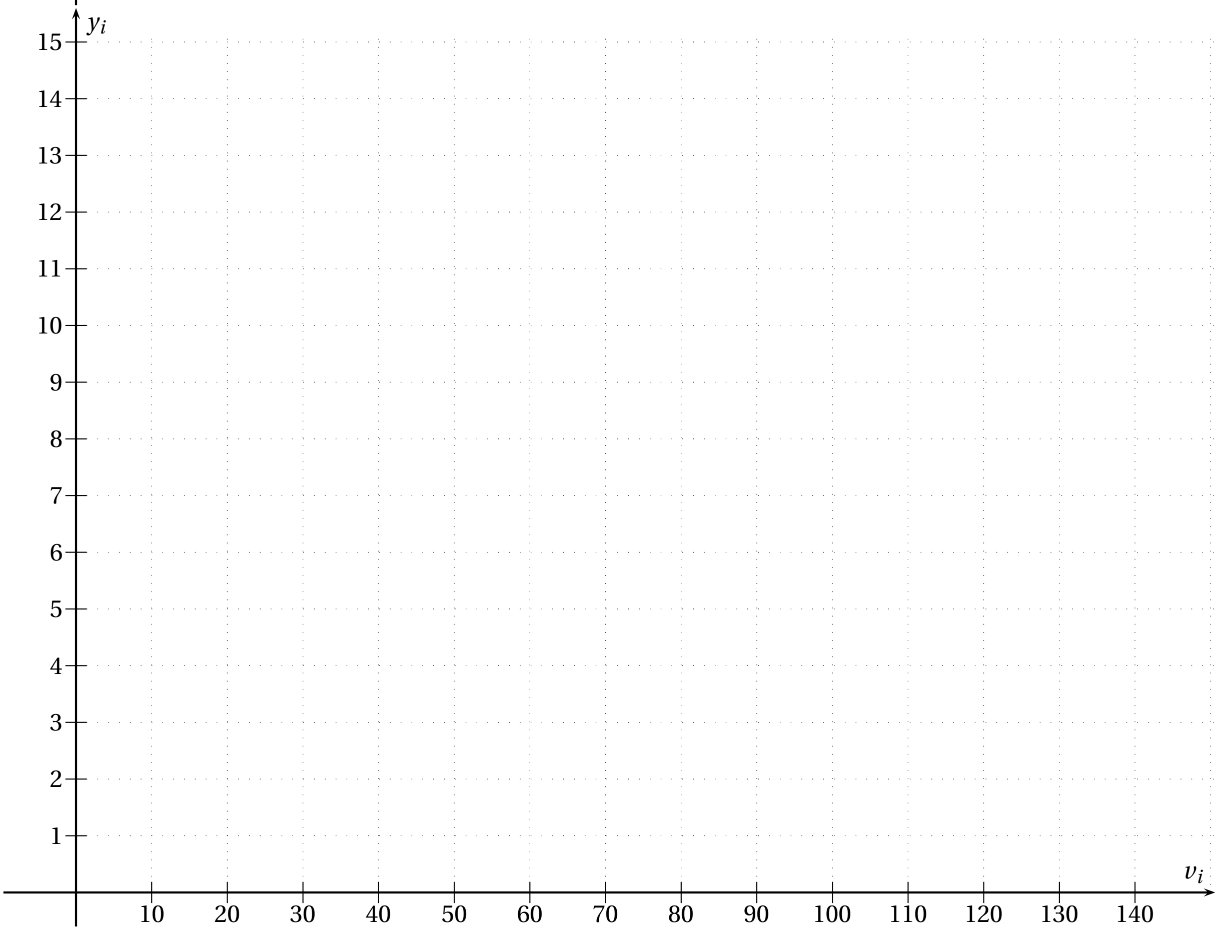
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

   (b) Tracer la courbe représentative ($\mathscr{C}_f$) de la fonction f dans le repère de la question 1).

   (c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2 005 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?
4. En réalité, le bénéfice en 2 005 est en hausse de 0,9 % par rapport à celui de 2 004.
Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2005 ? Justifier la réponse.

FIGURE 2.1 – Repères de l'exercice 2.6





Devoir commun de Terminale ES

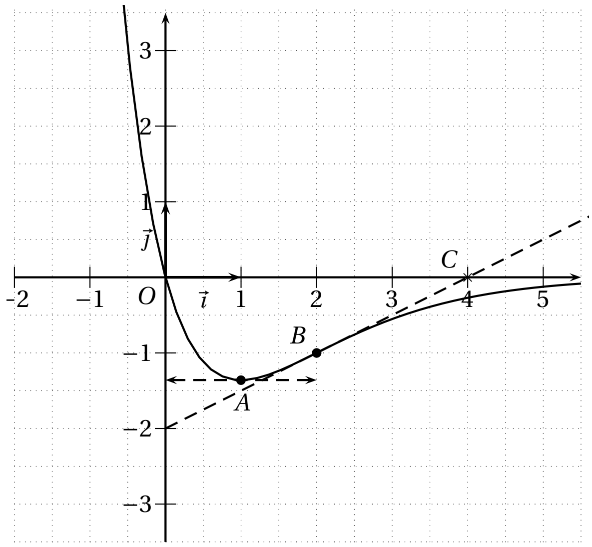
Généralités sur les fonctions – Statistiques – 3 heures

Ce sujet comporte 4 pages.

Du papier millimétré est mis à disposition des élèves.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
Le barème est provisoire.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 3.1 (5 points).
La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne les renseignements suivants :



- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B\,(2\,;\,-1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C\,(4\,;\,0)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. **Recopier sur sa copie le tableau suivant et le compléter** sachant que *une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun et si le total est négatif, la note est ramenée à 0.*

Question	1	2	3	4a	4b
Réponse					

1. $f'(2)\dots$
   (a) … vaut 2   (b) … vaut -1 (c) … vaut $\frac{1}{2}$
2. Une des représentations de la figure 3.1 page 46, représente la fonction dérivée f' de f, il s'agit de …
   (a) … $\mathscr{C}_1$ (b) … $\mathscr{C}_2$ (c) … $\mathscr{C}_3$
3. Une des représentations de la figure 3.1 page 46, représente une fonction h telle que $h' = f$, il s'agit de …
   (a) … $\mathscr{C}_1$ (b) … $\mathscr{C}_2$ (c) … $\mathscr{C}_3$
4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\dots$
      i. … vaut 0   ii. … vaut $-\infty$ iii. … vaut $+\infty$
   (b) $g'(2)\dots$
      i. … vaut 2   ii. … vaut 0   iii. … vaut $-\frac{1}{2}$

Exercice 3.2 (5 points).
Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1 951 à 2 001.

Année	1 951	1 961	1 971	1 981	1 991	2 001
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Population en millions y_i	360	439	548	683	846	1 018

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de la population de l'Inde entre 1 951 et 2 001 (*on arrondira le taux à* 10^{-2}).
2. Représenter le nuage de points $(x_i ; y_i)$ dans un repère ; unités graphiques : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 100 millions d'habitants en ordonnée.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et placer G sur le graphique.
4. On souhaite réaliser un ajustement affine de ce nuage afin de prévoir la population de l'Inde en 2 021.
   (a) Méthode de MAYER
      i. Déterminer les coordonnées du point moyen G_1 des trois premiers points du nuage puis celles du point G_2 des trois derniers points du nuage.
      ii. En déduire que l'équation de la droite (G_1G_2) est : $y = \frac{400}{3}x + \frac{547}{3}$
      iii. Déterminer à l'aide de cette équation une prévision pour la population de l'Inde en 2 021.
   (b) Méthode des moindres carrés
      i. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients à* 10^{-2} *près*).
      ii. Déterminer à l'aide de cette équation une prévision pour la population de l'Inde en 2 021, à 1 millions d'habitants près.
5. Déterminer en utilisant la méthode de votre choix l'année au cours de laquelle la population de l'Inde dépasserait 2 milliards d'habitants.

Exercice 3.3 (5 points).
Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$$

On appelle g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que $g'(x) = 6x(x-1)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de g en indiquant les valeurs des extremums locaux.
4. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 1 et 2.
   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
   (c) Dresser le tableau de signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude d'une fonction
La fonction f est définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1}$$

On appelle f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 3}{(x-1)^2}$.
3. À l'aide de la question précédente et de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
4. Dresser le tableau des variations de f en indiquant le signe de $f'(x)$ et les limites obtenues en 1.

Exercice 3.4 (5 points).

*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*

Une entreprise produit et commercialise des tee-shirts.

Le coût de production de x milliers de tee-shirts est donné en euros par la fonction C :

$$C(x) = 0,2x^3 - x^2 + 80x + 24\,000\,;\ x \in [0\,;\,60]$$

On note C' la fonction dérivée de C

1. (a) Déterminer $C'(x)$ et montrer que $C'(x)$ est positif.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction C.
   (c) On rappelle que le coût marginal est le coût de production d'une unité supplémentaire et qu'il peut être modélisé par la fonction dérivée.
   Calculer le coût marginal d'un tee-shirt lorsqu'on en produit 50 000.
2. On définit le coût moyen par : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$
   (a) Montrer que sa dérivée est définie par : $C'_M(x) = \frac{(x-40)(0,4x^2+15x+600)}{x^2}$.
   (b) Montrer que : $C'_M(x)$ a le même signe que : $x - 40$
   (c) Dresser le tableau de variations de C_M ; en déduire la quantité pour laquelle le coût moyen est minimal. Vérifier que pour cette production le coût moyen est égal au coût marginal.
3. Chaque tee-shirt étant vendu 2 €, calculer le bénéfice réalisé par la fabrication et la vente de 40 000 tee-shirts.

Exercice 3.5 (5 points).

*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité*

Partie A : Pistes cyclables

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. La ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G. Les stations reliées entre elles par une piste cyclable sont indiquées sur le graphe de la figure 3.2 page suivante.

1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables. A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.
2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3. Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier la réponse.
   (b) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, en trois étapes, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

Partie B : En voiture

Certaines de ces avenues sont à sens unique, d'autres à double sens pour la circulation des voitures ; d'autres sont réservées aux cyclistes ; l'ensemble est résumé sur le graphe de la figure 3.3 page suivante.

1. Écrire la matrice M' associée à ce graphe (*on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique*).
2. (a) Quel est le nombre de trajets de longueur 3 reliant E à F ? *On en donnera la liste.*
   (b) Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M' ?

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.1 – Courbes des questions 2 et 3

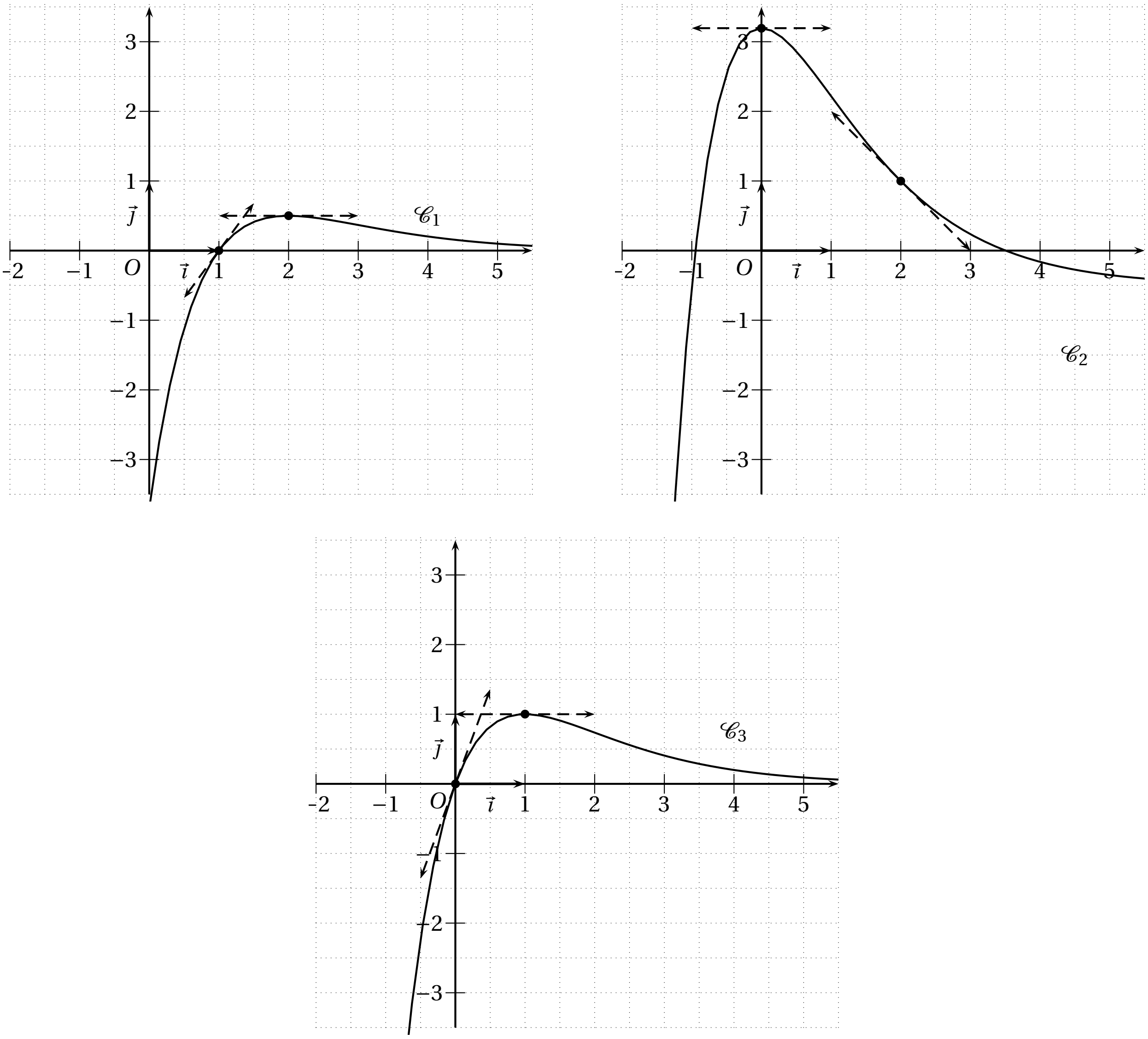


FIGURE 3.2 – Graphe des pistes cyclables de l'exercice 3.5

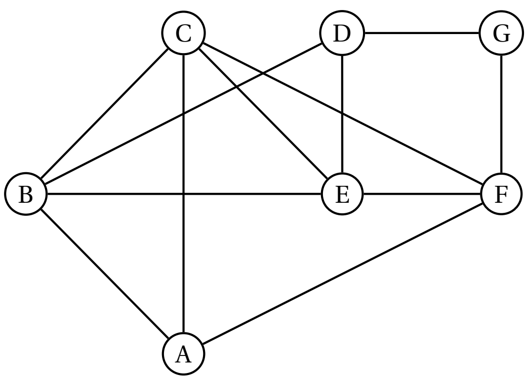
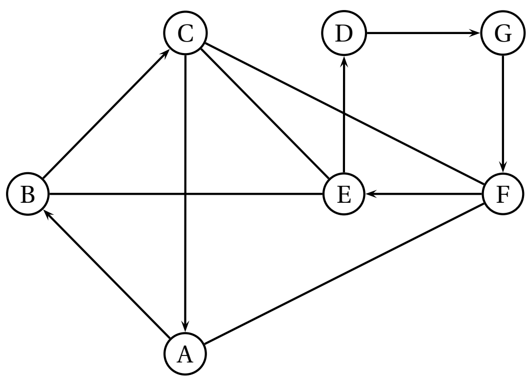


FIGURE 3.3 – Circulation des voitures de l'exercice 3.5



Chapitre 3

Calcul intégral

Sommaire

3.1 Activités

Activité 3.1 (Somme de coûts marginaux).
Production à l'unité
Une petite usine fabrique des casseroles toutes identiques.
À chaque casserole fabriquée, le service de gestion calcule le coût de sa fabrication. Ce coût est appelé coût marginal et est donné dans le deuxième colonne du tableau 3.1 page 49.
Les coûts fixes se montent à 80 €.
Au fur et à mesure de la fabrication, on somme les coûts marginaux des casseroles déjà fabriquées ; en ajoutant les coûts fixes on obtient alors le coût total.

1. (a) Lire le coût marginal de la 15$^{\text{ième}}$ casserole.
   (b) Calculer la somme des coûts marginaux de la 1$^{\text{ière}}$ à la 15$^{\text{ième}}$ casserole. À quoi correspond ce nombre ?
   (c) Où retrouve-t-on ce nombre sur chacun des graphiques obtenus sur la figure 3.1 page 49 ?
2. Faire de même pour la 20$^{\text{ième}}$ casserole et la somme des coûts marginaux de la 1$^{\text{ière}}$ à la 20$^{\text{ième}}$ casserole.
3. Quelle casserole a le plus petit coût marginal ? Quel est alors le coût total de fabrication pour ce niveau de production ?

Production continue
Dans une autre usine, on produit une pâte à bois.
Le coût marginal, en euros par kg produit, est donné par : $C_m(x) = 0,3x^2 - 4,8x + 21,2$ pour $x \in [0\,;20]$. C'est une fonction continue car on peut produire quelques grammes.

1. Calculer le coût marginal du quinzième kg produit, du vingtième et du huitième. Comparer au cas précédent.
2. La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la figure 3.1 page 49 représente le coût marginal pour x kg produits.
   (a) Comment interprèter la somme des aires des rectangles dessinés sur ce graphique ?
   (b) Calculer la somme, pour x variant de 1 en 1 : $\sum_{x=1}^{x=8} 1 \times C_m(x) = 1 \times C_m(1) + 1 \times C_m(2) + \cdots + 1 \times C_m(7) + 1 \times C_m(8)$.

3. On étudie les coûts marginaux des huit premiers kg en calculant ces coûts pour chaque 500 g ou 0,5 kg.
   (a) À l'aide de la calculatrice, calculer les coûts marginaux de 0,5 kg à 8 kg de tous les 500 g, en euros par 0,5 kg, et les placer dans une liste.
   (b) Calculer la somme, pour x variant de 0,5 en 0,5 : $\sum_{x=0,5}^{x=8} = 0,5 \times C_m(0,5) + 0,5 \times C_m(1) + \cdots + 0,5 \times C_m(8)$.
   Comment pourrait-on représenter cette somme sur le graphique 3.1 ?
4. Si vous disposez d'un tableur, procéder de même en calculant les coûts marginaux tous les 100 g, en euros par 0,1 kg.
   Expliquez pourquoi la somme, pour x variant de 0,1 en 0,1 : $\sum_{x=0,1}^{x=8} 0,1 \times C_m(x)$ est très proche de l'aire sous la courbe.

Activité 3.2 (Fonctions dont on connaît la dérivée). 1. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = 2x - 3$. Vérifier que g est la dérivée de f. Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.

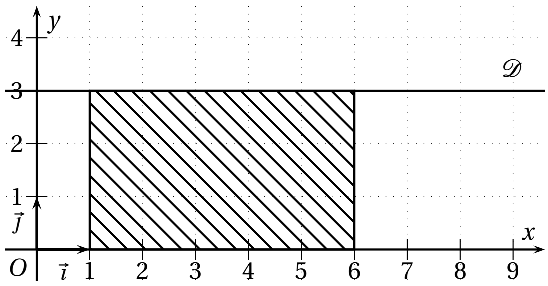
2. (a) Quelles sont les fonctions définies sur un intervalle dont la dérivée est toujours nulle sur cet intervalle ?
   (b) Soit F une fonction de dérivée f sur un intervalle I. Quelle est la dérivée de F ? De la fonction $x \longmapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$?
3. À l'aide du tableau des dérivées, trouver **une** fonction F ayant pour dérivée la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :
   (a) $f(x) = 5x^4$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$;
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$;
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$;
   (f) $f(x) = 6(2x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$

Activité 3.3 (Aire et primitive).

Fonction constante

Le droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3$ dans le repère ci-contre.

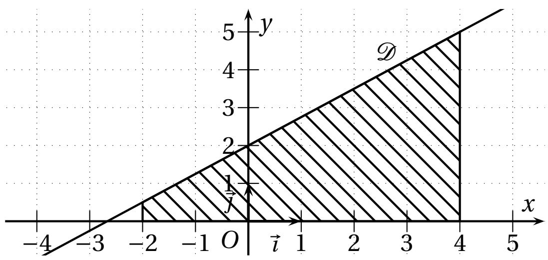
1. Calculer l'aire du rectangle hâchuré, en carreaux.
2. Donner une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(1)$.
   Comparer avec l'aire du rectangle.



Fonction affine

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{3}{4}x + 2$ représente la fonction $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$.

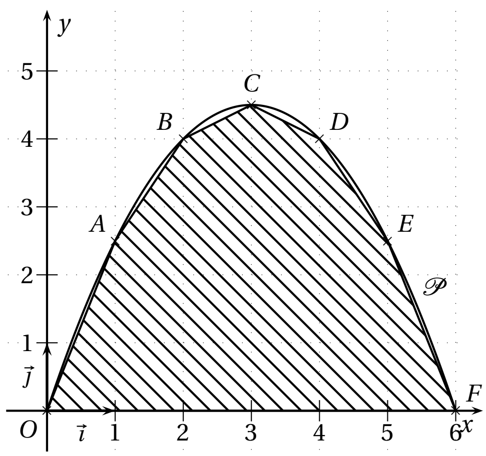
1. Calculer l'aire du trapèze[1] hachuré, en carreaux.
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(4) - F(-2)$.
   Comparer avec l'aire du trapèze.



Aire sous la parabole

ARCHIMÈDE démontra à l'aide de suites que : « Un secteur parabolique compris entre une droite et une parabole est égal à 4 fois le tiers de l'aire d'un triangle ayant même base et même hauteur que ce secteur ».
Puis il le vérifia expérimentalement en cherchant la masse d'une plaque métallique ayant cette surface.
Les points O, A, B, C, D, E et F appartiennent à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.

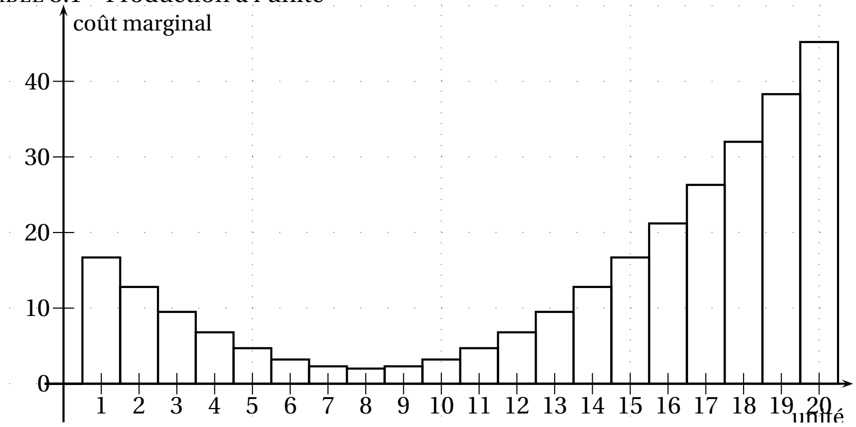
1. Calculer l'aire $\mathscr{A}_1$ du polygone hachuré (qu'on pourra découper en plusieurs figures connues : triangles, trapèzes, etc.), puis l'aire $\mathscr{A}_2$ du triangle OCF. Vérifier que l'on a $\mathscr{A}_1 < \frac{4}{3}\mathscr{A}_2$.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.
   Calculer $F(6) - F(0)$. Comparer à $\frac{4}{3}\mathscr{A}_2$.



1. L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\dfrac{(b+B)\times h}{2}$ où b est la petite base, B la grande base et h la hauteur du trapèze

TABLE 3.1 – Production à l'unité

unité	coût marginal	coût total
0		80
1	16,7	96,7
2	12,8	109,5
3	9,5	119
4	6,8	125,8
5	4,7	130,5
6	3,2	133,7
7	2,3	136
8	2	138
9	2,3	140,3
10	3,2	143,5
11	4,7	148,2
12	6,8	155
13	9,5	164,5
14	12,8	177,3
15	16,7	194
16	21,2	215,2
17	26,3	241,5
18	32	273,5
19	38,3	311,8
20	45,2	357



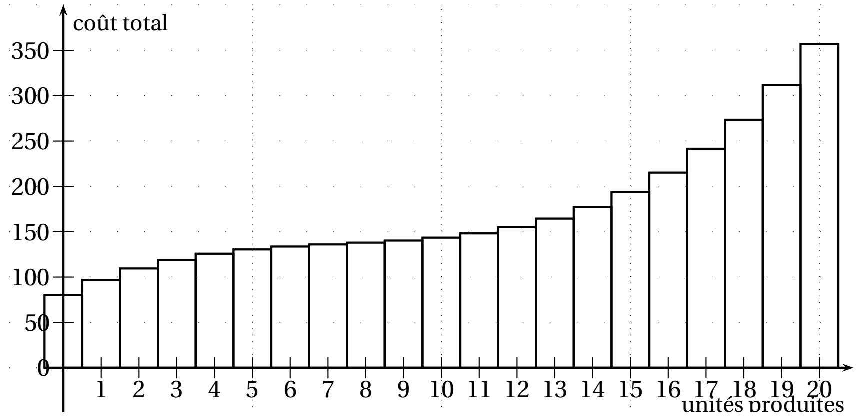
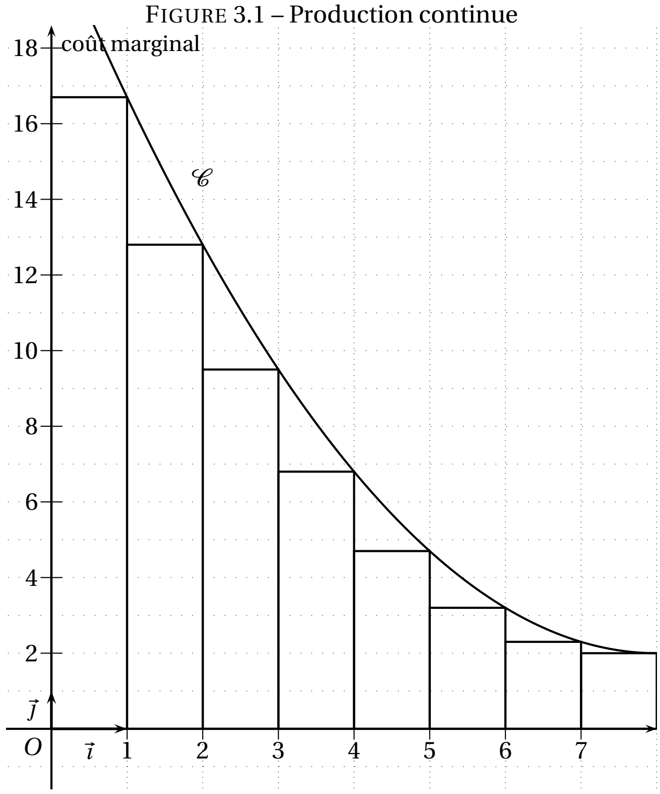


FIGURE 3.1 – Production continue



3.2 Primitive d'une fonction

3.2.1 Définition et conséquences

Définition 3.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle *primitive de f* toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.

Théorème 3.1. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I*

On l'admettra.

Théorème 3.2. *Soit F une primitive de f sur un intervalle I.
Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G = F + k$, où $k \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$.*

Preuve.
- Supposons que F et G sont deux primitives de f sur I. Montrons qu'alors $G = F + k$.
  Par définition $F' = f$ et $G' = f$, donc $F' - G' = f - f = 0$, mais $F' - G' = (F - G)'$.
  Comme les seules fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes, $F - G$ est une fonction constante.
  Donc $F - G = k$, où $k \in \mathbb{R}$. Donc $F = G + k$.
- Soit F une primitive de f sur I. Montrons que $G = F + k$ est aussi une primitives de f.
  $G' = (F + k)' = F' + 0 = f$ donc G est aussi une primitive de f sur I.

♢

3.2.2 Primitive satisfaisant une condition initiale

Propriété 3.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.*

Preuve.
- *Existence.*
  f étant continue, elle admet des primitives. Soit H l'une d'elles.
  Supposons que $H(x_0) = z_0 \neq y_0$.
  D'après le théorème 3.2, la fonction $F = H - z_0 + y_0$ est aussi une primitive de f.
  Or $F(x_0) = H(x_0) - z_0 + y_0 = z_0 - z_0 + y_0 = y_0$. Il existe donc bien une primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.
- *Unicité.*
  Soient F et G deux primitives telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$.
  D'après le théorème 3.2, $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Donc $G(x_0) = F(x_0) + k \Leftrightarrow y_0 = y_0 + k \Leftrightarrow k = 0$.
  Donc $G = F$.

♢

Exemple 3.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Déterminer **la** primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.
- On remarque que $G(x) = x^3 + x^2 + x$ est **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- On sait que toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^3 + x^2 + x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- On cherche k tel que $F(1) = -1$. Or $F(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + k = k + 3$. Donc $-1 = k + 3 \Leftrightarrow k = -4$
  Donc $F(x) = x^3 + x^2 + x - 4$ est **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.

3.2.3 Primitives des fonctions usuelles

Le tableau 3.2 page ci-contre donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré.

Les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

3.2.4 Opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau 3.3 page suivante. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

TABLE 3.2 – Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction primitive ($k \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + px + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) =?$	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$]-\infty\,; 0[$ ou $]0\,; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + k$	$]-\infty\,; 0[$ ou $]0\,; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + k$	$]-\infty\,; 0[$ ou $]0\,; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0\,; +\infty[$

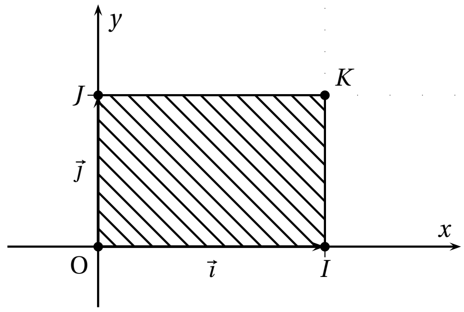
TABLE 3.3 – Opérations sur les primitives

Conditions	alors la fonction s'écrivant sous la forme	admet comme primitive
	$u' + v'$	$u + v$
Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante	ku'	ku
	$u'u^2$	$\frac{1}{3}u^3$
	$u'u^3$	$\frac{1}{4}u^4$
Soit $n \in \mathbb{N}$	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u}$	?
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^3}$	$-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}$
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$
Si $u > 0$ sur I	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
	$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$

3.3 Calcul intégral

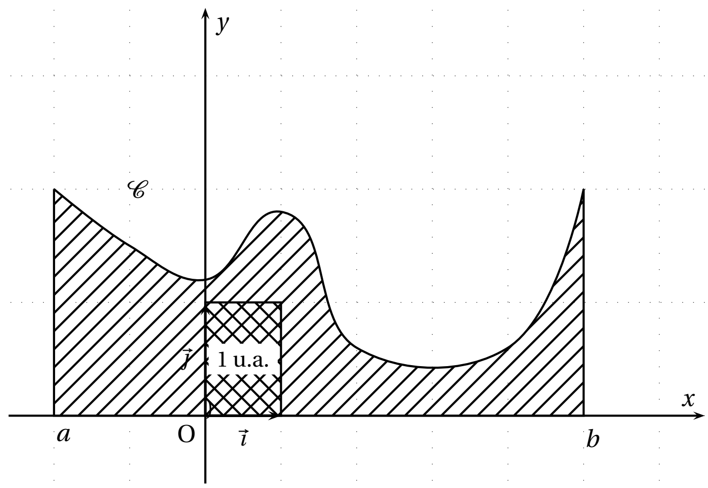
3.3.1 Interprétation graphique

Définition 3.2 (L'unité d'aire)**.** Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire($\mathrm{O}IKJ$) = 1 u.a.



Remarques.
- $\mathrm{O}IKJ$ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
- Si l'on a, par exemple, $OI=3$ cm et $OJ=2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

Définition 3.3 (Aire sous la courbe d'une fonction positive)**.** Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I dont la représentation graphique est appelée $\mathscr{C}$.
Soient $a\leq b$ deux réels de I.
On appelle *aire sous la courbe de f de a à b* l'aire, exprimée en u.a., du domaine $\mathscr{D}$ délimité par :
- les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ (à gauche et à droite) ;
- $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses (en haut et en bas).



On a vu, dans l'activité 3.1 page 47, que la somme des aires rectangles « situés sous la courbe » s'approchait d'autant plus de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ que la base du rectangle était petite. En extrapolant ce raisonnement : lorsque la base du rectangle est infiniment petite, on la note alors dx (le d signifiant une différence infiniment petite entre deux valeurs de x), sa hauteur vaut alors $f(x)$ et l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est la somme de cette infinité de rectangle. D'où la notation suivante :

Définition 3.4 (Notation de l'aire sous la courbe)**.** Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I. Soient $a\leq b$ deux réels de I.
On note l'aire sous la courbe de f de a à b : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarques.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit aussi « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- La variable peut être indifféremment t, x, y... On dit que c'est une variable *muette*.

3.3.2 Intégrale d'une fonction

Définition 3.5. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I. Soit F une primitive de f.
On appelle *intégrale de a à b de f* le nombre réel, noté $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, égal à $F(b)-F(a)$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

Remarques.
- Si $f \geq 0$ et si $a \leq b$ alors l'intégrale n'est rien d'autre que l'aire sous la courbe (on l'admettra).
- On note aussi : $F(b)-F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$.
- Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale. En effet, si on prend à la place une primitive $G = F + k$, on a $G(b)-G(a) = F(b)+k-(F(a)+k) = F(b)-F(a)$.

Propriété 3.4 (Premières propriétés)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors*
- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Preuve.
- Par définition $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a)-F(a) = 0$
- Par définition $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

♢

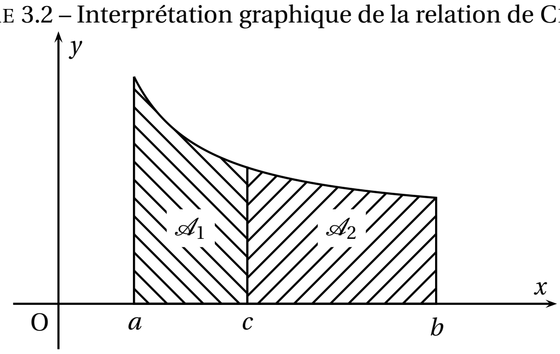
Propriété 3.5 (Relation de CHASLES)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Preuve. Par définition $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ♢

Remarque. Dans le cas où $a \leq c \leq b$ et où $f \geq 0$, on peut interpréter la relation de CHASLES en termes d'aires : sur la figure 3.2 de la présente page, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

FIGURE 3.2 – Interprétation graphique de la relation de CHASLES



Propriété 3.6 (Linéarité)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I et α et β deux réels quelconques. Alors :*
- $\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
- *Plus généralement :* $\int_a^b \big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Preuve.
- Soit F une primitive de f sur I. Alors αF est une primitive de αf. Donc :
$\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)\mathrm{d}t = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha(F(b)-F(a)) = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ donc :
  $\displaystyle\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t = (F+G)(b)-(F+G)(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$
- Le dernier point est l'application des deux premiers.

$\diamondsuit$

Remarque. À cause du deuxième point on dit que l'intégration est compatible avec l'addition.

Propriété 3.7 (Inégalités)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur I et $a \leq b$ deux réels de I.*

- *Si $f \geq 0$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.*
- *Si $f \leq g$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.*

Preuve.
- Dans le premier cas $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire sous la courbe et une aire est positive.
- Dans le cas où $0 \leq f \leq g$, les deux intégrales sont les aires sous les courbes respectives de f et de g. Comme $f \leq g$, la courbe de f est sous celle de g et l'aire sous la courbe de f est inférieure à celle sous la courbe de g. On admettra le cas général.

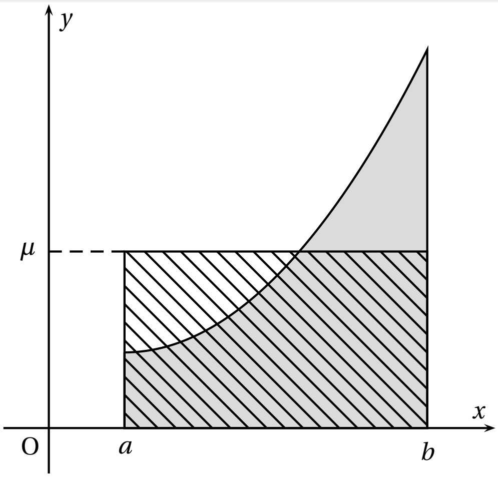
$\diamondsuit$

Remarques.
- La réciproque du premier point est fausse : on peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$ sans avoir $f \geq 0$.
- À cause du second point on dit que l'intégration est compatible avec l'ordre.

Définition 3.6 (Valeur moyenne)**.** La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est le nombre :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque. Dans le cas où $f \geq 0$, on peut interpréter la valeur moyenne en termes d'aires (ici $a < b$).
On cherche un nombre μ tel que, en remplaçant chaque valeur de f par μ, la somme des $\mu\mathrm{d}x$ soit la même que la somme des $f(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à chercher une fonction constante telle que l'aire sous la courbe de cette fonction soit la même que l'aire sous la courbe de la fonction f.
Or l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction constante μ vaut $(b-a)\mu$.
On a donc $(b-a)\mu = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Sur la figure ci-contre, l'aire grise et l'aire hâchurée sont égales quand μ est égale à la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[a\,;b]$.



Remarques.
- On note parfois $\overline{f}$ la valeur moyenne de f.
- La valeur moyenne de f est dans la même unité que celle de f.

3.4 Exercices

3.4.1 Primitives

Exercice 3.1.
Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer F, une primitive de f.

1. $f(x) = 5$;
2. $f(x) = x$;
3. $f(x) = 3x$;
4. $f(x) = 3x^2$;
5. $f(x) = -4x + 3$;
6. $f(x) = x^2$;
7. $f(x) = 7x - 1$;
8. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$;
9. $f(x) = 4x^3 + x$;
10. $f(x) = \frac{x-5}{3}$;
11. $f(x) = -5x^2$;
12. $f(x) = x^4$;
13. $f(x) = 2x^5 + 3x$;
14. $f(x) = \frac{3x^4+x}{2}$;
15. $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

Exercice 3.2.
1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'ensemble des primitives F de f sur l'intervalle I.
   (a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = -x^2 + 1$ sur $I = \mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$;
   (d) $f(x) = 5x + \dfrac{2}{x^2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
2. Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x^2}$.
   Déterminer les primitives F de f sur $]0\,;+\infty[$.
   Existe-t-il une primitive de f prenant la valeur 2 lorsque $x = 1$?

Exercice 3.3.
Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.

1. $f(x) = x^9$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$;
3. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$;
4. $f(x) = 2x^3 + \dfrac{3}{x^2}$;
5. $f(x) = 5x^2 + x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;
6. $f(x) = 2x - 7 - \dfrac{5}{x^3}$.

Exercice 3.4.
Pour chacune des fonctions f suivantes, donner une primitive F vérifiant la condition imposée.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$; $F(2) = 3$;
2. f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{3}{x^2}$; $F(3) = -1$.

Exercice 3.5.
Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, donner une primitive F.

1. $f(x) = 2(2x-1)^2$;
2. $f(x) = -(3-x)^3$;
3. $f(x) = 4(4x+3)^3$;
4. $f(x) = -(-5x-2)^3$;
5. $f(x) = (2x+1)^{-4}$;
6. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$;
7. $f(x) = (2x+1)^5$;
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$;
9. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+2\right)^3}$;
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$;
11. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
12. $f(x) = \dfrac{3x}{\left(2x^2+3\right)^3}$;
13. $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$;
14. $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$;

Exercice 3.6.
On considère la fonction f définie sur $]0\,;1[$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.
2. En déduire la primitive F de f sur $]0\,;1[$ vérifiant : $F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

Exercice 3.7.
On considère la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Étudier la limite de F en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. Étudier la limite de F en $-\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
3. Calculer la dérivée F' de la fonction F.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction F.

5. Résoudre l'équation $F(x) = 1$.
6. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
   Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(2) = 0$.

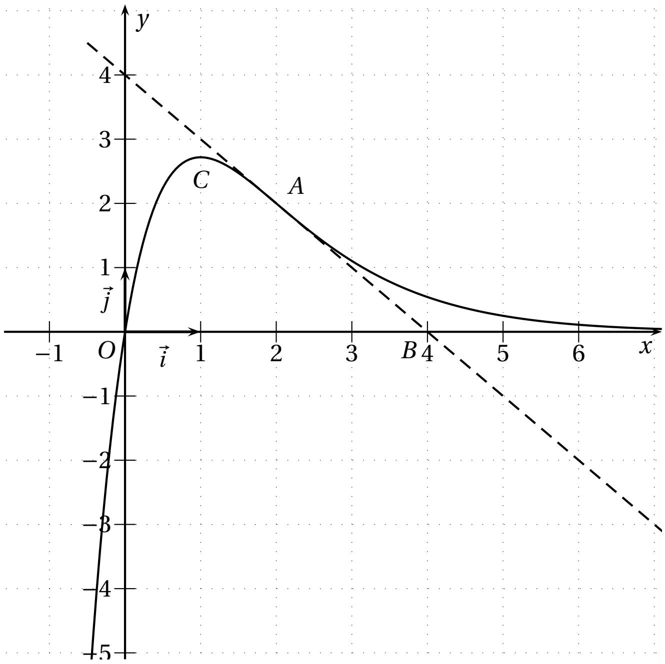
Exercice 3.8.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty\,; \frac{3}{2}\right[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x-6}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{4x-6}$.
2. En déduire une primitive de f sur $\left]-\infty\,; \frac{3}{2}\right[$.

Exercice 3.9.

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(2\,;2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Déterminer, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = \lambda$.
3. Une des représentations graphiques page ci-contre, figure 3.3, représente la fonction dérivée g' de g, une autre représente une primitive G de g sur $\mathbb{R}$. Déterminer lesquelles.
   Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

Exercice 3.10.

On a représenté page 58 la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ 2)$ et $C(-2\,;0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$;
   - $f(x) \leq 2$;
   - $f(x) \geq 3$;
   - $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques 3.5 page 58, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.
   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

Si vous avez bien suivi, les deux exercices précédents doivent vous rappeler des exercices déjà traités.

FIGURE 3.3 – Courbes de l'exercice 3.9

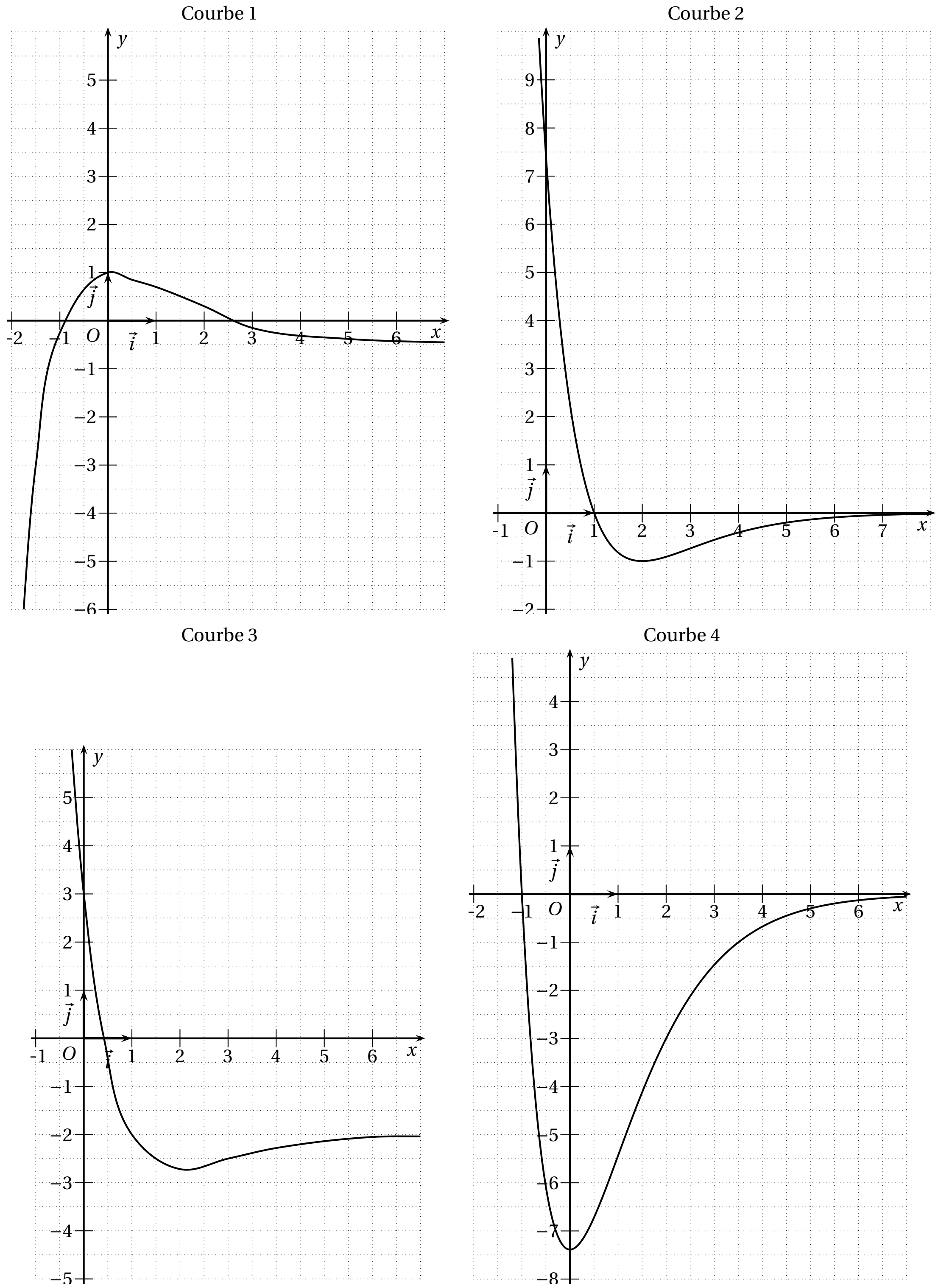


FIGURE 3.4 – Courbe de l'exercice 3.10

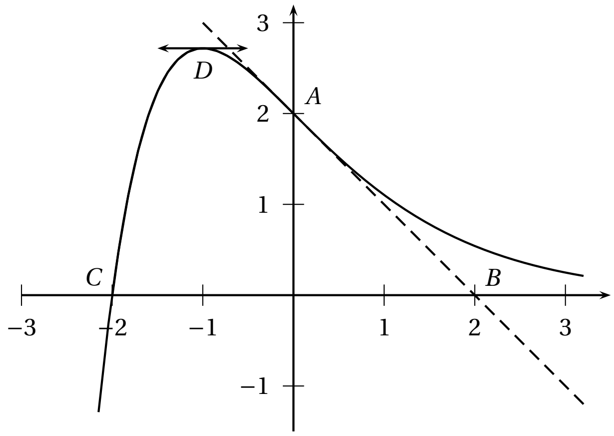
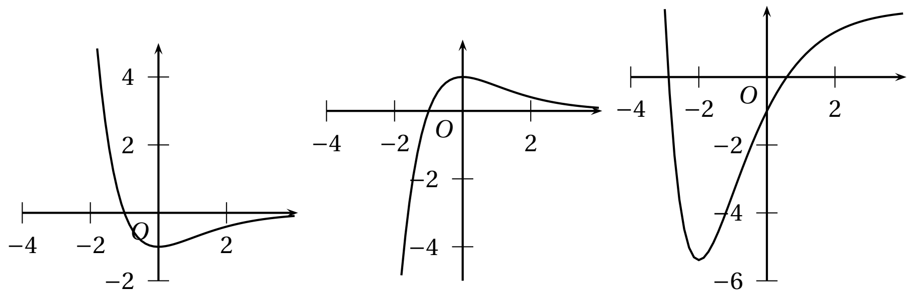


FIGURE 3.5 – Courbes de l'exercice 3.10



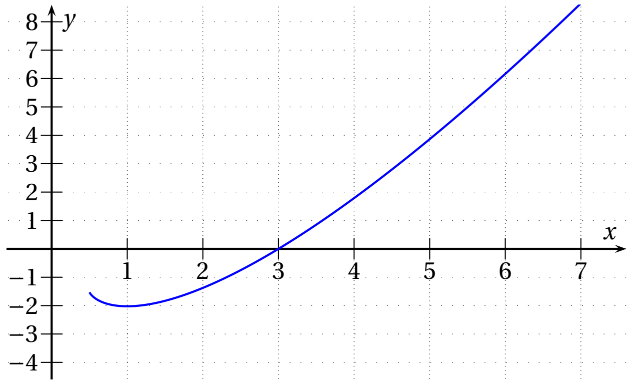
3.4.2 Calcul intégral

Exercice 3.11.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^3 (x+4)\,\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_2^0 (x^2+x)\,\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_0^{-2} 4t^3\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;
6. $\displaystyle\int_2^{-1} 3x^3\,\mathrm{d}x$;
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_4^0 \left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x$;
9. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t^2-1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_3^2 \frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$;
12. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$;
13. $\displaystyle\int_1^0 (2x+3)\left(x^2+3x-5\right)\mathrm{d}x$;
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;
15. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

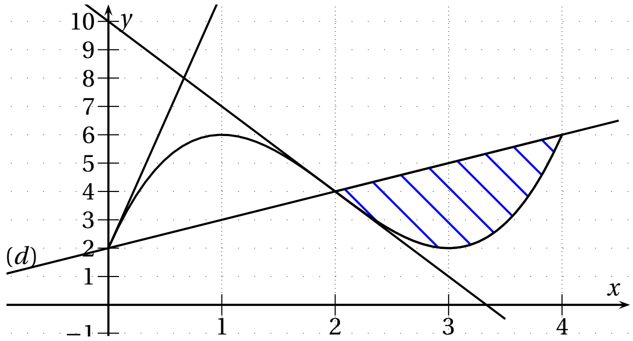
3.4.3 Sujets d'annales

Exercice 3.12 (D'après Amérique du Nord 2 007).
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre représente une fonction F définie et derivable sur l'intervalle $\text{J} = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.
On sait que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(3 ; 0)$ et a une tangente horizontale au point $(1 ; -2)$.
On note f la fonction dérivée de F.



1. À l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.
2. Donner $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x$.

Exercice 3.13 (D'après Centres étrangers 2 007).
On considère une fonction f définie et dérivable sur $I = [0 ; 4]$; sa courbe représentative est donnée ci-contre dans un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 2 , ainsi que la droite (d) d'équation $y = x + 2$.
Aux points d'abscisses 1 et 3 les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.

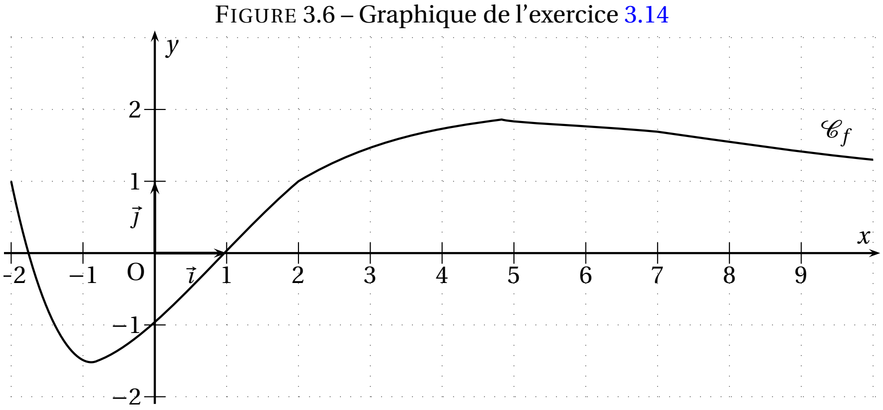


1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$; (b) $f(1)$ et $f'(1)$; (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leqslant x + 2$.
2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré exprimée en unités d'aire. Parmi les trois propositions suivantes, déterminer celle qui est exacte, en la justifiant par des arguments géométriques :
   (a) $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1$ (b) $1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 6$ (c) $6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$
3. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, où $m,\ n,\ p$ et q sont des réels.
   (a) En utilisant les résultats de la question 1 a, déterminer p et q.
   (b) En utilisant les résultats de la question 1 b, déterminer m et n.
4. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.
   (a) Démontrer que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.
   (b) Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré.

Exercice 3.14 (Polynésie 2005).
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2 ; 10]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ 3.6 page suivante est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
On précise que le point d'abscisse 4,83 de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 1,86 et que cette valeur est le maximum de la fonction f.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la primitive F de f qui s'annule en 1. On précise que le point $A(5 ; 5,43)$ appartient à $\mathscr{C}_F$.
On note $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.
Toutes les estimations graphiques seront données à 0,25 près. Les résultats des calculs numériques seront arrondis à 10^{-2}.

1. (a) Déterminer graphiquement sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses.
   (b) Déterminer, en justifiant, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en A.
   (c) Préciser, en justifiant, le sens de variation de F sur l'intervalle $[-2 ; 10]$.
2. (a) Déterminer $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\text{d}t$.
   (b) Rappeler la formule de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a ; b]$ et donner une interprétation de cette notion dans le cas où f est positive.
   (c) Donner la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

FIGURE 3.6 – Graphique de l'exercice 3.14



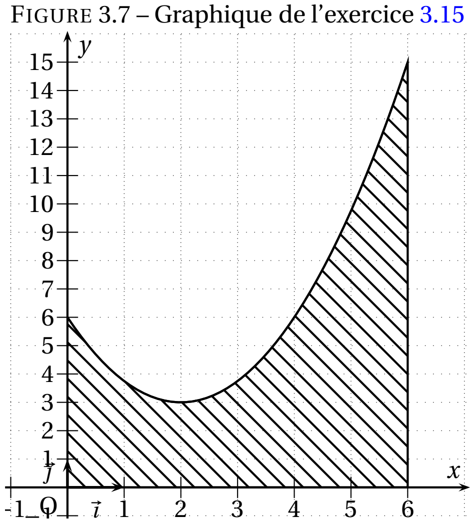
Exercice 3.15.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 6$ La courbe $(\mathscr{C}_f)$ 3.7 de la présente page est représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan d'origine O.

La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d' équation $x = 6$

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
2. On considère un point M appartenant à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x avec $x \in [0;6]$.
   La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H.
   La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K.
   On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK.
   Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;6]$, $R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.
3. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0;6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle OHMK soit égale à l'aire hachurée S.
   (a) Montrer que le problème précédent revient à résoudre l' équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par : $g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36$.
   (b) Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0;6]$ et dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0;6]$ une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α au centième.

FIGURE 3.7 – Graphique de l'exercice 3.15



Devoir surveillé n°4

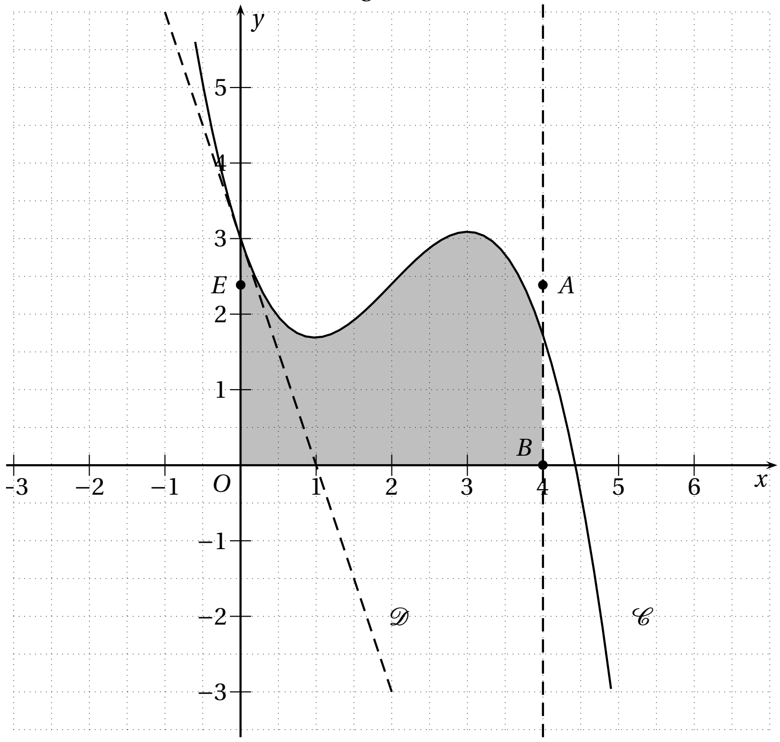
Statistiques – Calcul intégral – Équations de plans et de droites

Exercice 4.1 (5 points).

Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soient f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et $\mathscr{C}$ sa courbe tracée sur la figure 4.1 de la présente page. La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On appelle B, A et E les points de coordonnées respectives $(4;0)$, $\left(4;\frac{179}{75}\right)$ et $\left(0;\frac{179}{75}\right)$. Ces trois points n'appartiennent pas à la courbe $\mathscr{C}$.

FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.1



Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient. **Cocher sur l'énoncé, à rendre avec la copie, la réponse exacte**

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.*

1. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal à :

   ☐ $\dfrac{-1}{3}$ ☐ 5 ☐ -3

2. Sachant que l'aire grisée sur la figure est égale à l'aire du rectangle $OBAE$, la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$ est :

   ☐ $\dfrac{179}{75}$ ☐ $\dfrac{716}{75}$ ☐ $-\dfrac{179}{75}$

3. Sur l'intervalle $[0;4]$, l'équation $f'(x)=0$

   ☐ possède deux solutions distinctes. ☐ ne possède pas de solution. ☐ possède une unique solution.

4. Sur $[-1;2]$, la valeur moyenne de g, la fonction définie par $g(x)=6x^2+3$, est :

   ☐ -8 ☐ 0 ☐ 9

5. H est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^2+1$. On a :

   ☐ $H(0)=1$ ☐ $H(0)=\dfrac{4}{3}$ ☐ $H(0)=-\dfrac{4}{3}$

Exercice 4.2 (4 points).

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer, pour chacune des fonctions f suivantes définies sur $]0\,;+\infty[$, la primitive F vérifiant la condition indiquée :
   (a) $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ et $F(1) = 0$;
   (b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ et $F(2) = 1$.
2. Déterminer pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, une primitive :
   (a) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$;
   (b) $g(x) = (5x-1)^3$;
   (c) $h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Exercice 4.3 (5 points).

Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*

Le tableau suivant donne la production mondiale de sucre brut en millions de tonnes :

année x_i	1 920	1 940	1 960	1 970	1 980	1 990
production y_i	16,8	29,9	55,4	72	88	113,9

1. Dans le premier repère de la figure 4.3 page 64, représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$.
   Un ajustement affine semble-t-il pertinent ? Argumenter.
2. On pose $z_i = \sqrt{y_i}$.
   (a) Reproduire sur sa copie et compléter le tableau suivant (*on arrondira les résultats au dixième*) :

x_i	1 920	1 940	1 960	1 970	1 980	1 990
z_i						

   (b) Dans le second repère de la figure 4.4 page 64, construire le nuage des points de coordonnées $(x_i\,;\,z_i)$ associé à cette nouvelle série double.
   La forme du nuage permet-elle d'envisager un ajustement affine ? Argumenter.
   (c) Donner l'équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients au centième*) et la tracer.
   (d) À l'aide de cette équation estimer :
   - l'année x où la production atteindra 120 millions de tonnes ;
   - la production qu'on pouvait prévoir en 1 995 (arrondie au dixième).

   (e) La production de sucre en 1 995 a été de 116,4 millions de tonnes.
   Quelle est l'erreur commise en pourcentage avec la prévision du 2d ?
   L'ajustement est-il fiable ?

Exercice 4.4 (5 points).

Pour les élèves ***suivant*** *l'enseignement de spécialité.*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(9\,;-2\,;0)$ et $B(-12\,;4\,;2)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Soit $M(x\,;y\,;z)$. Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x-9}{-21} = \frac{y+2}{6} = \frac{z}{2}$.
   (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
2. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives :

$$\mathscr{P}_1 : 2x + 6y + 3z = 6 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P}_2 : 2x + 3y + 12z = 12.$$

   (a) Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
   (b) Montrer que A et B appartiennent à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$.
   (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
   (d) Représenter dans le repère de la figure 4.5 page 65, en vert, la trace de $\mathscr{P}_1$ sur chacun des plans de coordonnées et, en bleu, celle de $\mathscr{P}_2$.
   (e) En déduire, en rouge, la représentation de la droite (AB).

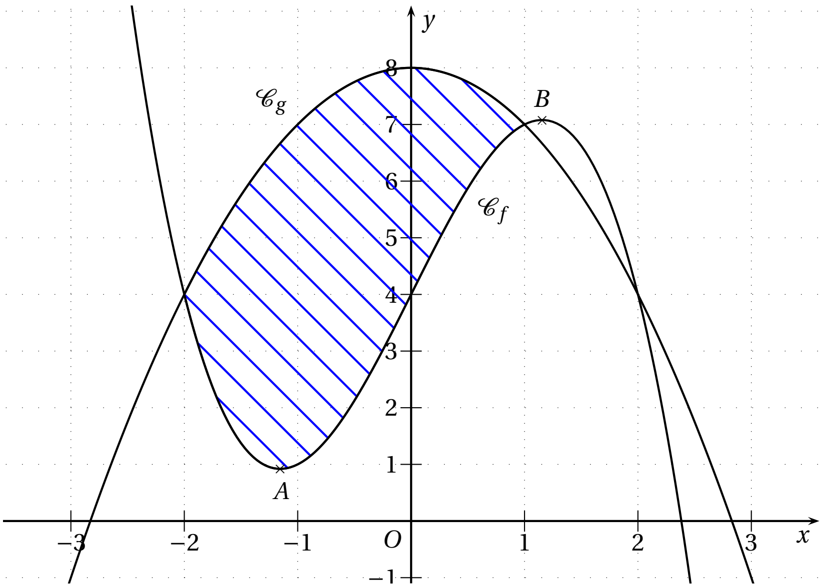
Exercice 4.5 (6 points).

On a tracé, sur le graphique 4.2 de la présente page, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les courbes représentatives de f et de g, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 4x + 4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 8$$

On appelle f' la fonction dérivée de f. A et B sont les sommets de $\mathscr{C}_f$.

FIGURE 4.2 – Graphique de l'exercice 4.5



1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 et la tracer sur la figure.
3. Déterminer les valeurs exactes des abscisses de A et de B.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α comprise dans l'intervalle $[2\,;3]$.
   (b) Donner une valeur approchée de α au dixième.
   (c) Dresser alors le tableau de signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
5. Soit F une primitive de f. À l'aide de ce qui précède et sans calcul, déterminer les variations de F.
6. (a) Déterminer $\mathscr{A}$, l'aire du domaine hachuré, en unités d'aire.
   (b) Sachant qu'une unité vaut 1,5 cm sur les abscisses et 0,75 cm sur les ordonnées, déterminer $\mathscr{A}$ en cm^2.

FIGURE 4.3 – Repère de l'exercice 4.3, question 1

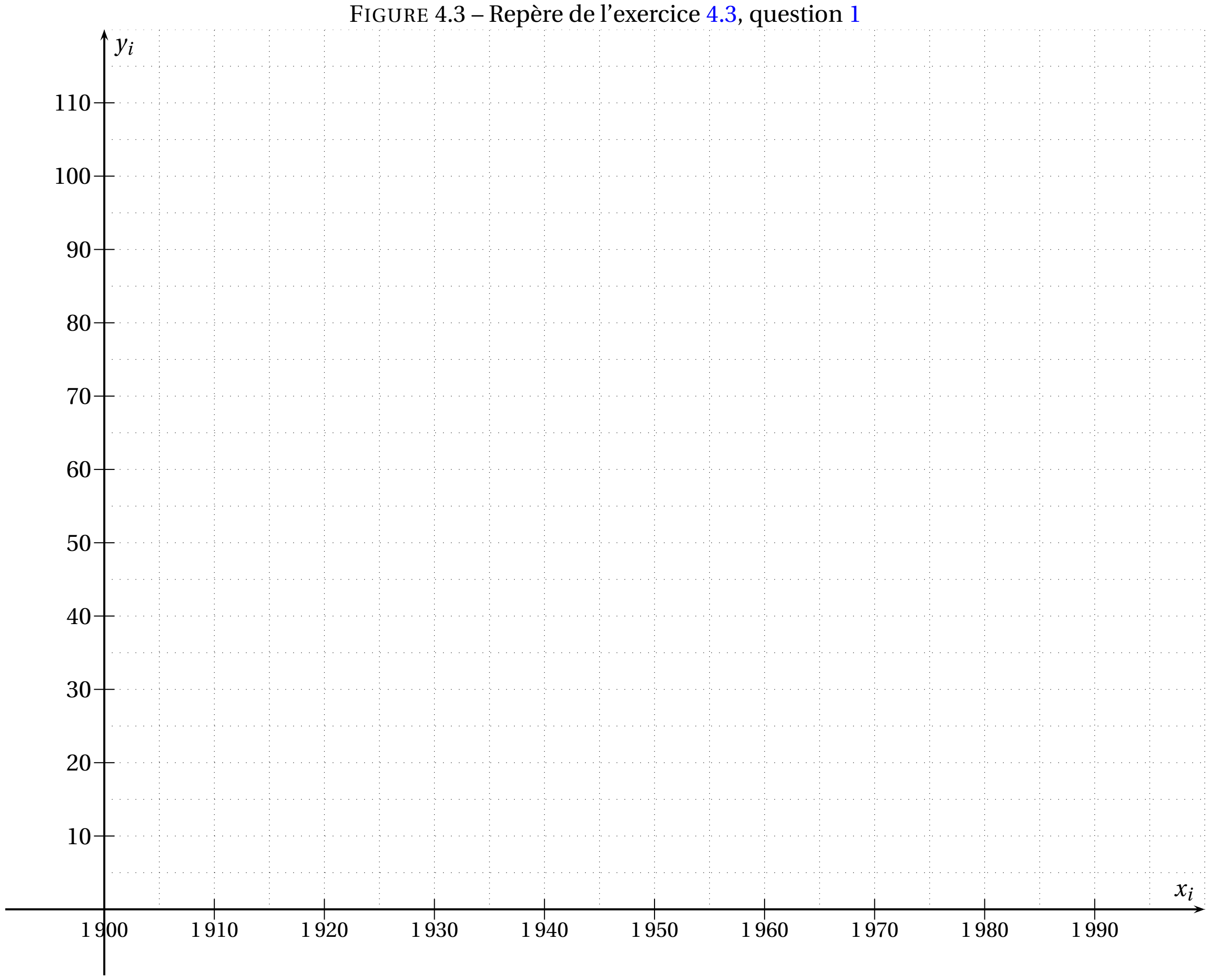


FIGURE 4.4 – Repère de l'exercice 4.3, question 2b

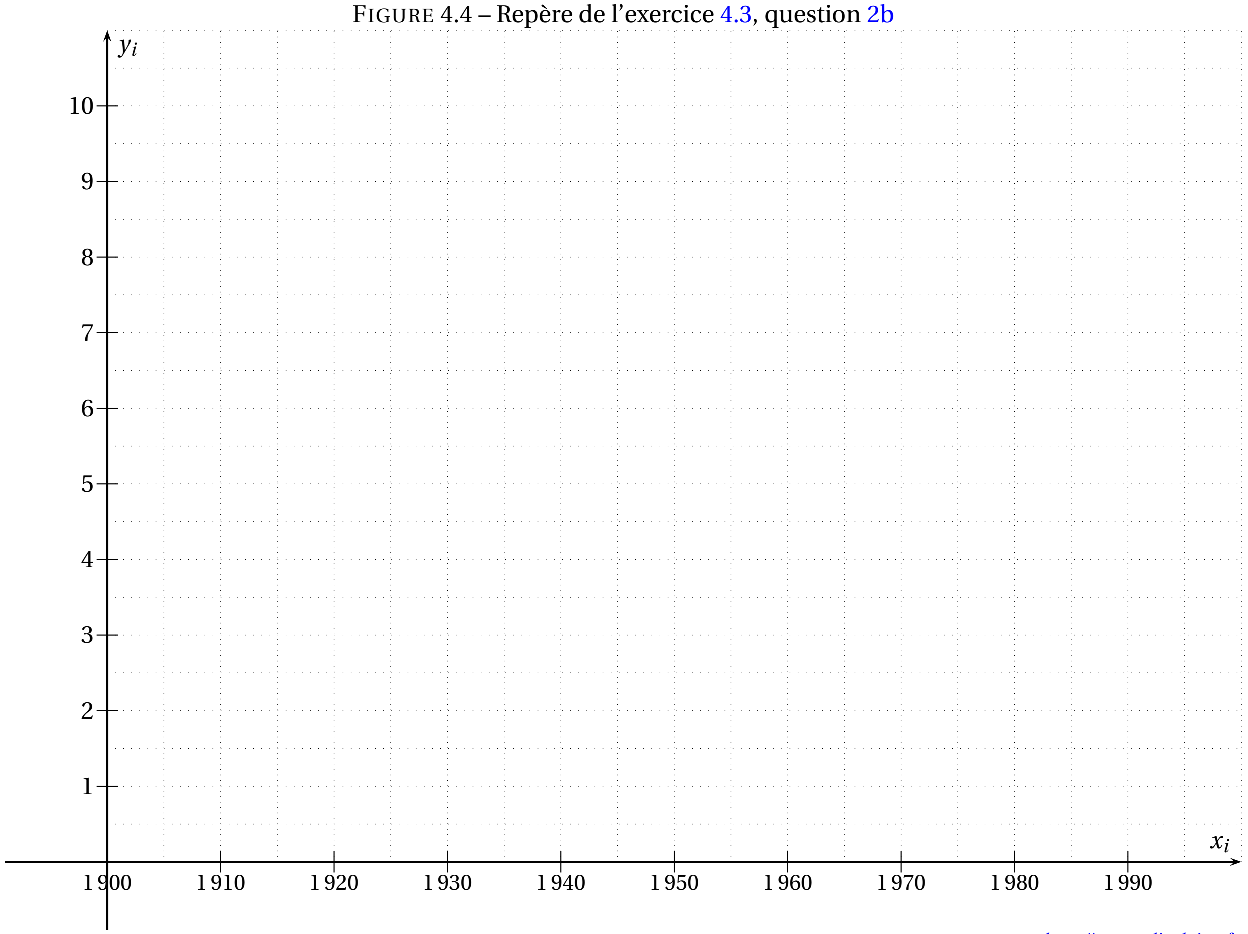
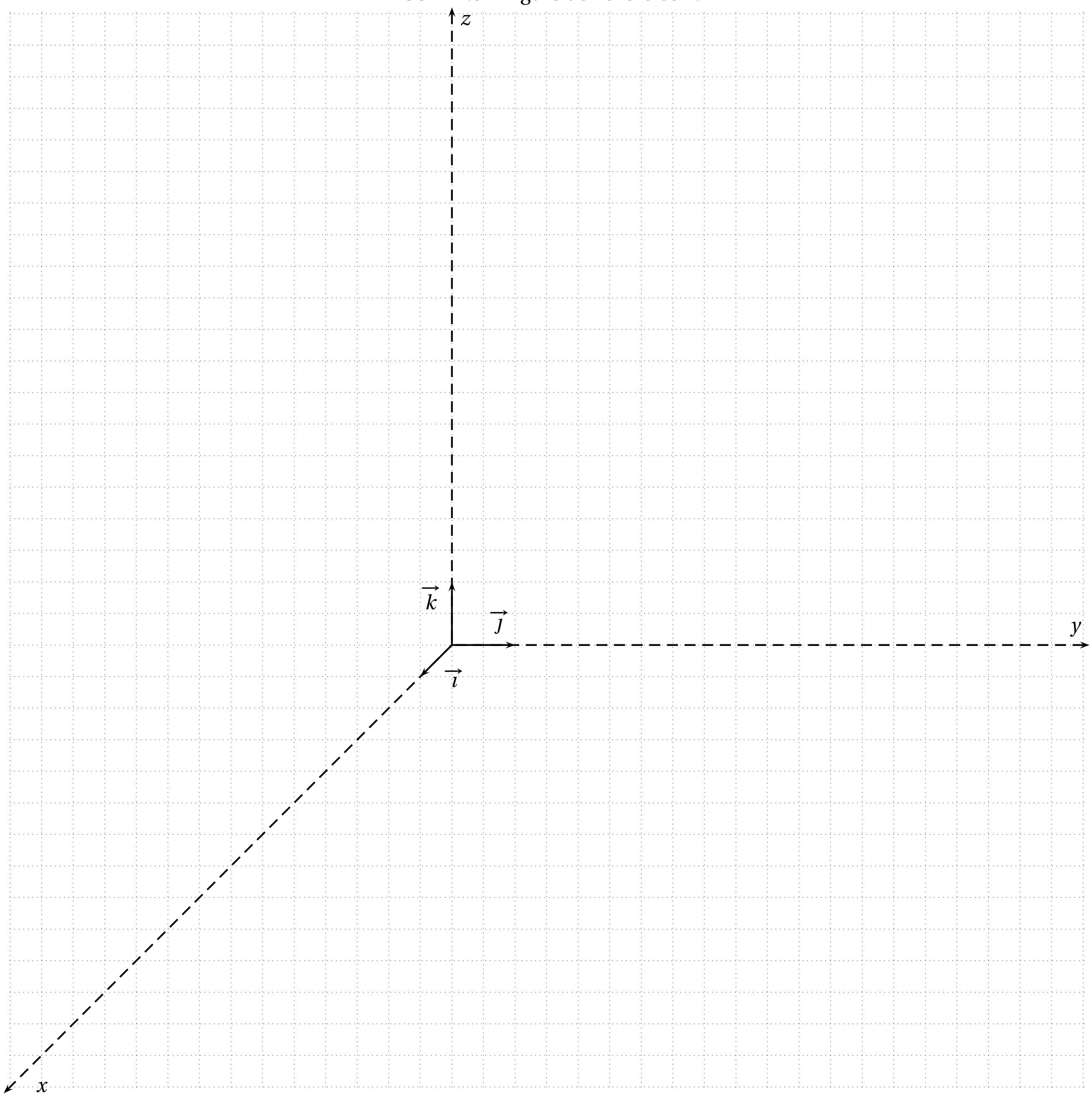


FIGURE 4.5 – Figure de l'exercice 4.4



Chapitre 4

Fonction logarithme népérien

Sommaire

4.1 Activités

Activité 4.1.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et G la fonction définie, pour tout réel x par $G(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f admet des primitives.
2. Soit F une primitive quelconque de f. Exprimer G en fonction de F et de x.
3. En déduire G'. En déduire que G est aussi une primitive de f.
4. Montrer que G est la primitive de f s'annulant en 1.

Plus généralement, on a la propriété suivante, qu'on admettra (la démonstration est identique à l'activité 4.1) :

Propriété 4.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit a un réel fixé de I. Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a.*

Activité 4.2.

Dans le chapitre 3, on a obtenu des primitives pour toutes les fonctions usuelles, sauf pour la fonction inverse. L'objectif de cette activité est de découvrir la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1 et quelques unes de ses propriétés.

On notera F la fonction définie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ qui est la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1.

1. Expliquer pourquoi F existe et est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Signe de $F(x)$ selon les valeurs de x.
   (a) Déterminer $F(1)$.
   (b) Expliquer pourquoi, lorsque $x > 1$, on a $F(x) > 0$.

(c) Expliquer pourquoi, lorsque $0 < x < 1$, $\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t > 0$.
En déduire le signe de $F(x)$ lorsque $0 < x < 1$.

3. Étudier le signe de $F'(x)$ selon les valeurs de x.
En déduire les variations de F.
4. (a) Montrer que $F(x)$ et $F(ax)$, où a est un réel positif fixé, ont des dérivées égales.
On rappelle que $\left(f(ax+b)\right)' = af'(ax+b)$.
(b) En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x > 0$, on ait $F(ax) = F(x) + C$.
(c) En posant $x = 1$, en déduire la valeur de C.
(d) En posant $x = b$, en déduire une propriété de la fonction F.

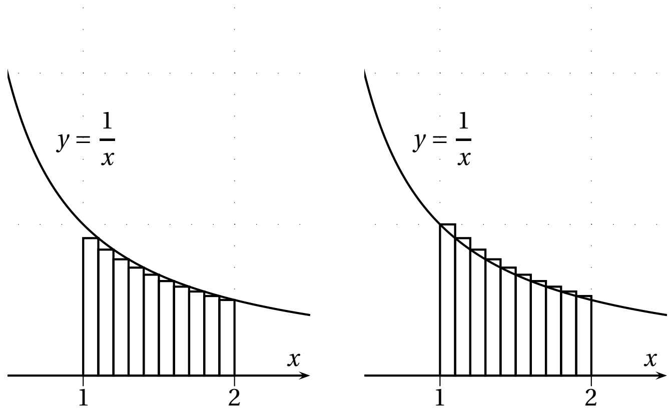
Définition. On appelle *logarithme népérien*, notée $\ln(x)$, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
La fonction logarithme népérien est donc la primitive de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln 1 = 0$$

Activité 4.3 (Encadrement de $\ln 2$).
On se propose d'obtenir un encadrement de $\ln 2$.

1. Calculer $f(1)$, $f(1,1)$, $f(1,2)$, …, $f(2)$.
2. On considère un repère orthonormal d'unité 1 cm. En découpant l'aire sous la courbe de la fonction inverse entre 1 et 2 en rectangle comme dans le schéma 4.1 de la présente page, en déduire un encadrement de $\ln 2$.

FIGURE 4.1 – Graphique de l'activité 4.3



Activité 4.4.
On se propose d'étudier les limites de la fonction logarithme aux bornes de son ensemble de définition : $]0\,;+\infty[$ et de tracer sa courbe représentative.

1. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	100
$\ln x$										

(b) Déterminer, à l'aide de la calcultrice, une valeur de x telle que $\ln x > 100$.
(c) Comment semble se comporter la fonction logarithme quand x devient grand ?

2. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\ln x$										

(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur de x telle que $\ln x < -100$.
(c) Comment semble se comporter la fonction logarithme quand x tend vers 0 ?

3. Tracer la courbe représentative de la fonction logarithme dans un repère orthonormal.

Activité 4.5. 1. Montrer que l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;3]$.
On notera e cette solution.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée à 10^{-2} de e.

4.2 Fonction logarithme népérien

4.2.1 Définition

Définition 4.1. On appelle *logarithme népérien*, notée $\ln(x)$, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
La fonction logarithme népérien est donc la primitive de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln 1 = 0$$

Remarques.
- On peut écrire $\ln x$ à la place de $\ln(x)$ quand il n'y a aucun risque de confusion.
- On admettra que cette fonction est continue.

4.2.2 Limites

Propriété 4.2. *Soit $x \mapsto \ln x$ la fonction logarithme népérien.*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

On l'admettra.

Remarque. L'axe des ordonnées est donc une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

4.2.3 Variations

Propriété 4.3. *La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et on a :*

x	0		1		$+\infty$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\|$		$+$		
$\ln x$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve. La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse, or quand $x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$.
La dérivée de $\ln x$ est donc strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ ce qui implique que la fonction $\ln x$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. ◊

4.2.4 Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction logarithme est donnée par la figure 4.2 page suivante.

4.2.5 $\ln u$

Propriété 4.4. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u > 0$. Alors :*
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- *u et $\ln u$ ont les mêmes variations*

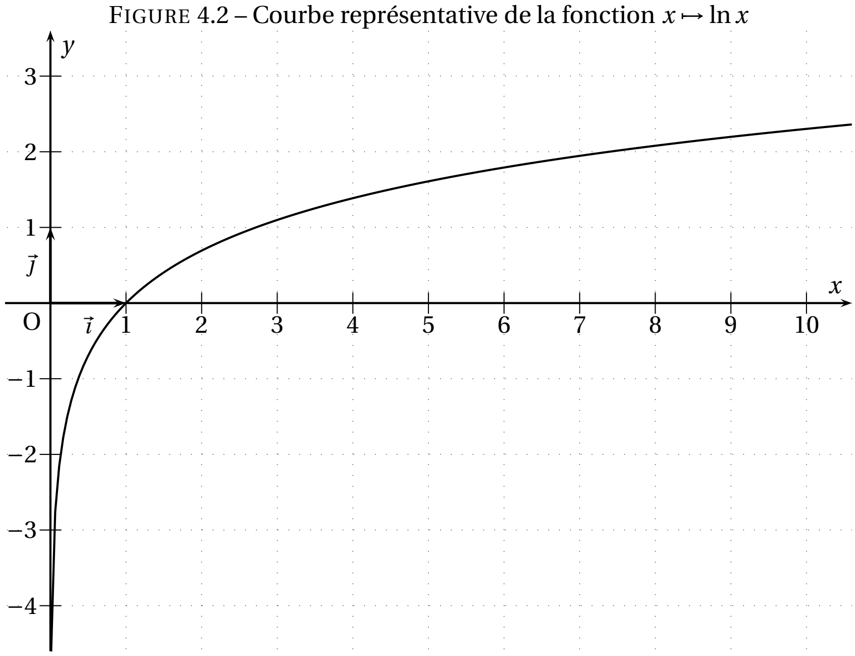
Preuve.
- On sait que $(v \circ u)' = u' \times v'(u)$. En posant $v(x) = \ln x$, il vient $(\ln u)' = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$.
- Comme $u > 0$, $(\ln u)'$ est du signe de u', donc u et $\ln u$ ont les mêmes variations.

◊

Propriété 4.5. *La primitive d'une fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f = \frac{u'}{u}$ est $F = \ln|u|$.*

Preuve. Si f peut s'écrire sous la forme $f = \frac{u'}{u}$, on a forcément $u(x) \neq 0$, donc F est bien définie.
Soit I l'ensemble sur lequel $u > 0$ et J celui sur lequel $u < 0$.
Sur I on a $F = \ln u$ et $F' = \frac{u'}{u} = f$, donc F est bien une primitve de f sur I.
Sur J on a $F = \ln(-u)$ et $F' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u} = f$, donc F est bien une primitive de f sur J. ♢

FIGURE 4.2 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$



4.2.6 Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien

Formes déterminées

Les limites suivantes ne sont pas des formes indéterminées (n est un entier quelconque strictement positif). Le lecteur est invité à les compléter

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^n\ln(x) = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln(x)}{x} = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln(x)}{x^n} = \ldots\ldots$

Formes indéterminées

Pour les formes indéterminées, on admettra les résultats suivants :

Propriété 4.6. *Soit n un entier naturel strictement positif. On a :*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n\ln(x) = 0$

On pourra retenir cette propriété sous la forme : dans ces cas d'indétermination là, $\ln(x)$ est négligeable par rapport à x.

4.3 Propriétés algébriques du logarithme népérien

Théorème 4.7. *Pour tous réels a et b strictements positifs, on a :* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Preuve. Ce théorème a été démontré à la question 4 de l'activité 4.2. ♢

Propriété 4.8. *Pour tous réels a et b strictements positifs et tout entier relatif n, on a :*
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n\ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$

Preuve.
- $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ d'une part, $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ d'autre part, donc $\ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = \ln\left(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{\ln a + \ln a + \cdots + \ln a}_{n \text{ fois}} = n\ln a$
- $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln a$ d'une part, $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$ d'autre part, donc $\ln a = 2\ln\left(\sqrt{a}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$

♢

4.4 Équations et inéquations comportant un logarithme

4.4.1 Quelques propriétés

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante, on obtient :

Propriété 4.9. *Pour tous réels a et b strictements positifs, on a :*
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

Ainsi que :

Propriété 4.10. *Pour tout réel x strictement positif :*
- $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Remarque. On peut résumer la propriété précédente par le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Preuve. Cela découle directement du tableau de variations de la fonction logarithme. ♢

4.4.2 Résoudre $\ln x = m$

L'équation a une unique solution

Théorème 4.11. *Pour tout réel m, l'équation* $\ln x = m$ *admet une unique solution.*

Preuve. La fonction logarithme est continue et strictement croissante, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $m \in]-\infty\,;+\infty[$, l'équation $\ln x = m$ admet une unique solution. ♢

Le nombre e

Définition 4.2. On note e le nombre tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.

Remarques.
- Un tel nombre existe forcément d'après le théorème précédent.
- $\mathrm{e} \approx 2{,}71828\ldots$

e^m

Pour tout entier relatif, $\ln(\mathrm{e}^n) = n\ln \mathrm{e} = n$. De façon générale, même quand m n'est pas entier, on notera e^m l'unique solution de l'équation $\ln x = m$.

Propriété 4.12. *Pour tout réel m,* $\ln(\mathrm{e}^m) = m$.

4.5 Exercices

Exercice 4.1 (Encadrement de $\ln 3$).
En procédant comme dans l'activité 4.3 page 68, déterminer un encadrement de $\ln 3$.

Exercice 4.2.
Déterminer sur quel intervalle chacune des fonctions suivantes est définie :

1. $f(x) = \ln(x+3)$
2. $f(x) = \ln x + 3$
3. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
4. $f(x) = x + \ln\left(x^2\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

Exercice 4.3.
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x+3)$
2. $f(x) = \ln x + 3$
3. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
4. $f(x) = x + \ln\left(x^2\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$
6. $f(x) = x \ln x$
7. $f(x) = \ln x + \ln(x+1)$
8. $f(x) = \ln[x(x+1)]$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

Exercice 4.4.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln 6 - \ln 2$
2. $\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\ln 3 - \ln 9$
4. $\ln 2 + \ln 4 - \ln 8$
5. $\frac{1}{4}\ln 81$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ln\sqrt{3}$
7. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$
8. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\right) - \ln(\sqrt{3}-1)$

Exercice 4.5. 1. Donner, en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 5$ les valeurs de :

(a) $\ln 10$
(b) $\ln 25$
(c) $\ln 16$
(d) $\ln 400$
(e) $\ln\left(\frac{2}{25}\right)$
(f) $\ln\left(\frac{1}{100}\right)$
(g) $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
(h) $\ln 0,4$
(i) $\ln\sqrt{5}$
(j) $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
(k) $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$
(l) $\ln\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

2. a et b étant deux réels strictements positifs, donner en fonction de $\ln a$ et de $\ln b$ les valeurs de :

(a) $\ln\left(\dfrac{a}{b^2}\right)$
(b) $\ln\left(a^3 \times b^5\right)$
(c) $\ln\left(ab^3\right)$
(d) $\ln\left(\dfrac{b^2}{a^3}\right)$
(e) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$
(f) $\dfrac{\ln a}{\ln\left(ab^2\right)}$
(g) $\dfrac{\ln\left(ab^4\right)}{\ln b}$

Exercice 4.6.
Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}\right)$.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire le sens de variations de f.

Exercice 4.7.
Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Calculer, de deux façons différentes, la dérivée de la fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 4.8.
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln x > 1$
2. $\ln x = 2$
3. $\ln x < -1$
4. $3 - \ln x \leqslant 0$
5. $\ln x = -3$
6. $2\ln(x+1) = 0$
7. $\dfrac{1}{\ln x + 1} > 0$
8. $\ln(2x+1) = 1$
9. $\ln\left(x^2\right) = -1$
10. $\ln[x(x+1)] = 0$
11. $\ln x + \ln(x+1) = 0$
12. $2\ln x - 1 = 0$
13. $2x\ln x + x = 0$
14. $(x-1)(1+\ln x) = 0$
15. $x\ln(x+2) = 0$
16. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

Exercice 4.9.
Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f a des primitives et déterminer une primitive de f.

1. $f(x) = \dfrac{2}{2x-3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{5}{5-x}$
5. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$
6. $f(x) = -\dfrac{3x}{2x^2+5}$
7. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$
8. $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Exercice 4.10.
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ pour $x > -1$.

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{d}{(x+1)^2}$
2. En déduire l'expression de la primitve de f qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 4.11.
1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4.12 (Antilles–Guyane 2 005).
Soit f une fonction dont le tableau de variations, incomplet est le suivant ; on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\cdots$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\cdots$

On admet que f est définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.
2. En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variations ci-dessus, montrer que l'on a : $a = 1$, $b = -1$, $c = 4$.
3. Déterminer les limites manquantes dans le tableau de variations fourni.
4. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet comme asymptote la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote $\mathscr{D}$.
5. Déterminer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 \left[f(x) - (x-1)\right]\mathrm{d}x$ et interpréter le résultat en terme d'aire.

Exercice 4.13 (Amérique du Nord 2 007).
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Première partie

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x+b)$, où a et b sont deux réels.
Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$.
On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\dfrac{1}{2}$		0		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

1. Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.

2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 4.14 (Asie Juin 2 007).

Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $[1\,;6]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$.
$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.
La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;6]$. On note f' sa fonction dérivée.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Montrer que pour tout nombre reel x appartenant à l'intervalle $[1\,;6]$, $f'(x) = \dfrac{-2(x-1)(x-4)}{x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (d) Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. (a) Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (c) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel : Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;\,b]$, est le nombre m tel que : $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.15 (Polynésie 2 006).

On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f définie sur $]-2\,;+\infty[$, passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(-1\,;0)$, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = x+1$.

1. (a) À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.
   (b) Donner une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$.
2. Nous savons qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x > -2$: $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\ln(x+2)$.
   (a) Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.
   (b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c.
   (c) En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.
   (d) En déduire les valeurs de a, b et c.

Exercice 4.16.

Partie A

Soient les fonctions f et g définies sur $[0\,;9]$ par $f(x) = \dfrac{10}{1+x} - 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{2}$.

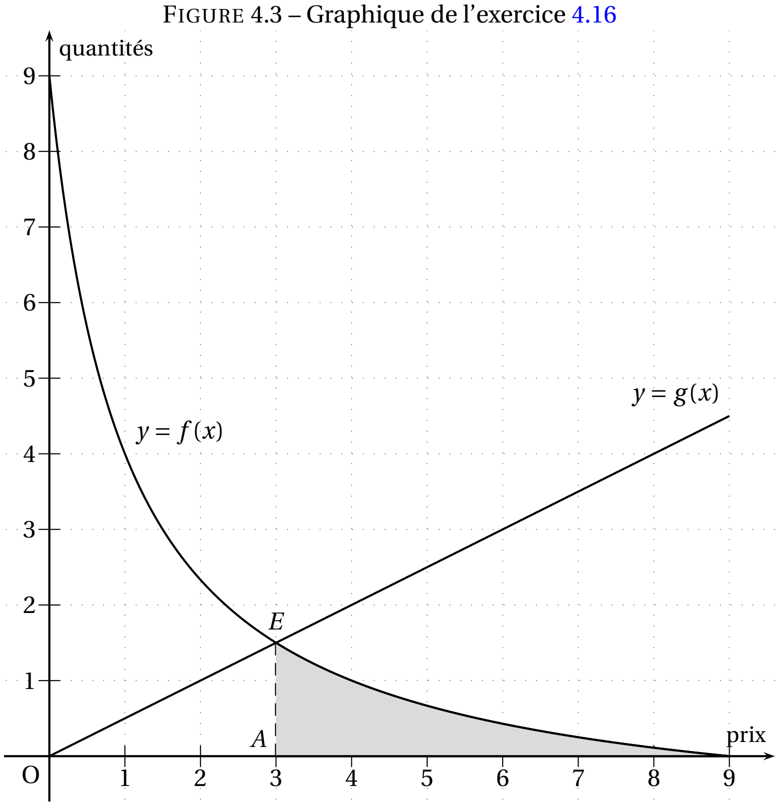
1. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_3^9 f(x)\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B

Un produit conditionné en boîte est mis sur le marché.
On désigne par x le prix d'une boite de ce produit en dizaine d'euros.
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x applliqué sur le marché est donné par $f(x)$ en centaines de boîtes.
On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs en fonction de prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donné par $g(x)$ en centaine de boîtes.
Sur le graphique 4.3 page suivante sont tracées dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.
   (a) Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 € la boîte ?

FIGURE 4.3 – Graphique de l'exercice 4.16



(b) Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché atteint son équilibre.
Donner le prix d'équilibre, en euros, et le nombre de boîtes correspondant.

2. (a) D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre. On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'euros par l'aire du triangle OAE (une unité d'aire correspond à un millier d'euros). Calculer ce surplus en euros.

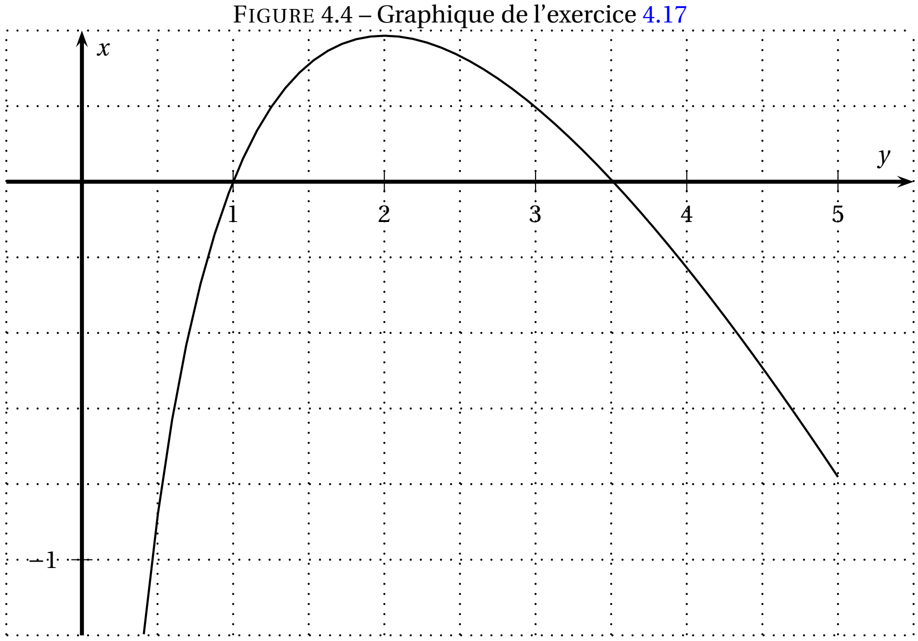
   (b) Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3 \leq x \leq 9$). Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.

Exercice 4.17 (Centres étrangers 2 006).

On désigne par f la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par : $f(x) = 1 - x + 2\ln x$. La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure 4.4 page suivante est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer la limite de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau des variations de f.
3. (a) Calculer $f(1)$.
   (b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3\,;\,4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par : $g(x) = x\left(-\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2} + 2\ln x - 1\right)$.
   (a) Montrer que g est une primitive de f sur $]0\,;\,5]$.
   (b) Sur le graphique ci-dessous, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ située au-dessus de cet axe. Montrer que l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine est égale, en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.
   (c) Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2. On utilisera la valeur approchée de α trouvée au 3 b.

FIGURE 4.4 – Graphique de l'exercice 4.17



Exercice 4.18 (France 2 007).
Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

Partie I : étude des coûts hebdomadaires de production

1. Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit. Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $C_m(x) = x + \dfrac{16}{x+1}$. ($C_m(x)$ est exprimé en centaines d'euros, x en kilogrammes).
   Étudier les variations de la fonction C_m, puis dresser le tableau de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
2. En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production. Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m.
   Déterminer la fonction C, primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

Partie II : étude du bénéfice hebdomadaire.

On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu. Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse x (exprimée en kilogrammes) de médicament produit. Il peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ par : $B(x) = 9x - 0,5x^2 - 16\ln(x+1)$.

La représentation graphique de la fonction B dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe (Γ) donnée par la figure 4.5 page suivante.

1. (a) On admet que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;\,7]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[7\,;\,10]$.
   En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.
   (b) Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).
2. (a) Utiliser la courbe (Γ) pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité x_0 de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.
   (b) Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de x_0 approchée au centième.

FIGURE 4.5 – Graphique de l'exercice 4.18

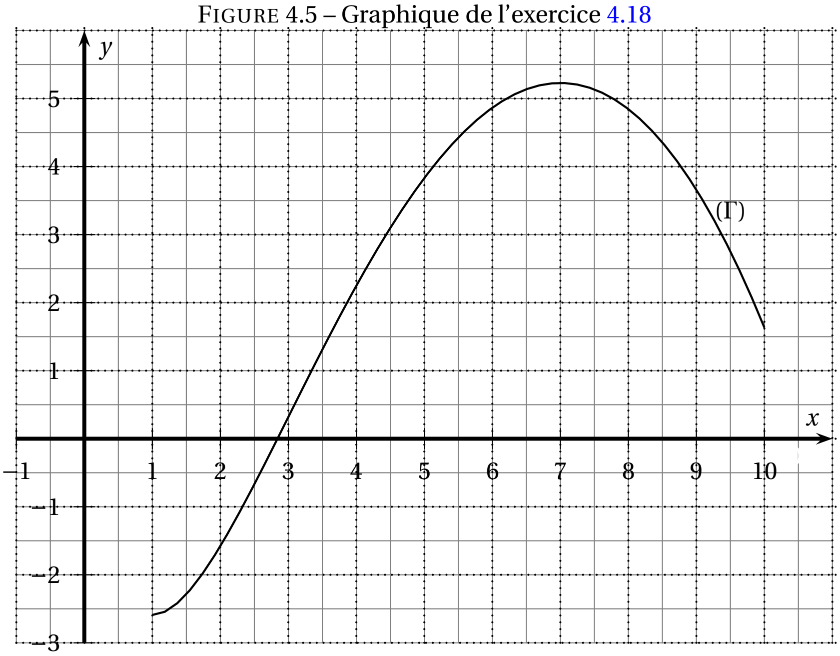
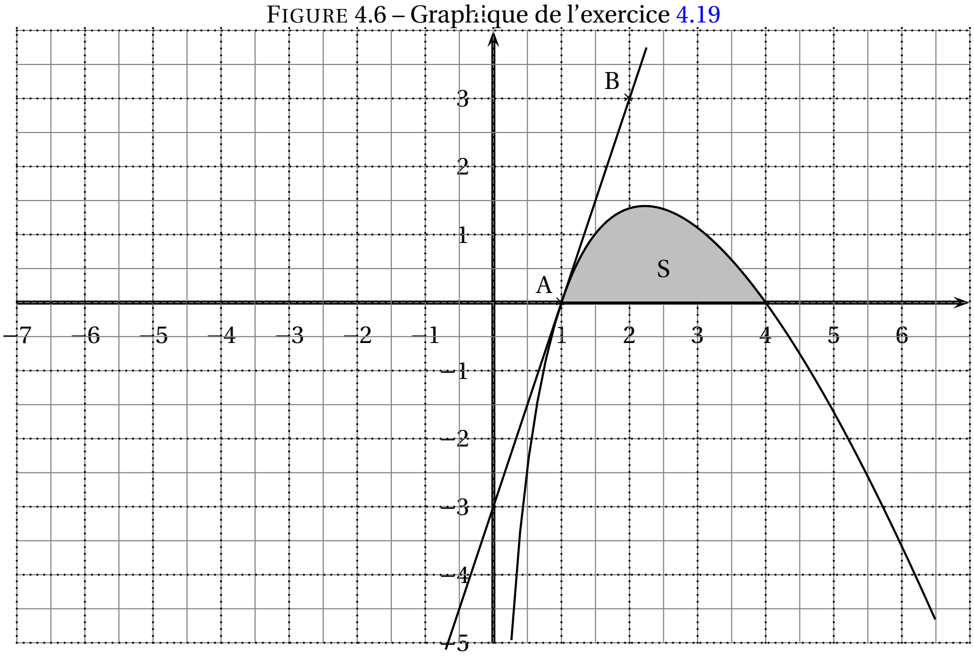


FIGURE 4.6 – Graphique de l'exercice 4.19



Exercice 4.19 (Liban 2 007).

On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure 4.6 de la présente page dans le plan muni d'un repère orthonormal.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(1 ; 0) et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

Partie A

Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln x$ où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(4)$ et $f'(1)$.
3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 4a+b & = & 0 \\ a+b & = & 3 \end{array}\right.$

   Déterminer a et b.

Partie B

On admet que la fonction précédente est définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (4-x)\ln x$.

On appelle S l'aire hachurée sous la courbe $\mathscr{C}$.

1. Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\frac{x^2}{2}-8x\ln x+8x\right)$.
   Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I}=\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner une valeur arrondie à 10^{-1} de S exprimée en unités d'aire. Justifier.

Exercice 4.20 (Nouvelle Calédonie 2 006).

Partie A : Étude préliminaire

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$

x	3		-2		$+\infty$
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	2

1. On note f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln[g(x)]$.
   (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de f en (-2) et la limite de f en $+\infty$, puis donner le tableau de variations de f.
2. Soit G la primitive de la fonction g sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$ qui est telle que : $G(-2)=0$.
   Démontrer que la fonction G admet un minimum en (-2).

Partie B

Dans cette partie, la fonction g est la fonction définie sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$ par : $g(x)=2-\frac{2}{x+3}$.

1. En utilisant cette définition de la fonction g retrouver tous les renseignements donnés dans le tableau de variation de la partie A.
2. Comme dans la première question de la partie A, on définit la fonction f par :

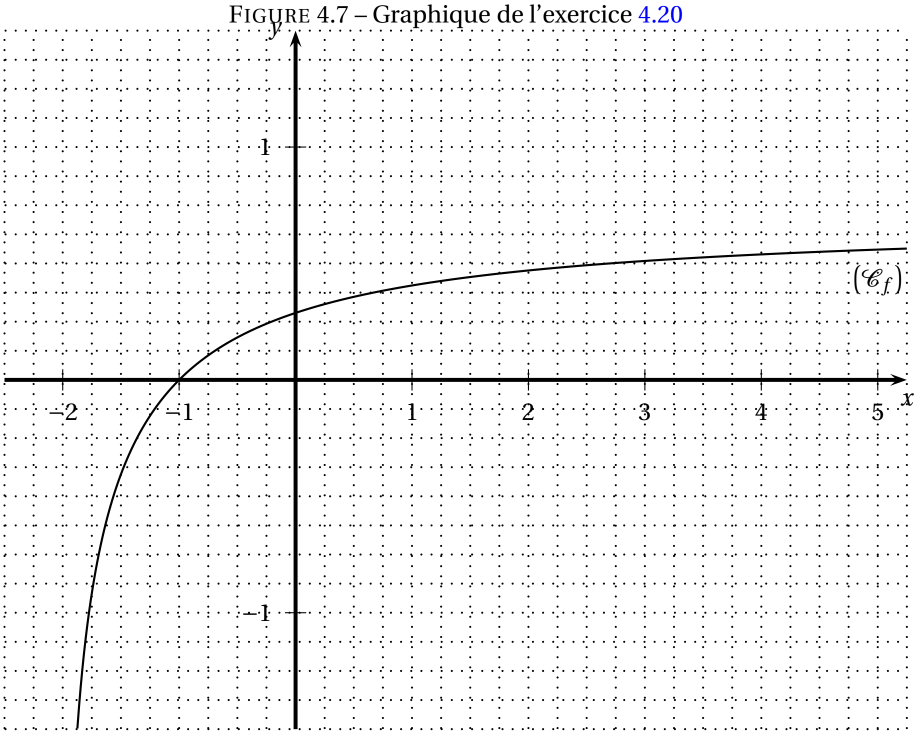
   $$\text{pour tout } x \text{ élément de l'intervalle }]-2\,;+\infty[,\ f(x)=\ln\left(2-\frac{2}{x+3}\right)$$

   Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de cette fonction f relativement à un repère orthogonal. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est représentée sur la figure 4.7 fournie en annexe page suivante.
   (a) La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet-elle des asymptotes ? Justifier.
   Si oui, en donner des équations et les tracer sur la figure fournie en annexe.
   (b) La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un point A. En utilisant l'expression de $f(x)$ déterminer les coordonnées du point A et placer ce point sur la figure fournie en annexe.
   (c) Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en son point d'abscisse (-1). Tracer la droite (T) sur la figure fournie en annexe.
3. Comme dans la deuxième question de la partie A, on définit la fonction G par :

   $$G \text{ est la primitive sur l'intervalle }]-3\,;+\infty[\text{ de la fonction } g : x\mapsto 2-\frac{2}{x+3} \text{ et } G(-2)=0$$

   Calculer $G(x)$ pour x réel de l'intervalle $]-3\,;+\infty[$.

FIGURE 4.7 – Graphique de l'exercice 4.20



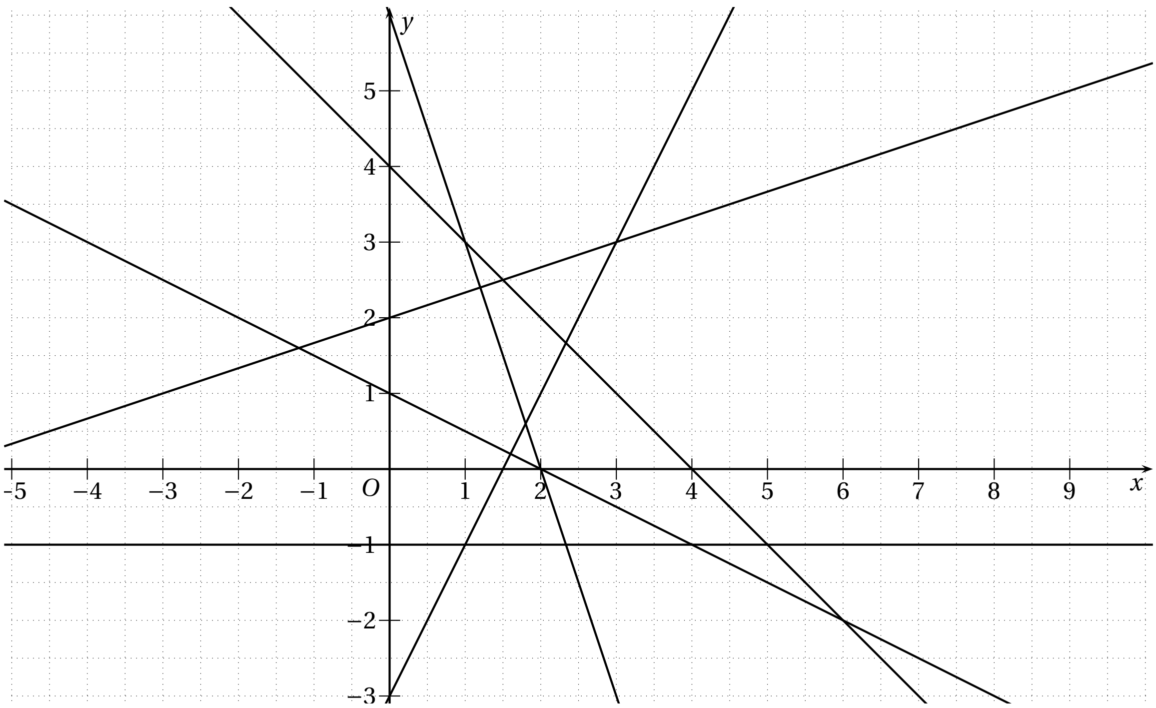
Aide : retour sur la notion de dérivation

Sommaire

I Prérequis

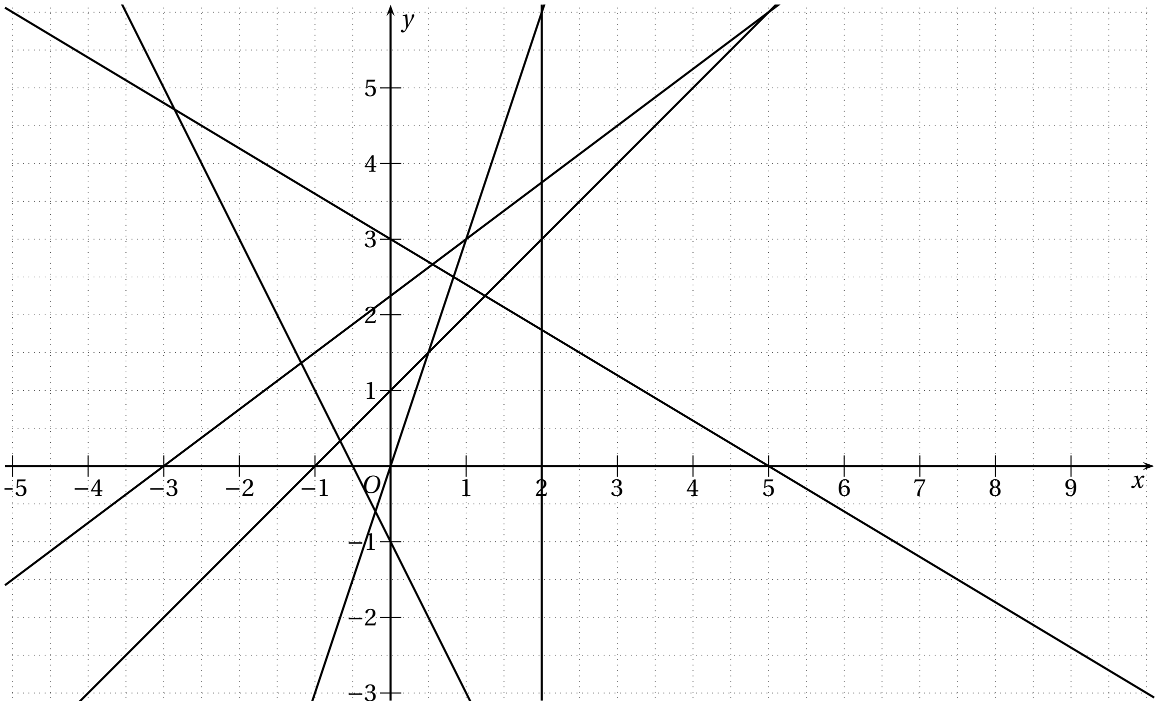
Activité I.1. 1. Déterminer graphiquement les coefficients directeurs m des droites de la figure I.1 de la présente page (on les indiquera sur le graphique).

FIGURE I.1 – Figure de l'activité I.1



2. Même question pour les droites de la figure I.2 de la présente page.

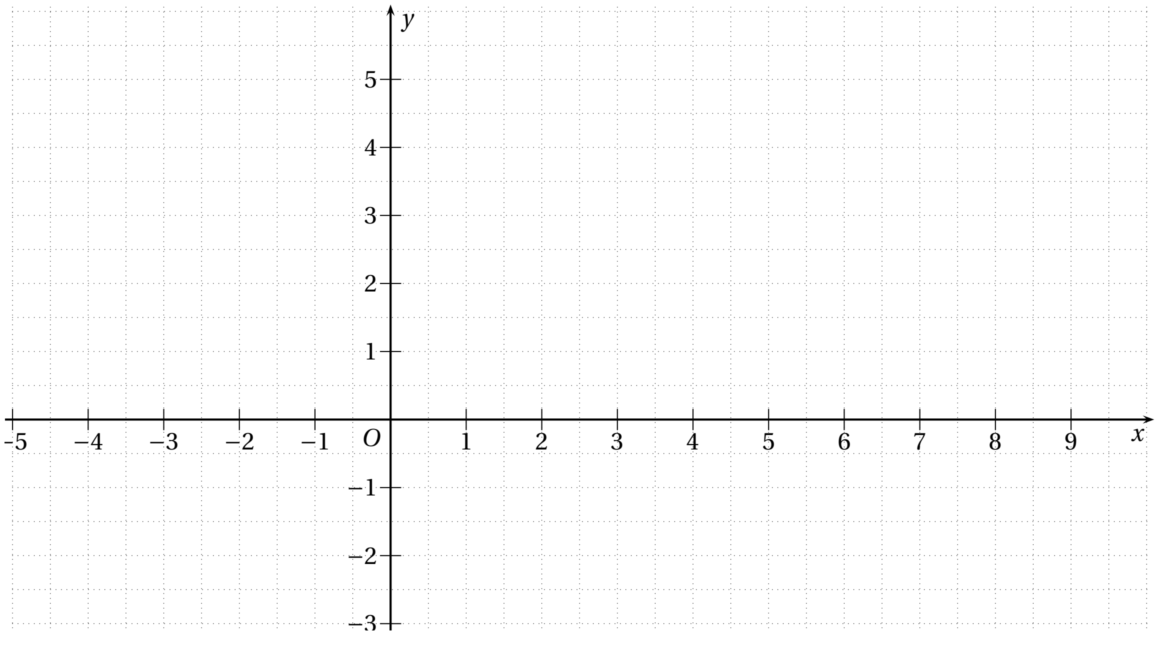
FIGURE I.2 – Figure de l'activité I.1



Activité I.2.
Dans le repère de la figure I.3 de la présente page, représenter les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(0;1)$ et de coefficient directeur $m=2$;
- $\mathscr{D}_2$ passant par le point $B(1;0)$ et de coefficient directeur $m=-1$;
- $\mathscr{D}_3$ passant par le point $C(-1;-1)$ et de coefficient directeur $m=\frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_4$ passant par le point $D(1;2)$ et de coefficient directeur $m=-\frac{2}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$ passant par le point $E(2;-3)$ et de coefficient directeur $m=\frac{3}{5}$;
- $\mathscr{D}_6$ passant par le point $A(0;3)$ et de coefficient directeur $m=0$;

FIGURE I.3 – Figure de l'activité I.2



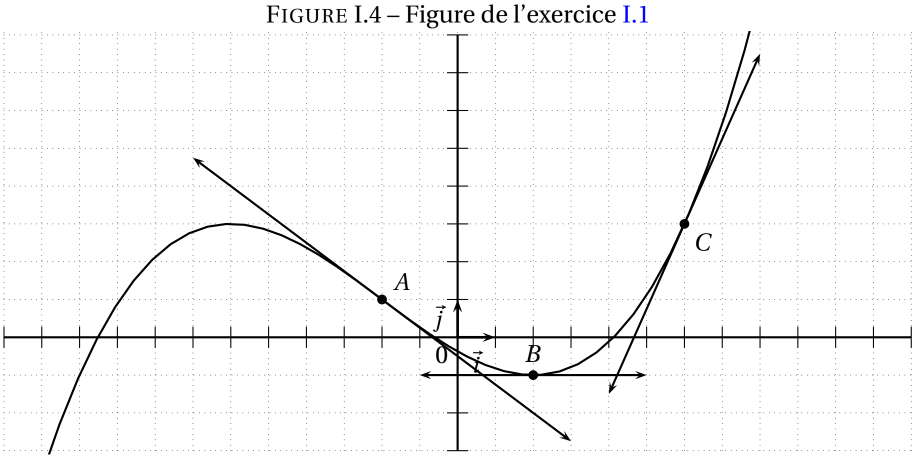
II Lectures graphiques de nombres dérivés

Exercice I.1.

On donne sur la figure I.4 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

FIGURE I.4 – Figure de l'exercice I.1



Exercice I.2.

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure I.5 page suivante est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_2 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1\,;26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.

Exercice I.3.

On donne sur la figure I.6 page suivante la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

FIGURE I.5 – Figure de l'exercice I.2

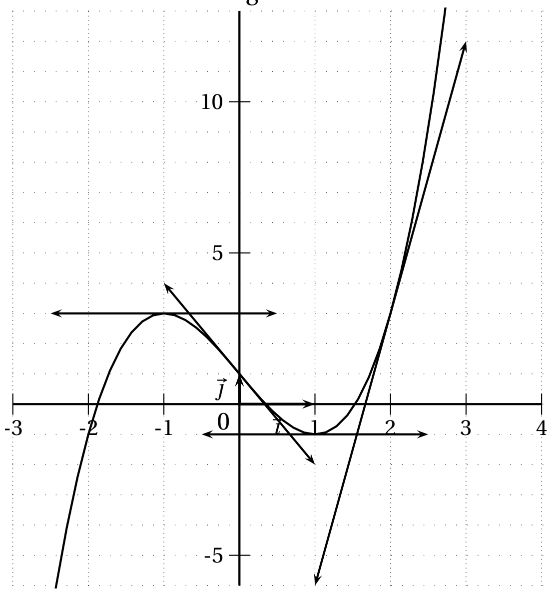
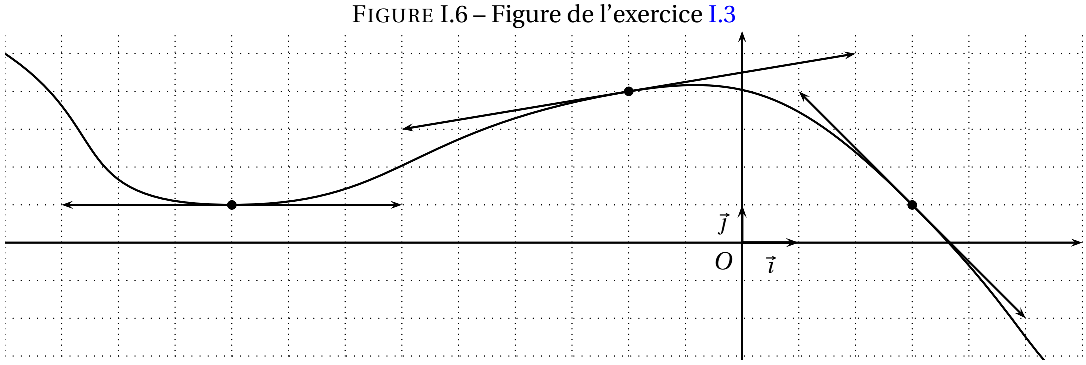


FIGURE I.6 – Figure de l'exercice I.3



Exercice I.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3; 0]$;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- f est paire ;
- $f(3) = 9$.

Exercice I.5.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.

Exercice I.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ ayant les popriétés suivantes :

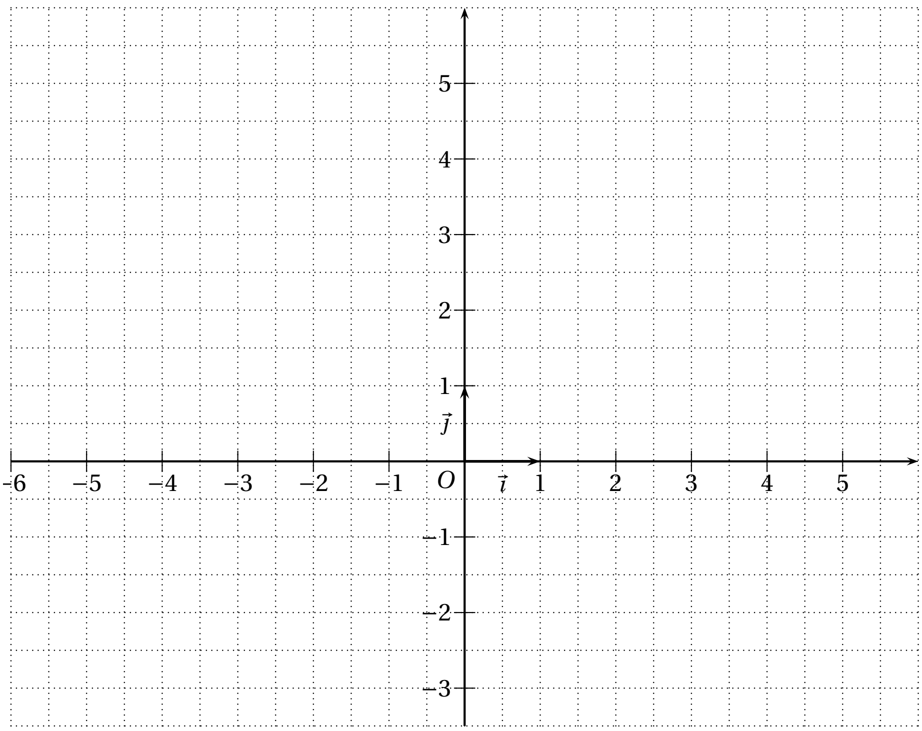
- $f(0) = 1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0; 2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) < 0$.

Exercice I.7.
Tracer sur le repère de la figure I.7 de la présente page la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

- f est définie sur $[-5; 5]$;
- f est paire ;
- $f(0) = 3$, $f(2) = 1$ et $f(4) = 2$;
- $f'(0) = 0$, $f'(2) = -\frac{1}{2}$ et $f'(4) = 3$.

On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.

FIGURE I.7 – Figure de l'exercice I.7



III Fonction dérivée

Exercice I.8.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$
4. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
5. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$
6. $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
7. $f(x) = \left(2x^2 + 3x + 1\right)^5$

Exercice I.9.

Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

1. $f(x) = \dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$;
2. $g(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^3$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Exercice I.10.

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que f admet un extremum.

Exercice I.11.

On donne $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 18x - 7$ définie sur $[0;2]$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Tracer les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0, 1 et 2 ainsi qu'aux extremums locaux, puis la courbe de f.

Exercice I.12.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exercice I.13.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T et $\mathscr{C}$.
4. (a) À l'aide du graphique, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées de ces solutions, à 10^{-1} près.

Exercice I.14.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

Exercice I.15.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

Exercice I.16.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

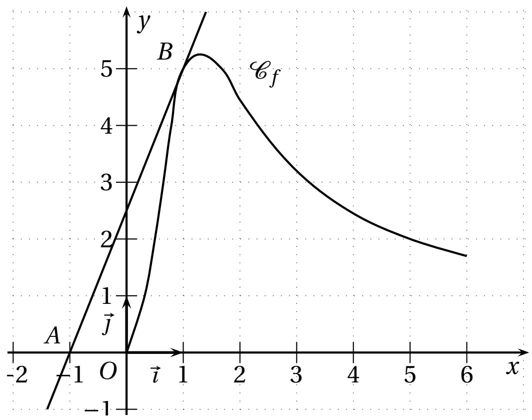
1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient direteur -3.

Exercice I.17.
f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-11x+28}{x-3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne sur la figure I.8 page suivante un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

IV Lectures graphiques et fonctions dérivées

Exercice I.18.
La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$. Soit A le point du plan de coordonnées $(-1;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.



1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 page 89 représente la fonction f'. Laquelle ? *Justifier votre réponse.*

Exercice I.19.
La courbe $(\mathscr{C})$ de la figure I.10 page 89 est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne les renseignements suivants :

- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2;-1)$ appartient à $(\mathscr{C})$;
- la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point B passe par le point $C(4;0)$;

1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques de la figure I.11 page 90, représente la fonction dérivée f' de f, une autre représente une fonction h telle que $h'=f$. En justifiant vos choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques* :
   (a) déterminer la courbe associée à la fonction f'.
   (b) déterminer la courbe associée à la fonction h.

FIGURE I.8 – Annexe de l'exercice I.17

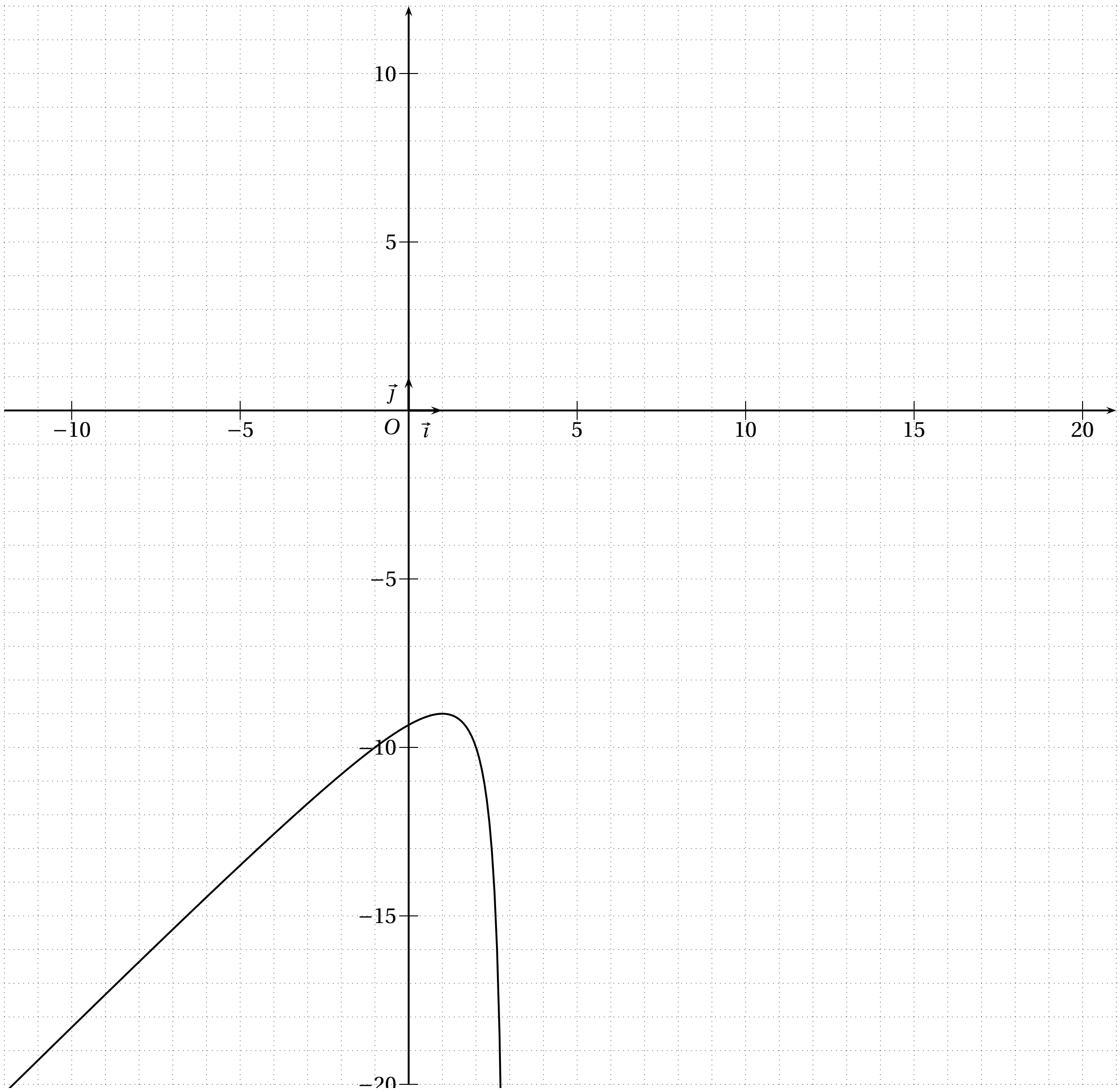


FIGURE I.9 – Courbes de l'exercice I.18

Figure 1

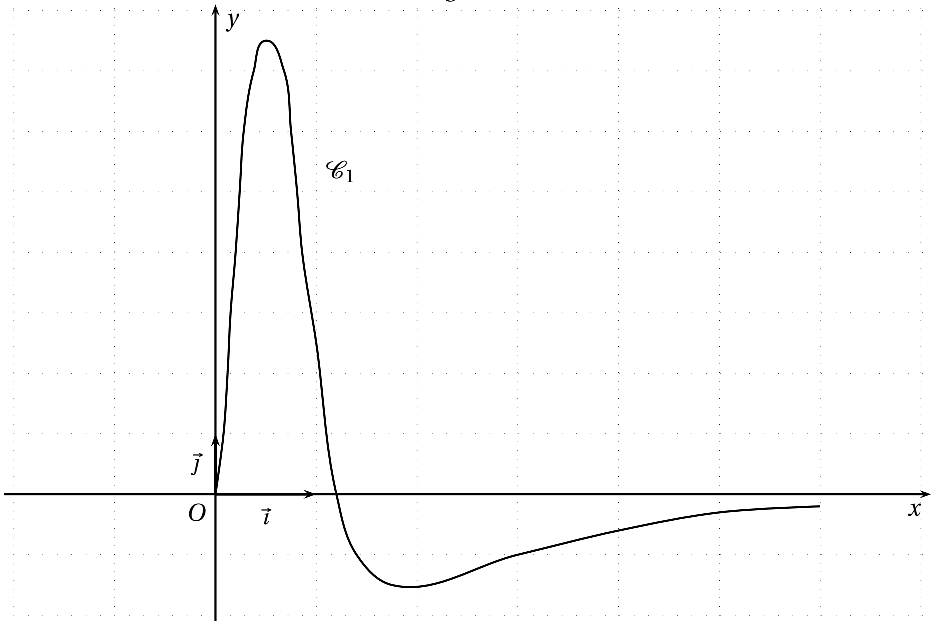


Figure 2

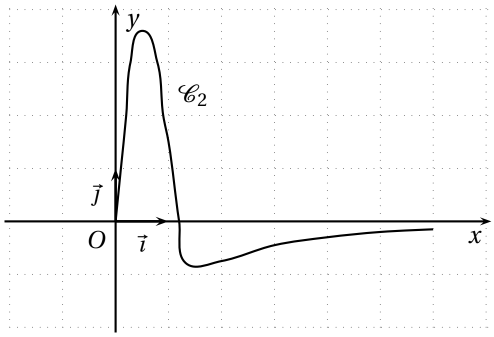


Figure 3

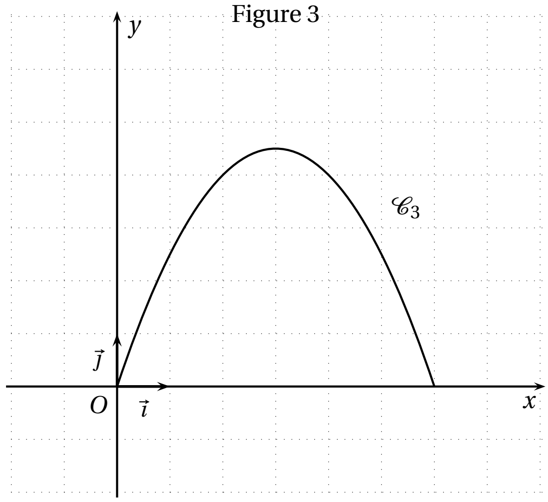


FIGURE I.10 – Figure de l'exercice I.19

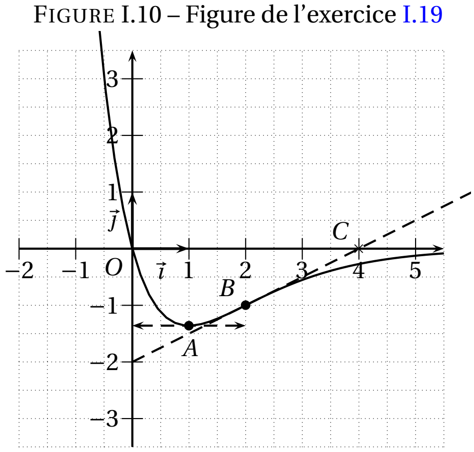
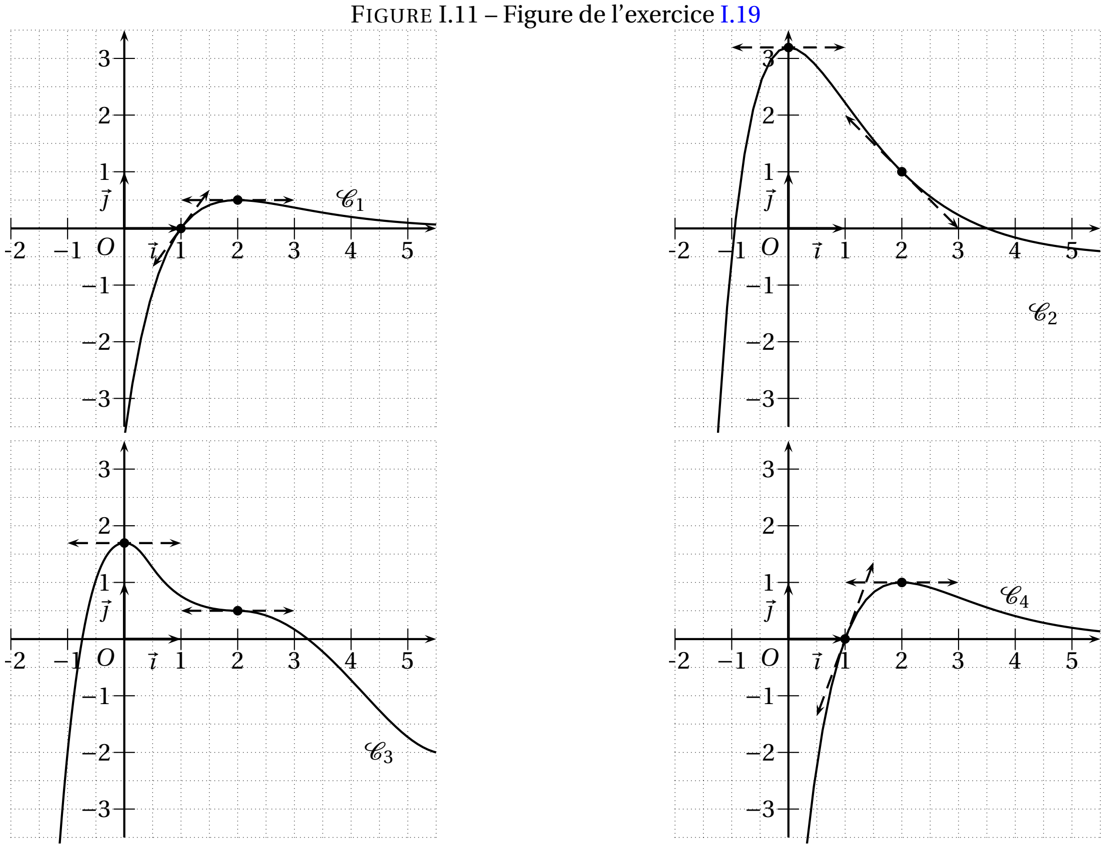


FIGURE I.11 – Figure de l'exercice I.19



Aide : retour sur la notion de limite

Sommaire

I Retour sur la notion de limite

II Activités

Activité II.1.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ et h, définie sur $[0 ; +\infty[$, par $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				

2. Comment semblent se comporter ces trois fonctions quand x devient grand ?
3. Résoudre sur $[0 ; +\infty[$:
   - $f(x) > 10^{12}$
   - $f(x) > 10^{24}$
   - $f(x) > M$ où M est un réel quelconque (qu'on peut imaginer très grand).
4. Faire de même pour g et h.

Finalement, on peut rendre $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que leur limite, quand x tend vers $+\infty$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Activité II.2.
Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$.

1. (a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				

(b) Comment semble se comporter cette fonction quand x devient grand ?

(c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x devient grand ?
On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

(d) Résoudre, pour $x > 0$, les inéquations suivantes :

- $f(x) - 2 < 0,1$
- $f(x) - 2 < 0,001$
- $f(x) - 2 < \epsilon$ où ϵ est un réel positif quelconque (qu'on peut imaginer très petit).

Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que
- la limite de f, quand x tend vers $+\infty$ est 2 et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$;
- la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote (horizontale) à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. (a) Compléter le tableau suivant :

x	1,5	1,1	1,01	1,0001
$f(x)$				

(b) Comment semble se comporter cette fonction quand x se rapproche de 1 ?

(c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x se rapproche de 1 ?
On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

(d) Résoudre, pour $x > 0$, les inéquations suivantes :

- $f(x) > 10$
- $f(x) > 1000$

Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que
- la limite de f, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures à 1 est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$;
- la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote (verticale) à la courbe $\mathscr{C}$ (forcément en 1).

III Limites des fonctions usuelles

Propriété II.1. *Soit f une des fonctions usuelles (affine, carré, cube, inverse, racine carrée, sinus et cosinus) et D_f leurs ensembles de définition respectifs.*

- *Si $a \in D_f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*
- *Sinon, aux bornes de leur ensemble de définition, les fonctions usuelles ont les limites résumées dans le tableau ci-dessous :*

f	D_f	*Limites*
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	*Si* $m > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = -\infty$ *Si* $m < 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = +\infty$ *Si* $m = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = p$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Remarques. • Les fonctions constantes ($f(x) = k$) et linéaires ($f(x) = kx$) sont aussi des fonctions usuelles mais sont considérées comme des cas particuliers des fonctions affines $f(x) = mx + p$ avec, respectivement, $m = 0$ et $p = 0$.

- $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = x^2$ si n est pair et que $f(x) = x^3$ si n est impair (on l'admettra).
- $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si n est impair et que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ si n est pair (on l'admettra).

IV Opérations sur les limites

Dans les paragraphes suivants, nous parlerons parfois de « forme indéterminée », notée F.I. Cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, mais que la règle énoncée ne permet pas de conclure dans le cas général, qu'il faut étudier chaque cas particulier.

IV.1 Règle essentielle

On admettra que les sommes, les produits, les inverses, les quotients ou les composées des fonctions continues vérifient tous :

Si $a \in D_f$, où D_f est l'ensemble de définition de f, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Dans les autres cas, aux bornes de leur ensemble de définition, on appliquera les propriétés des paragraphes suivants.

IV.2 Limite d'une somme

Propriété II.2. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction somme $f + g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

On l'admettra.

Exemples II.1.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x + \dfrac{1}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x - 1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-x + \dfrac{1}{x} - 1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (-x - 1) = -0 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + x - 1\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

IV.3 Limite d'un produit

Propriété II.3. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction produit $f \times g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$l \times l'$	0	$\pm\infty$
$l = 0$	0	0	*F.I.*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*	$\pm\infty$

On l'admettra.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du produit est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits.

Exemples II.2.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-5x^2\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5) = -5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2+x\right)=0+0=0$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

IV.4 Limite de l'inverse

Propriété II.4. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f une fonction ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction $\frac{1}{f}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l\neq0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0 *(0^+)*	0 *(0^-)*

On l'admettra.

Exemples II.3.

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{1}{x^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ et $x^2>0$ quand $x\in\mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+2}=\frac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x+2\right)=4$

IV.5 Limite d'un quotient

Propriété II.5. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction quotient $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	*0*
$l=0$	*0*	*F.I.*	*0*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*

Remarque. Le signe, lorsque la limite du quotient est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits (qui est aussi la règle des signes des quotients).

Exemple II.4.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{2x^2+3}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}-3=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2+3)=+\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\cos x}{x^2-2x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos 0=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-2x)=0$ et $x^2-2x=x(x-2)<0$ (négatif entre les racines 0 et 2)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x-1\right)=+\infty$

IV.6 Cas des formes indéterminées

Finalement, il y a quatre cas d'indétermination qui sont, **en utilisant un abus d'écriture qui ne vous sera pas autorisé sur vos copies** :

$$« \frac{0}{0} » \qquad « 0\times\infty » \qquad « \frac{\infty}{\infty} » \qquad « \infty-\infty »$$

Pour lever l'indétermination, on peut tenter transformer l'expression (par exemple développer s'il s'agit d'un produit). Si cela ne donne rien, il est toujours possible de mettre en facteur le terme de plus haut degré (les termes quand il s'agit d'un quotient) : cela résoud la plupart des problèmes.

Quelques exemples

1. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ était une forme indéterminée.

   Comme $x\to-\infty$, on peut considérer que $x\neq 0$, et donc écrire, en factorisant le terme de plus haut degré :
$$x^2+x-1=x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$, on a :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=1+0+0=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$$

2. Nous avons vu que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est une forme indéterminée.

   Avec $x>0$, donc $x\neq0$, on peut écrire, en développant : $\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)=x+1$

   or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x+1)=0+1=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)=1$

3. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée.
   Comme $x\to+\infty$ on peut considérer que $x\neq0$ et, en factorisant le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on obtient :
$$\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=\frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$, on a :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1-0=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=1+0-0=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=0$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.
   En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$
   or
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-1)=0-1=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2=0\text{ et }x^2>0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

IV.7 Fonctions polynôme et rationelle

On peut procèder de la même manière qu'aux exemples 1 et 3 du paragraphe précédent pour toute fonction polynôme ou rationelle et démontrer ainsi les propriétés suivantes :

Propriété II.6. *Soit f une fonction polynôme de degré n :*
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\ \textit{avec } a_n\neq0$$
Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n=\pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a_nx^n=\pm\infty$.

qui s'énonce aussi de la façon suivante :

« La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré. »

Propriété II.7. *Soit f une fonction rationelle :*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Le détail de ces deux démonstrations est laissé en exercice au lecteur.

V Asymptotes

Définition II.1. On appelle courbe asymptote une courbe simple (droite, cercle, etc.) dont une courbe plus complexe peut s'approcher.

Nous ne parlerons au lycée que de droite asymptote, en omettant le plus souvent de préciser même le terme de droite. Une asymptote sera donc une droite dont la courbe représentative d'une fonction s'approche (sans forcément l'atteindre). Nous avons vu dans les activités les trois types d'asymptote.

V.1 Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.
On a alors :

Définition II.2. Si f une fonction admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, réel, on dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe de f.

$$\begin{array}{c} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \infty \text{ ou} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \infty \end{array} \Leftrightarrow x = a \text{ asymptote à } \mathscr{C}$$

Remarque. Il suffit qu'on ait soit une limite à droite, soit une limite à gauche qui vaut $\pm\infty$ pour avoir une asymptote verticale.

V.2 Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie en l'infini.
On a alors :

Définition II.3. Si f une fonction admet une limite finie b en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote (horizontale) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b \text{ asymptote à } \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Une courbe peut avoir une asymptote en $+\infty$ sans en avoir pour autant en $-\infty$: il faut faire l'étude aux deux bornes.

V.3 Asymptote oblique

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f se comporte de plus en plus comme une fonction affine.
On a alors :

Définition II.4. Soit f une fonction. S'il existe une fonction affine $g(x) = mx + p$ telle que la fonction $f - g$ admet comme limite 0 en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote (oblique) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - (mx + p)\big) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = mx + p \text{ asymptote à} \\ \mathscr{C} \text{ en l'infini} \end{array}$$

Remarque. Même remarque que ci-dessus.

VI Exercices

VI.1 Technique

Exercice II.1.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\frac{-6}{x^2}\right)$

Exercice II.2.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}+2x+3\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-5}{x}+x^2\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\frac{1}{x}+3x^2-2\right)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \left(\frac{3}{x-2}+5x+7\right)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2}\right)$

Exercice II.3.
Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

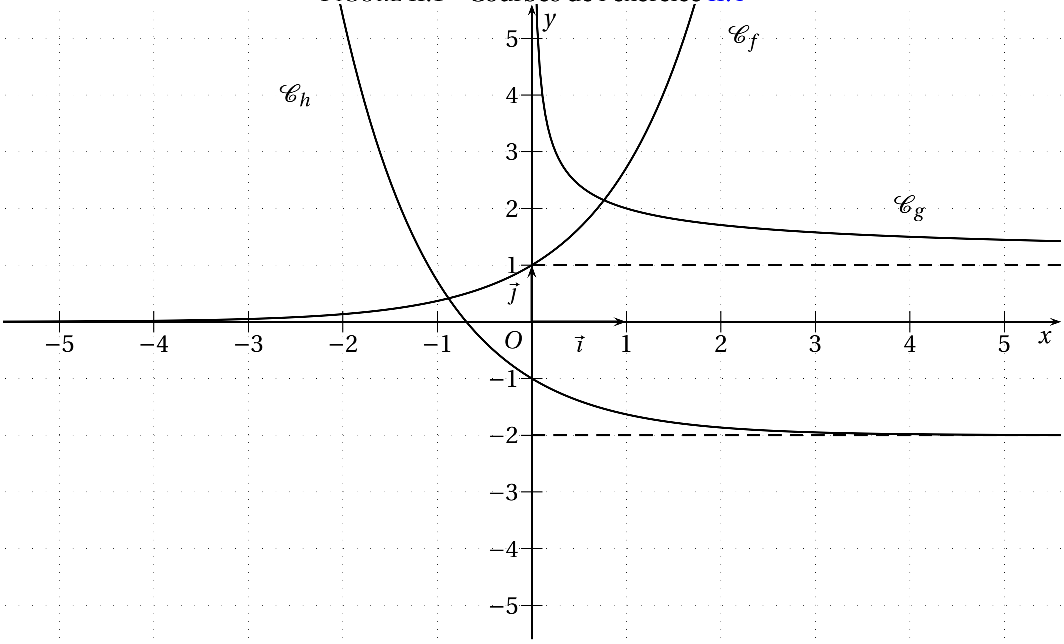
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

VI.2 Lectures graphiques

Exercice II.4.
On donne sur la figure II.1 de la présente page les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.
Pour chacune des trois fonctions :

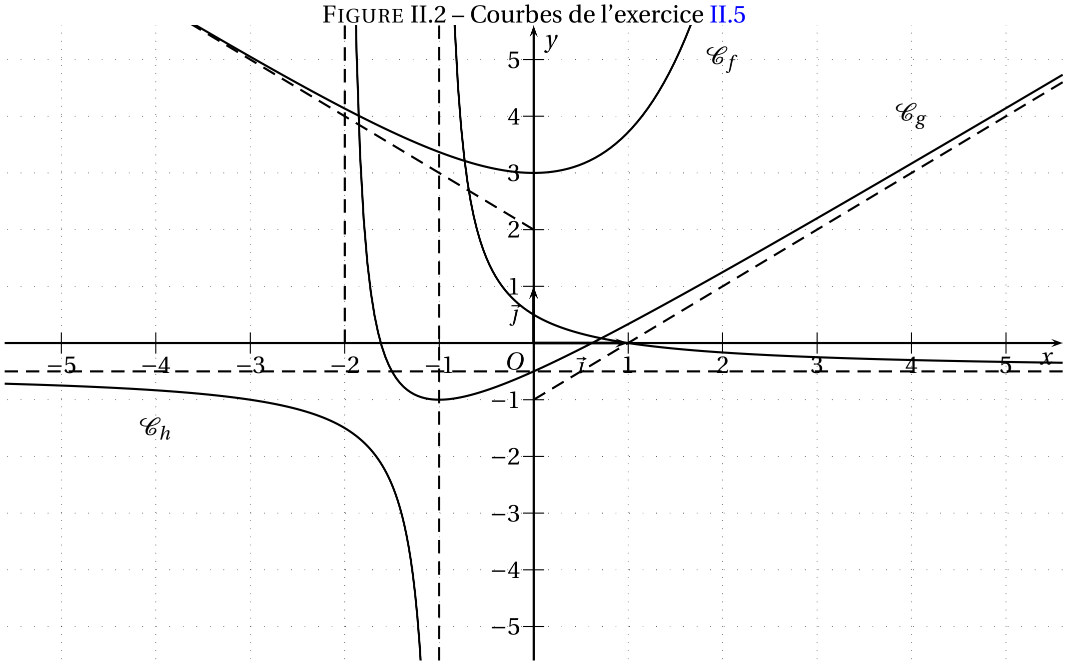
1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition.

FIGURE II.1 – Courbes de l'exercice II.4



Exercice II.5.
Même exercice que le précédent (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties), à partir de la figure II.2 page suivante.

FIGURE II.2 – Courbes de l'exercice II.5



VI.3 Étude de fonctions

Exercice II.6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\left(x^2-1\right)(x-2001)}{2001}$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice II.7.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est bornée par 0 et 2.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

Exercice II.8.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x+1}{2x+3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

Exercice II.9.

Le but de cet exercice est de déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+2}{3-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{3-x}$$

3. Étude en l'infini.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote horizontale en l'infini ?
   (c) Montrer que la droite d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Étude au voisinage de 3.
   (a) Déterminer la limite du numérateur lorsque x tend vers 3.
   (b) Étudier le signe du dénominateur.
   (c) Déterminer la limite du dénominateur lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures.
   (d) En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x)$.
   (e) Procéder de même pour déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x)$
   (f) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?

Exercice II.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

Exercice II.11.
Soit f la fonction qui a x associe

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{-x^2 + 2x + 3}$$

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   On commencera par étudier le signe de $-x^2 + 2x + 3$ *selon les valeurs de* x.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

Exercice II.12.
Soit f la fonction définie pour $x \in [1\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + 1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x - 1}$. Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que, pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$
3. En déduire que, pour tout $x \in [1\,; +\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}$
4. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$