Mathématiques en Première ES
Enseignement de spécialité

David ROBERT

2008–2009

Sommaire

Chapitre 1

Compléments sur les fonctions

Sommaire

1.1 Activités

Activité 1.1 (Rappels de Seconde). 1. Les fonctions f, g, h, k et m sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 3x^2 - 1$;
- $g(x) = 2x^2 - x(1+2x) + 3$;
- $h(x) = \dfrac{x}{5} - 4$;
- $k(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4}$;
- $m(x) = 10$.

Lesquelles sont des fonctions affines ?

2. f, g, h et k sont les focntions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x + 1$;
- $g(x) = -1$;
- $h(x) = -x + 3$;
- $k(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

Tracer les courbes représentatives de ces fonctions dans un même repère.

3. f est une fonction affine. Compléter le tableau suivant **sans** chercher l'expresssion algébrique de $f(x)$:

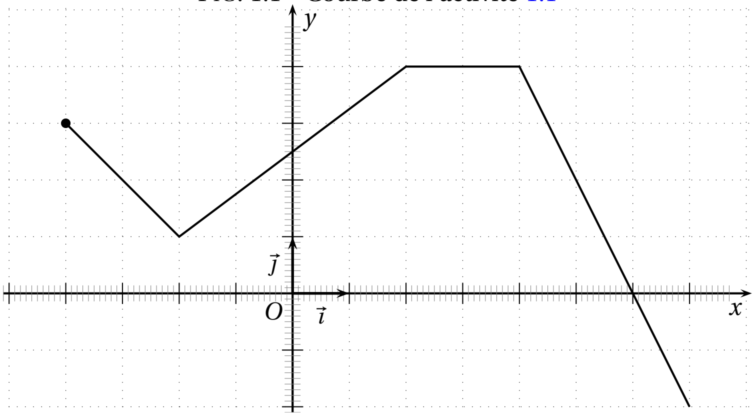
x	2	6	10	-2	4
$f(x)$	5	2			

4. f est la fonction affine telle que $f(2) = 7$ et $f(5) = 3$. Trouver l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.
5. (a) f est la fonction définie sur $[-4 ; +\infty[$ représentée par la courbe page suivante. Cette courbe est la réunion de quatre éléments. Quelle est leur nature ?
   (b) Pour chaque élément de la courbe, donner une équation de la droite dont il fait partie et préciser dans quel intervalle varie x.

Activité 1.2 (Envois de colis).
Les tarifs d'envois de colis en France métropolitaine pratiqués par une entreprise de connectique sont donnés dans le tableau page suivante.

1. Quel est le prix à payer pour l'envoi d'un colis de 2,5 kg en Chronopost ?
2. Quel est le prix à payer pour l'envoi d'un colis de 12 kg en Colissimo + recommandé ?
3. Quel est le prix à payer pour l'envoi d'un colis de 9 kg en Colissimo + recommandé + contre-remboursement ?
4. Représenter ces tarifs, pour un poids inférieur ou égal à 15 kg, sur un même graphique en portant le poids (en kg) en abscisse et le prix (en €) en ordonnée.

FIG. 1.1 – Courbe de l'activité 1.1

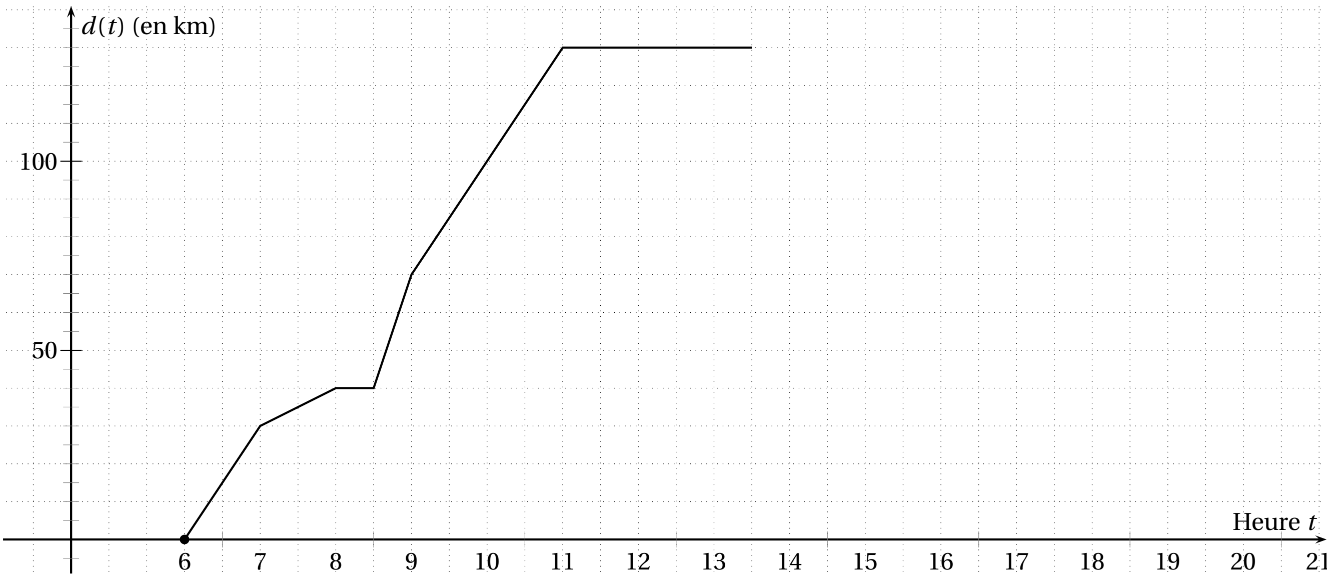


TAB. 1.1 – Tarifs postaux vers la France et Monaco

Poids jusqu'à	Colissimo + recommandé	Colissimo + recommandé + Contre-rembrousement	Chronopost
2 kg	16	31	38
3 kg	17	32	
5 kg	19	33	46
7 kg	20	35	
10 kg	23	38	59
15 kg	25	40	72
30 kg	32	47	110

Activité 1.3 (À vélo).
Un cycliste part pour la ville A à 6 h afin de rendre visite à un ami dans la ville B. Il quitte son ami à 14 h. Le graphique de la présente page représente la distance $d(t)$ (en km) à laquelle le cycliste se trouve de A en fonction de l'heure t.

FIG. 1.2 – Courbe de l'activité 1.3



1. À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la distance entre A et B ?
   (b) Combien de temps met le cycliste pour parvenir en B ?
   (c) Le cycliste s'arrête-t-il en route ?
   (d) Combien de temps passe-t-il chez son ami ?

(e) Le trajet se compose d'une partie plate, de la montée et de la descente d'un col, puis une nouvelle partie plate. À quelle distance de A se trouve vraisemblablement le début de la montée au col ? Le sommet du col ? La fin de la descente du col vers B ?

(f) Quelle est la vitesse du cycliste sur les parties plates ? En montée ? En descente ?

2. Compléter le graphique en utilisant les renseignements donnés ci-dessous :
   - Pour $14 \leq t \leq 16$: $d(t) = -30t + 550$;
   - Pour $16 \leq t \leq 19$: $d(t) = -10t + 230$;
   - Ensuite, le cycliste se repose 30 min ;
   - Pour 19 h 30 $\leq t \leq$ 19 h 40 : $d(t) = -60t + 1210$;
   - Pour 19 h 40 $\leq t \leq$ 20 h 40 : $d(t) = -30t + 620$.
3. D'après les données ci-dessus, ses vitesses en montée, en descente et en terrain plat sont-elles les mêmes au retrour qu'à l'aller ?
4. Au bout de combien de temps a-t-il parcouru la moitié de la distance AB à l'aller ? À quelle heure repasse-t-il à cet endroit ?

Activité 1.4 (Mortalité infantile).
Le tableau de la présente page donne, pour quelques années, le taux de mortalité infantile, c'est-à-dire la proportion d'enfants qui décèdent avant l'âge d'un an, calculée pour 1 000 naissances vivantes.

TAB. 1.2 – Mortalité infantile

Années	1930	1935	1950	1955
Taux de mortalité	78,8‰	67,6‰	47,2‰	34,2‰

1. Tracer un repère, où les années figureront en abscisse et les taux de mortalité en ordonnée (unités : 1,5 cm pour 5 ans et 0,5 cm pour 10‰) et y représenter le tableau ci-dessus.
2. Pour estimer les taux de mortalité en 1940 et 1945, une personne utilise la droite passant par les points correspondants à 1935 et 1950.
   Déterminer graphiquement les estimations qu'elle trouve, puis vérifier par le calcul.
3. Une autre personne choisit de procéder de même, mais en traçant la droite passant par les points correspondants à 1930 et 1955. Faire les calculs correspondants.
4. Une troisième fait les calculs équivalents entre 1935 et 1955. Faire ces calculs.
5. Comparer les différentes estimations obtenues.
6. d'autres sources reprennent les données ci-dessus et les complètent pour le années 1940 et 1945 : 86,6‰ et 110‰. Analyser la différence entre les valeurs estimées ci-dessus et les valeurs réelles.

1.2 Fonctions affines par morceaux

Définition 1.1. Une fonction définie sur la réunion d'un nombre fini d'intervalles et qui, sur chacun de ces intervalles, coïncide avec une fonction affine est appelée *fonction affine par morceaux*.

Propriété 1.1. *Dans un repère, la courbe repésentative d'une fonction affine par morceaux est une réunion de segments de droites ou de demi-droites.*

1.3 Interpolation linéaire

1.3.1 Le principe

Dans certains cas on ne connaît que certaines valeurs d'une grandeur (relevés de température, horaires de marées, tables de remboursements, etc.) et l'on peut être amené à vouloir *estimer* des valeurs intermédiaires (la température entre deux relevés, la hauteur de l'eau à une certaine heure, le remboursement selon un taux non renseigné, etc.). La façon la plus simple de procéder est de considérer les deux valeurs connues les plus proches et de considérer que la progression est affine entre ces deux valeurs. Cette méthode est appelée *interpolation linéaire*.

La valeur obtenue n'est qu'une valeur approchée, les phénomènes observés n'étant que rarement affines (l'évolution de la température, la hauteur de l'eau en fonction de l'heure, le montant des remboursements en fonction du taux, etc. ne sont pas des fonctions affines), mais, dans beaucoup de cas, cette estimation est suffisante.

1.3.2 Un exemple

Un tableau donne les hauteurs des marées heure par heure dans un port de Bretagne et en particulier les deux informations suivantes :

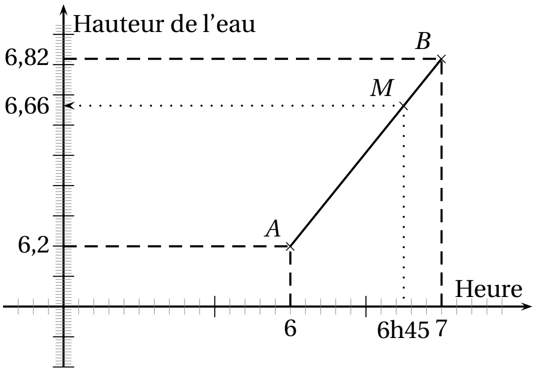
- *à 6h la hauteur de l'eau sera de 6,20 m ;*
- *à 7h de 6,82 m.*

On cherche une estimation de la hauteur de l'eau à 6h45.

Graphiquement

En plaçant les deux points correspondants aux deux relevés dans un repère, on peut obtenir une première estimation graphique (la moins précise) :

FIG. 1.3 – Interpolation linéaire graphique



En obtenant l'expression de la fonction affine

On cherche la fonction affine $f(x) = mx + p$ où x est l'heure (en h) et $f(x)$ la hauteur (en m) telle que $f(6) = 6,2$ et $f(7) = 6,82$.

On sait que $m = \dfrac{f(7) - f(6)}{7-6} = 0,62$ et que $f(6) = 0,62 \times 6 + p = 6,2 \Leftrightarrow p = 2,48$ donc $f(x) = 0,62x + 2,48$.

Enfin, $6\text{h}45 = 6,75\text{h}$ donc $f(6,75) = 0,62 \times 6,75 + 2,48 = 6,665$ m.

Par comparaison des coefficients directeurs

Les droites (AM) et (AB) ont même coefficient directeur donc :
$\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow \dfrac{y_M - 6,2}{0,75} = \dfrac{0,62}{1} \Leftrightarrow y_M - 6,2 = 0,62 \times 0,75 \Leftrightarrow y_M = 6,2 + 0,465 = 6,665$

1.4 Exercices et problèmes

1.4.1 Exercices

Exercice 1.1. 1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x < -3 \\ 5 & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ -2x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) Calculer $f(-5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$.

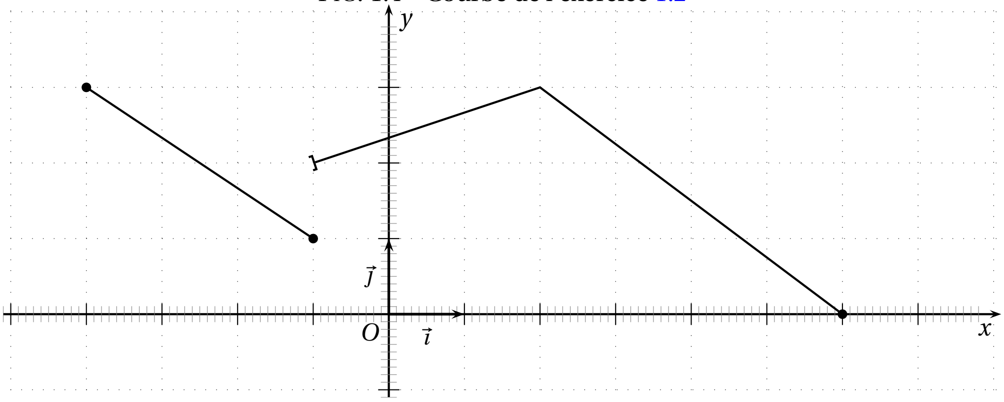
(b) Représenter cette fonction dans un repère approprié.

2. Représenter la fonction f définie sur $]-\infty; 6]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{sur} \quad]-\infty; 2] \\ -x+2 & \text{sur} \quad]2; 4] \\ x-5 & \text{sur} \quad]4; 5[\\ 2x-10 & \text{sur} \quad [5; 6] \end{cases}$$

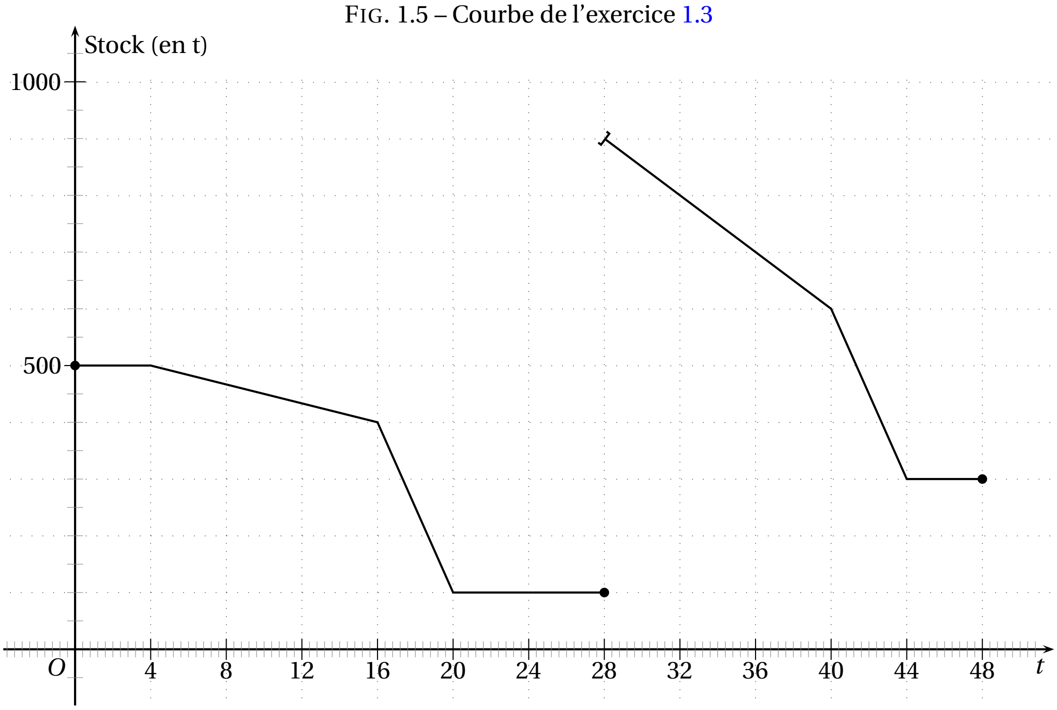
Exercice 1.2.
La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f affine par morceaux définie sur $[-4; 6]$. Déterminer l'expression de f.

FIG. 1.4 – Courbe de l'exercice 1.2



Exercice 1.3.
Une usine stocke une certaine matière pour une fabrication. Le graphique de la présente page donne, pendant 48h, le niveau du stock en tonnes en fonction du temps t en heures.

FIG. 1.5 – Courbe de l'exercice 1.3



1. Comment expliquer les segments horizontaux, ainsi que le saut ?
2. À quel moment de la journée le produit est-il le plus utilisé ?
3. Déterminer l'expression de la quantité stockée $Q(t)$ en fonction de t pour $t \in [0; 48]$.
4. Déterminer l'expression de la quantité totale $U(t)$ utilisée à partir de l'heure 0 en fonction de t pour $t \in [0; 48]$ et la représenter dans un repère.

Exercice 1.4.
Le 28 juillet 2004, les taux d'ozone (en μg/m^3) relevés dans la région de Saint Étienne ont évolué de la façon donnée par le tableau suivant :

taux	42	109	164	188	194	180	132
heure	10	12	14	16	18	20	22

Par interpolation linéaire :

1. estimer graphiquement le taux d'ozone à 11h30 ;
2. estimer par le calcul le taux d'ozone toutes les 30 min entre 12h et 14h ;
3. estimer par le calcul l'intervalle sur lequel le taux est supérieur 180 μg/m^3 dans la journée.

1.4.2 Problèmes

Problème 1.1 (Comparaison de tarifs).
Le tableau ci-dessous présente un extrait des tarifs des forfaits non bloqués pour téléphones portables, proposés par une société de téléphonie fictive.

Forfait	Min comprises dans le forfait	Coût du forfait (en €)	Par min de dépassement (en €)
1	90	33	0,30
2	180	43	0,25
3	300	57	0,18

Pour les forfaits 1, 2 et 3 on désigne, respectivement, par $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ le prix à payer en euros pour une durée totale de communications de x minutes.

1. (a) Exprimer $f_1(x)$ en fonction de x lorsque $0 \leq x \leq 90$ puis lorsque $x > 90$.
   (b) Dans un repère orthogonal, représenter graphquement la fonction f_1 pour x compris entre 0 et 400.
2. Exprimer $f_2(x)$ et $f_3(x)$ en fonction de x et représenter sur le graphique précédent ces deux fonctions.
3. Lire sur le graphique quel est le tarif le plus avantageurx en fonction de la durée mensuelle des communications.

Problème 1.2.
Le tableau ci-dessous donne des informations sur les distances d'arrêt d'un véhicule sur route sèche selon la vitesse.

vitesse v en km/h	distance parcoure pendant le temps de réaction	distance parcoure pendant le temps de freinage	$d_t(v)$
50		16	
90		52	
130		109	
140		123	
180		207,5	

On se pose la question suivante : « un automobiliste roulant à 80 km/h voit surgir un obstacle à 60 m devant lui. Pourra-t-il s'arrêter à temps ? »

1. Le temps de réaction y_0 est de 0,8 s. Compléter la deuxième colonne en arrondissant au dixième de mètre puis la quatrième, $d_t(v)$ étant la distance totale parcourue entre l'apparition de l'obstacle et l'arrêt.
2. Placer les points de coordonnées $(v ; d_t(v))$ obtenus dans le tableau et les joindre par des segments de droites.
3. Utiliser une interpolation linéaire pour répondre à la question.
4. En réalité, la distance de freinage d s'exprime en fonction de v sous la forme $d(v) = av^2 + b$. Trouver a en utilisant la distance de freinage à 50 km/h et à 90 km/h.
   Calculer alors la distance de freinage à 80 km/h avec cette deuxième modélisation. Conclure.

Problème 1.3.
Un élève recopie les données pour la population française fournie sur le site de l'INED (www.ined.fr) dans le tableau ci-dessous.

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
56 710	56 978	57 242	57 470	59 661	57 847	58 029	58 210	58 398	58 620

1. Représenter graphiquement ces données dans un graphique approprié.
2. Que remarque-t-on sur ce graphique ? Comment l'expliquer ? Comment y remédier ?
3. Un élève retourne sur le site et lit, pour l'année 1994, une population de 57 661. Il lit aussi sur le site que les recensements n'ont été faits qu'en 1990 et en 1999 ; pour les autres années, on a appliqué les formules données par un modèle. Ce modèle correspond-il à une interpolation linéaire ? Justifier.

Problème 1.4 (Impôt sur le revenu).
On trouve sur le site de l'administration fiscale (http ://www.impots.gouv.fr/) les informations résumées dans le tableau ci-dessous qui permettent de déterminer le montant de l'impôt sur le revenu.

Tranches de revenus nets imposables	Taux marginal d'imposition
De 0 à 5 614 €	0,00 %
De 5 614 à 11 198 €	5,50 %
De 11 198 à 24 872 €	14,00 %
De 24 872 à 66 679 €	30,00 %
Au-delà de 66 679 €	40,00 %

Pour calculer le montant de l'impôt sur le revenu on procède de la manière suivante : le revenu net imposable est découpé en tranches et le montant de chaque tranche est imposé au taux indiqué.
Ainsi si un célibataire déclare 16000 € de revenu net imposable, les 5614 premiers euros sont imposés à 0%, les $11\,198 - 5\,614 = 5\,584$ euros suivants sont imposés à 5,50 %, enfin les $16000 - 11\,198 = 4\,802$ derniers euros sont imposés à 14,00%.
Le célibataire devra donc payer $5\,614 \times \frac{0}{100} + 5\,584 \times \frac{5{,}50}{100} + 4\,802\frac{14}{100} = 979{,}40$ €.
On appelle taux réel d'imposition le pourcentage que représente l'impôt sur le revenu payé du revenu net imposable.
Dans l'exemple ci-dessus $\frac{979{,}40}{16000} \approx 0{,}0612 = \frac{6{,}12}{100}$; le taux réel d'imposition est donc de 6,12 %.

1. Déterminer pour les montants nets imposables suivants le montant de l'impôt sur le revenu et le taux réel d'imposition :
   - 10000 € ;
   - 20000 € ;
   - 40000 € ;
   - 80000 €.
2. De façon générale, on note R le revenu net imposable en euros pour l'année 2007 et $f(R)$ le montant de l'impôt sur le revenu.
   (a) Vérifier que si $5\,614 \leq R \leq 11\,198$, $f(R) = 0{,}055R - 308{,}77$.
   (b) Vérifier que si $11\,198 \leq R \leq 24872$, $f(R) = 0{,}14R - 1260{,}60$.
   (c) Exprimer $f(R)$ en fonction de R pour chacune des autres tranches et vériier les résultats obtenus à la question précédente.
3. (a) Représenter la fonction f dans un repère orthogonal (unités : 4 cm pour 4 000 € en abscisse, 1 cm pour 1 000 € en ordonnée ; prévoir une feuille entière et bien placer les montants des impôts aux changement de tranches).
   (b) Trouver graphiquement une valeur approchée du montant de l'impôt correspondant à un revenu net imposable de 25 000 € pour un célibataire.
   (c) Trouver le revenu net imposable d'une personne qui doit payer un impôt de 12 000 €.
4. M. Faure se rend compte que l'année précédente il avait déclaré 24 000 € alors que cette année il va en déclarer 25 000. Il pense que l'augmentation de son revenu net imposable va disparaître dans ses impôts. Quelle part des 1 000 € est versée à l'État ?
5. Mme Smet explique qu'elle séjourne en Suisse parce que le fisc français lui prend plus 50% de ce qu'elle gagne. Peut-il s'agir de l'impôt sur le revenu ?
6. Une des déductions d'impôt en France (ce n'est pas le cas dans la plupart des autres pays européens) provient des enfants à charge. Si un célibataire a un enfant à charge son revenu imposable est divisé par 1,5 et l'on calcule ensuite comme précédemment.
   (a) Refaire les calculs de la question 1 en supposant que le foyer est maintenant constitué d'un célibataire ayant un enfant à charge.
   (b) La réduction d'impôt obtenue est-elle plus grande pour un célibataire modeste ou un célibataire aisé ? Et proportionnellement ?

Chapitre 2

Vecteurs de l'espace

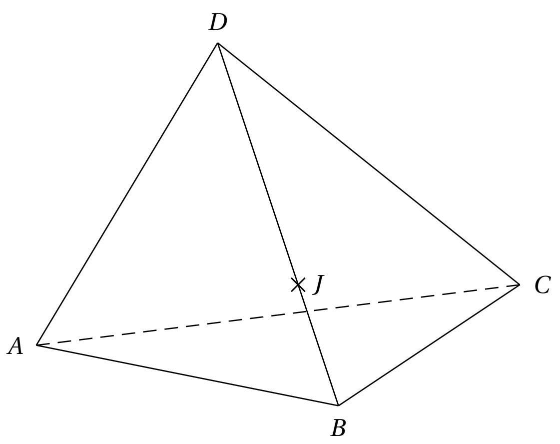
Sommaire

2.1 Activités

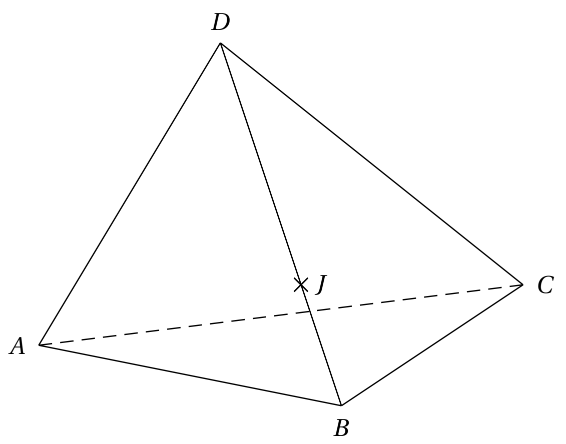
Il s'agit dans les deux premières activités de déterminer quelles peuvent être les intersections d'un *plan* et d'un solide usuel.[1] Plus précisément, on s'attachera à déterminer l'intersection du plan avec chacune des faces, l'ensemble formant une figure plane, puisqu'incluse dans le plan, qu'on appellera parfois la *trace* du plan sur le solide. Il s'agit avant tout de développer un *savoir-faire*, aucune notion ou propriété nouvelle n'étant au programme.

Activité 2.1 (Sections planes d'un tétraèdre).
Dans chacun des cas ci-dessous, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

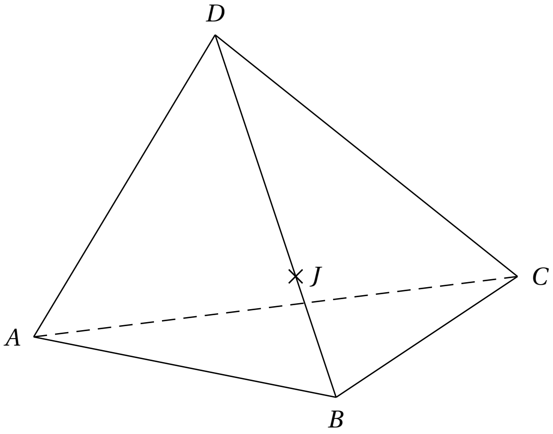


$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

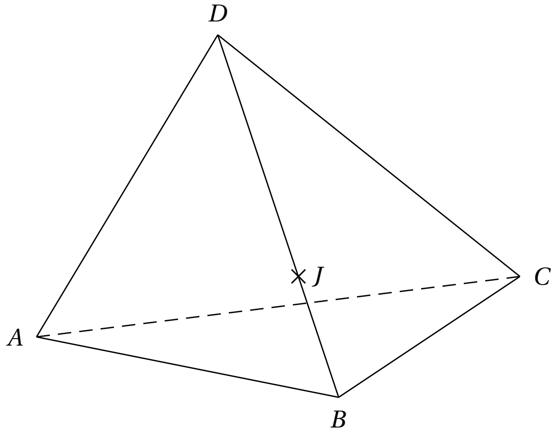


[1]Conformément au programme, on se limitera aux cubes et aux tétraèdres.

$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et K centre de gravité de ABC



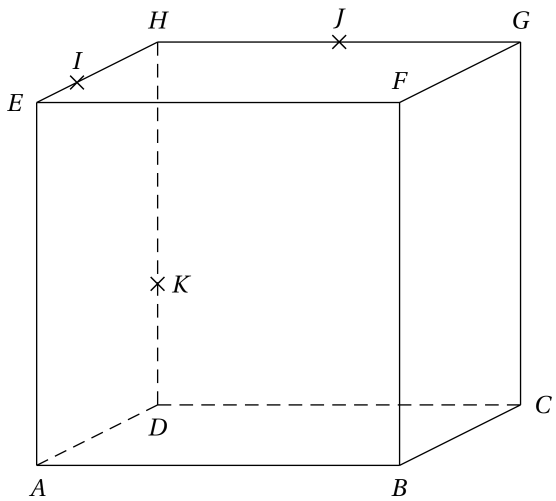
$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



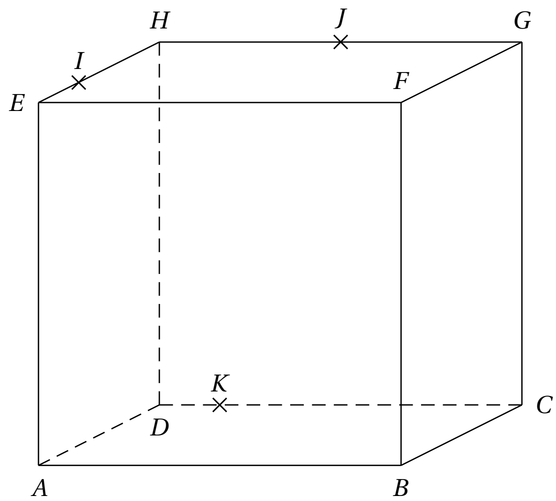
Activité 2.2 (Sections planes d'un cube).

Dans chacun des cas suivants ci-dessous, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB=6$ cm ; $EI=2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

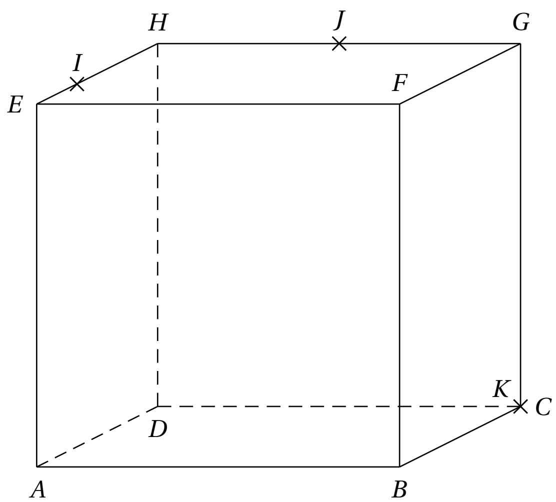
$DK=2$ cm



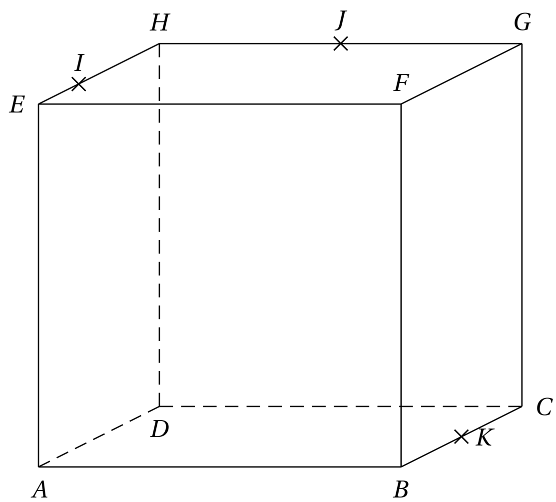
$KD=1$ cm



$K=C$



K milieu de $[BC]$



Activité 2.3 (Vecteurs égaux).

$ABCDEFGH$ est un cube représenté sur la figure 2.1 page suivante. Les points P et Q sont tels que : $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FH}$ et

$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EC}$.

1. (a) Construire le point P.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EH}$.
2. Construire le point Q et expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
3. (a) Expliquer pourquoi $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{CQ}$.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $HPQC$?

Activité 2.4.
$ABCD$ est un tétraèdre représenté sur la figure 2.2 de la présente page. I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour les points I, J, K et L ?
2. (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
   (b) Que peut-on alors dire de ces trois vecteurs ?

FIG. 2.1 – Figure de l'activité 2.3

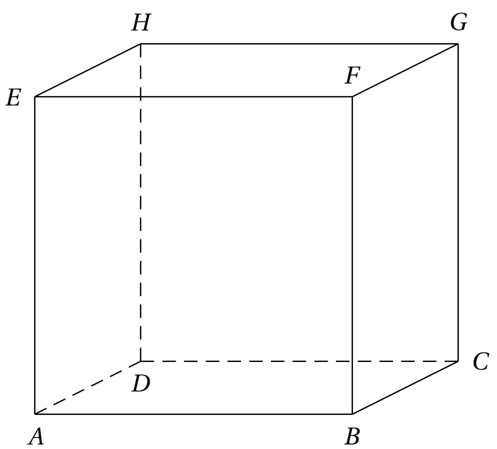
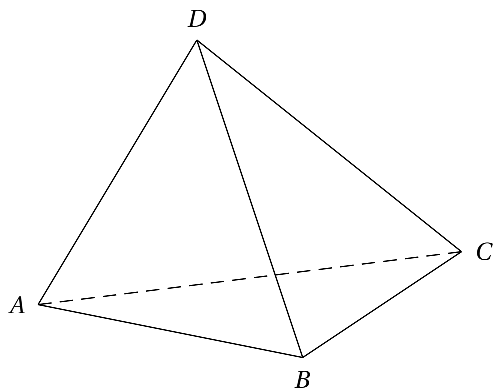


FIG. 2.2 – Figure de l'activité 2.4



2.2 Vecteurs de l'espace

2.2.1 Généralisation à l'espace

Les définitions et propriétés concernant les vecteurs vues en Seconde dans le plan s'étendent naturellement à l'espace.

Il en va ainsi :
- de la définition d'un vecteur (direction, sens, norme) ;
- de la somme de deux vecteurs ;
- du produit d'un vecteur par un réel ;
- de la colinéarité de deux vecteurs ;
- de l'orthogonalité de deux vecteurs.

La seule nouveautée concerne la coplanarité de vecteurs.

2.2.2 Vecteurs coplanaires

Définition 2.1 (Coplanarité de vecteurs)**.** Des vecteurs de l'espace sont dits coplanaires si l'on peut trouver des représentants de ces vecteurs tels que leurs origines et leurs extrémités sont coplanaires.

Deux vecteurs sont toujours coplanaires puisqu'en prenant des représentants de ces vecteurs ayant la même origine on obtient trois points et trois points sont forcément coplanaires. La question ne se pose que lorsqu'il y a trois vecteurs (ou plus) et dans ce cas on a la propriété suivante :

Propriété 2.1 (Admise). *Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si il existe un couple $(\alpha ; \beta)$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ (ou bien $\vec{v} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{u}$, ou bien $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$).*

On a les conséquences suivantes à la coplanarité de trois vecteurs :

Propriété 2.2. *Soit A, B, C, D, E et F des points distincts de l'espace tels que A, B et C non alignés.*
- *Il existe $(a ; b)$ tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ si et seulement si A, B, C et D sont coplanaires.*
- *Il existe $(a ; b)$ tels que $\overrightarrow{EF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ si et seulement si la droite (EF) est parallèle au plan (ABC)*

Preuve.
- Le premier point découle de la définition des vecteurs coplanaires.
- $(EF) \parallel (ABC) \Leftrightarrow$ il existe une droite parallèle à (EF) contenu dans le plan $(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

◊

2.3 Repérage dans l'espace

De la même façon qu'on a défini un repère pour le plan, on définit un repère dans l'espace de la façon suivante :

Définition 2.2. Un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace si les points O, I, J et K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$ ne sont pas coplanaires.
O est appelé *origine du repère* et $\left(\vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k}\right)$ est appelée la *base du repère.*
Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires, le repère est dit *orthogonal.*
Si le repère est orthogonal et que $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$, le repère est dit *orthonormal* (ou orthonormé).

Propriété 2.3 (Définition, existence et unicité des coordonnées de vecteurs et de points). *Le plan est muni d'un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.*
- *Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.*
- *Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.*

On notera indifférement $\vec{u}\,(x ; y ; z)$, ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et, parfois, abusivement, $\vec{u} = (x ; y ; z)$, ou $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On notera $M\,(x ; y ; z)$.

La notation en colonne, pratique pour les calculs, est en général réservée aux vecteurs, puisqu'on ne peut additionner des points.

Remarque. Par définition les coordonnées de M et de $\overrightarrow{OM}$ sont donc les mêmes.

Propriété 2.4 (Coordonnées du milieu, coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$). *Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $(x_B ; y_B ; z_B)$:*
- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$;
- *les coordonnées de I, milieu de $[AB]$, sont* $\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Propriété 2.5 (Distance et norme dans un repère orthonormal). *Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A\,(x_A ; y_A ; z_B)$ et $B\,(x_B ; y_B ; z_B)$.*

Si le repère est orthonormal *alors :*
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Propriété 2.6 (Condition d'orthogonalité dans un repère orthonormal). *Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.*

Si le repère est orthonormal *alors* $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

2.4 Exercices

Exercice 2.1.
Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1. On donne $A(2; -1; 3)$, $B(1; 2; 0)$, $C(-2; 1; 2)$ et $D(-1; -2; 5)$.
   $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Un rectangle ?
2. On donne $A(-3; 1; 4)$, $B(-2; -1; 7)$, $C(-4; -1; -2)$ et $D(-5; -5; 4)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
3. On donne $A(1; 1; 3)$, $B(\sqrt{2}+1; 0; 2)$ et $C(\sqrt{2}+1; 2; 2)$.
   Nature du triangle ABC ?
4. On donne $A(1; -2; 3)$, $B(0; 4; 4)$ et $C(4; -20; 0)$.
   Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 2.2.
$ABCD$ est un tétraèdre.
I et L sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[DC]$, J est le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et K est le point tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?

Exercice 2.3.
$ABCDEFGH$ est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[AD]$, $[BC]$ et $[FG]$.
On veut prouver que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).

1. Traduire par des relations vectorielles : « la droite (AK) est parallèle au plan (IJH). »
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ à l'aide de deux vecteurs formés avec les points I, J et K. Conclure.

Exercice 2.4.
$ABCDEFGH$ est un cube.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[EH]$ et $[AD]$. G est le centre de gravité du triangle DCH.

1. Montrer que $(CK) \parallel (IJB)$.
2. Montrer que $(KL) \parallel (IJB)$.
3. Que peut-on en conclure ?
4. Tracer la trace de ces deux plans sur le cube.

Exercice 2.5.
Dans le repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$ et $C(5; 1; 3)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. Préciser le sommet de l'angle droit.
2. Soit M le point de coordonnées $(1; 7; 5)$. Démontrer que M est un point du plan (ABC).
3. Soit D le point de coordonnées $(9; 16; -6)$. Démontrer que la droite (DM) est perpendiculaire au plan (ABC).
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 2.6.
$ABCD$ est un tétraèdre.
Soit I milieu de $[BC]$, J milieu de $[CD]$, H centre de gravité du triangle BCD et K centre de gravité du triangle ACD.

1. Exprimer, dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$, les coordonnées des points I, J, K et H.
2. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$. Quelles sont les coordonnées de G ?
3. Démontrer que $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$.
4. Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Exercice 2.7.
$ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1.
On considère le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Calculer les coordonnées du centre de gravité I de AHF et du centre de gravité J de BDG.
2. (a) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (AHF) ainsi qu'au plan (BDG). (Rappel : pour montrer que d'une droite d est orthogonale à un plan P, on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P).
   (b) Que peut-on en déduire pour les plans (AHF) et (BDG) ?

Exercice 2.8.
$ABCD$ est un tétraèdre.

1. Construire les points E, F, G et H tels que :
   - $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$;
   - $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;
   - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$;
   - $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
2. Que peut-on dire des points E, F, G et H ?

Exercice 2.9.
$ABCD$ est un tétraèdre tel que les faces ABC, ACD et ADB sont des triangles rectangles en A et tel que BCD est un triangle équilatéral.
Soit G le centre de gravité du triangle BCD.

1. Démontrer que les triangles ABC, ABD et ACD sont isocèles.
2. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale aux droites (BC) et (BD).
3. En déduire que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

Exercice 2.10.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AJ}\,;\overrightarrow{AK}\right)$.
Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$, représenté sur la figure 2.3 page suivante, est tel que $B(2\,;0\,;0)$, $D(0\,;6\,;0)$, $E(0\,;0\,;4)$.
Les points L et M sont les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FB]$

1. Placer les points L et M sur la figure ci-dessous.
   Donner (sans justification) les coordonnées des points A, C, F, G et H, puis vérifier par le calcul que les points L et M ont respectivement pour coordonnées $(1\,;0\,;4)$ et $(2\,;0\,;2)$.
2. Déterminer s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{DE} = a\overrightarrow{LM} + b\overrightarrow{LG}$.
   Que peut-on en déduire pour la droite (DE) et le plan (LMG) ?
3. (a) Montrer que les droites (LM) et (HC) sont parallèles.
   (b) Déterminer s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{LM} + b\overrightarrow{LG}$.
   Que peut-on en déduire pour la droite (HI) et le plan (LMG) ?
   (c) Que peut-on en déduire pour les plans (LMG) et (HCI) ?
4. Tracer, respectivement en rouge et en vert, les traces des plans (LMG) et (HCI) sur le parallélépipède $ABCDEFGH$.
   On ne demande aucune justification, mais on indiquera les éventuels parallélismes utilisés et on laissera les éventuels traits de construction.

Exercice 2.11.
$ABCDEFGH$ est un cube représenté sur la figure 2.4 page ci-contre.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[CD]$ et $[EF]$.
L est le milieu du segment $[HB]$.

1. Montrer que le triangle IJK est rectangle et préciser le sommet de l'angle droit.
2. Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
3. Montrer que la droite (HL) et le plan (IJK) sont perpendiculaires.
   On rappelle que pour montrer qu'une droite Δ est perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$, on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de $\mathscr{P}$.
4. En déduire la volume du tétraèdre $IJKH$.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3}$Aire d'une base$\times$Hauteur relative à cette base.

FIG. 2.3 – Figure de l'exercice 2.10

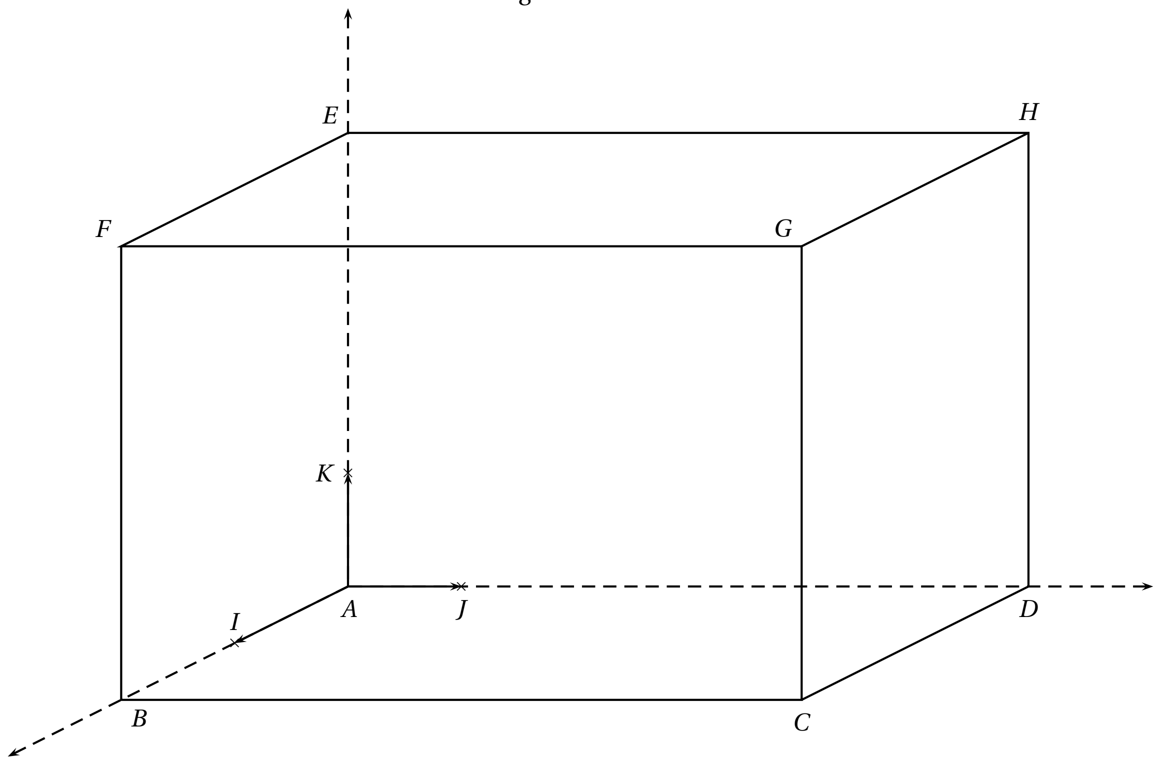
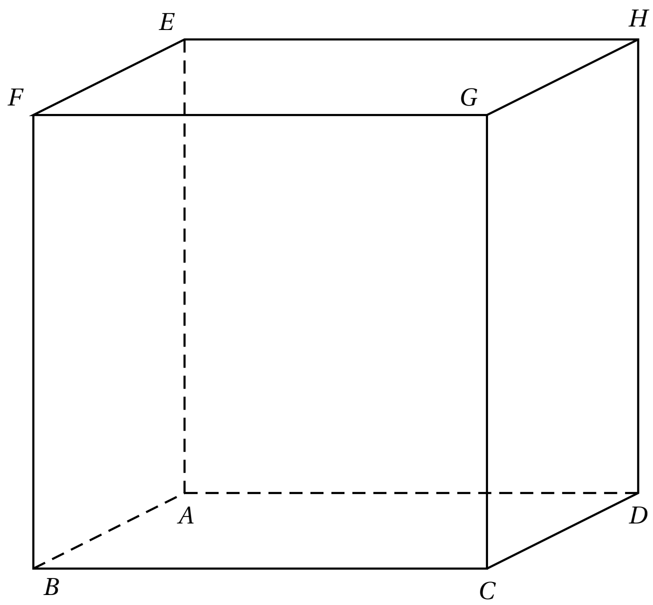


FIG. 2.4 – Figure de l'exercice 2.11



Chapitre 3

Matrices

Sommaire

3.1 Activités

Activité 3.1 (Sommes et combinaisons linéaires de tableaux de nombres).
Un carré magique est un tableau carré dans lequel la somme des lignes, des colonnes ou des digonales est la même.

1. Montrer que le tableau ci-dessous est un carré magique.

2	−1	2
1	1	1
0	3	0

2. Montrer que le tableau précédent peut s'écrire sous la forme de la somme des trois tableaux ci-dessous.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	−1	0
−1	0	1
0	1	−1

0	−1	1
1	0	−1
−1	1	0

3. Construire un autre tableau en multipliant le premier tableau par 2, le deuxième par 3 et le dernier par 4 et en ajoutant les trois tableaux obtenus. Ce tableau est-il un carré magique ?

Activité 3.2 (Sommes et multiplications de tableaux de nombres).
Le premier tableau contient les notes de quatre élèves lors de 3 devoirs.
Les élèves terminent la correction chez eux et gagnent de 0 à 2 points supplémentaires. Les gains des quatre élèves sont donnés par le deuxième tableau.
Les coefficients des trois devoirs sont donnés dans le troisième tableau.

Notes des quatre élèves

	D_1	D_2	D_3
Sarah	12	15	8
David	10	12	13
Nina	16	18	17
Louis	8	15	9

Gains des quatre élèves

	D_1	D_2	D_3
Sarah	1	0	2
David	2	1	0
Nina	1	0	2
Louis	2	2	2

Coefficients des devoirs

D_1	1
D_2	4
D_3	2

1. Calculer les notes finales obtenues par les élèves.
2. Calculer le total des points obtenu par chaque élève en tenant compte des coefficients, puis la moyenne de chacun.

Activité 3.3 (Produits de tableaux de nombres).
Le premier tableau ci-dessous donne les prix, en euros, de trois shampooings avec ou sans remise de fidélité.
Le second tableau indique les quantités achetées par deux clientes A et B.
Calculer le prix total payé par chaque cliente selon qu'elle bénéficie ou non de la remise.

	Nutri	Color	Milky
Prix unitaire	6	7	9
Prix avec remise	5	5	8

Quantités	A	B
Nutri	3	2
Color	1	1
Milky	2	2

3.2 Définitions

Définition 3.1. Une *matrice* A de dimension (ou d'ordre) $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes.
Les nombres sont appelés *coefficients* (ou éléments) de la matrice.
Le coefficient situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne est noté a_{ij}. On note parfois $A = \left(a_{ij}\right)$.

Définition 3.2. Certaines matrices particulières portent des noms :
- Matrice ligne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une ligne ;
- Matrice colonne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une colonne ;
- Matrice carrée : C'est une matrice qui comporte autant de lignes que de colonnes ; on dit qu'elle est d'ordre n (lorsqu'il y a n lignes et n colonnes) ;
- Matrice diagonale : C'est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls en dehors de la première diagonale (celle issue du coin en haut à gauche) ;
- Matrice unité : C'est une matrice diagonale dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 ; on note I_n la matrice unité d'ordre n ;
- Matrice nulle : C'est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à zéro ;
- Transposée d'une matrice A : C'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A ; on la note ${}^{t}A$.

3.3 Égalité de deux matrices

Définition 3.3. Deux matrices $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients situés à la même place sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j.

3.4 Addition de matrices

Définition 3.4. La *somme de deux matrices* $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ de même dimension est la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ telle que les coefficients de C sont la somme des coefficients de A et de B situés à la même place : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout i et j.

Définition 3.5. La *multiplication par un réel k d'une matrice* $A = \left(a_{ij}\right)$ est la matrice notée kA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k : $kA = \left(ka_{ij}\right)$

Théorème 3.1. *Soient A, B et C trois matrices de même dimension et k et k′ deux réels. On a :*
1. $A + B = B + A$ *(on dit que l'addition des matrices est commutative) ;*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(on dit que l'addition des matrices est associative) ;*
3. $k(A + B) = kA + kB$;
4. $(k + k')A = kA + k'A$;
5. $k(k'A) = (kk')A$.

Preuve.
1. $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$ et $B + A = \left(b_{ij} + a_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$
2. $(A + B) + C = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) + \left(c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\right)$ et $A + (B + C) = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij} + c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\right)$

3. $k(A+B) = k\left(a_{ij}+b_{ij}\right) = \left(k(a_{ij}+b_{ij})\right) = \left(ka_{ij}+kb_{ij}\right)$ et $kA+kB = \left(ka_{ij}\right)+\left(kb_{ij}\right) = \left(ka_{ij}+kb_{ij}\right)$
4. $(k+k')A = (k+k')\left(a_{ij}\right) = \left((k+k')a_{ij}\right) = \left(ka_{ij}+k'a_{ij}\right)$ et $kA+k'A = \left(ka_{ij}\right)+\left(k'a_{ij}\right) = \left(ka_{ij}+k'a_{ij}\right)$
5. $k(k'A) = k\left(k'a_{ij}\right) = \left(kk'a_{ij}\right)$ et $(kk')A = \left(kk'a_{ij}\right)$

$\diamondsuit$

3.4.1 Matrices opposées, différence de deux matrices

Définition 3.6. Deux matrices A et B sont dites opposées si elles sont de même dimension et si $A+B$ est la matrice nulle.

Propriété 3.2. *Toute matrice A a une matrice opposée : la matrice $(-1)\times A$. On la notera $-A$.*

Preuve. $A+(-1)\times A = \left(a_{ij}\right)+\left(-a_{ij}\right) = (0)$ $\diamondsuit$

Définition 3.7. Soient A et B deux matrices de même dimension. Alors la différence de A et B, notée $A-B$, est la matrice $A+(-B)$.

3.5 Multiplication de matrices

3.5.1 Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 3.8. Soient A une matrice ligne de dimension $1\times p$ et B une matrice colonne de dimension $p\times 1$, telles que $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Alors le produit $A\times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension 1×1 telle que : $C = \left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p\right) = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i\times b_i\right)$.

3.5.2 Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

Définition 3.9. Soient A une matrice ligne de dimension $n\times p$ et B une matrice colonne de dimension $p\times 1$, telles que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Alors le produit $A\times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension $n\times 1$ telle que la première ligne de C est le produit de la première ligne de A par B, la deuxième ligne de C est le produit de la deuxième ligne de A par B, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1p}b_p \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2p}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1+a_{n2}b_2+\cdots+a_{np}b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} a_{1i}\times b_i \\ \sum_{i=1}^{p} a_{2i}\times b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} a_{ni}\times b_i \end{pmatrix}.$$

3.5.3 Multiplication de deux matrices

Définition 3.10. Soient A une matrice ligne de dimension $n \times p$ et B une matrice colonne de dimension $p \times m$, telles que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$. Alors le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension $n \times m$ telle que le premier coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la première colonne de B, le deuxième coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la deuxième colonne de B, et ainsi de suite.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1p}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{1m} + a_{12}b_{2m} + \cdots + a_{1p}b_{pm} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2p}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{1m} + a_{22}b_{2m} + \cdots + a_{2p}b_{pm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{np}b_{p1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{np}b_{p2} & \cdots & a_{n1}b_{1m} + a_{n2}b_{2m} + \cdots + a_{np}b_{pm} \end{pmatrix}.$$

3.5.4 Propriétés de la multiplication des matrices

Théorème 3.3. *Soient A, B et C trois matrices telles que les opérations suivantes existent. Alors :*

1. *En général $A \times B \neq B \times A$ (on dit que la multiplication des matrices n'est pas commutative) ;*
2. *$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (on dit que la multiplication des matrices est associative) ;*
3. *$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$*
4. *$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$*

On l'admettra.

Remarque. On notera $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots A}_{n \text{ fois}}$ quand ce produit est défini.

3.5.5 Inverse d'une matrice

Définition 3.11. Deux matrices carrées A et B sont dites inverses si $A \times B = B \times A = I$ où I est la matrice unité. On notera alors $B = A^{-1}$ (ou $A = B^{-1}$).

Remarque. Certaines matrices n'ont pas d'inverse. Celles qui en ont un sont dites *inversibles*.

3.6 Exercices

Exercice 3.1.
Lors d'un examen, on a relevé les notes de langues vivantes LV1, LV2 et LV3 pour plusieurs élèves. Ces notes ont été placées dans la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 & 16 & 18 & 17 \\ 10 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 \\ 18 & 19 & 13 & 12 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de cette matrice.
2. Combien d'élèves ont passé ces épreuves ?
3. Quelle est la note obtenue en LV1 par l'élève 3 ?
4. Donner la valeur des éléments a_{11}, a_{23}, a_{33} et a_{36}.

Exercice 3.2.
Préciser le type de chacune des matrices suivantes et déterminer sa transposée :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.3.
On pose $A = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles $A = B$.

Exercice 3.4.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $4A - 2B$.

Exercice 3.5.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M = 4A + \sqrt{2}B$.
2. Déterminer la matrice X telle que $X - A = \sqrt{2}B$.

Exercice 3.6.
Dans chacun des cas suivants, préciser si le produit $A \times B$ existe et, si oui, le calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 3.7.
On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer BC, puis $A(BC)$.
   (b) Calculer AB puis $(AB)C$.
   (c) Que constate-t-on ?.
   (d) Que peut-on dire de $(BC)A$?
2. (a) Calculer $(B+C)$, puis $A \times (B+C)$.
   (b) Calculer AB et AC puis $AB + AC$.
   (c) Que constate-t-on ?.
   (d) Que peut-on dire de $(B+C) \times A$?

Exercice 3.8.
Une petite entreprise commercialise trois produits P_1, P_2 et P_3. À la fin d'une période de quatre semaines, les quantités vendues par semaine sont données par la matrice des quantités Q suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 45 & 120 & 10 \\ 50 & 90 & 15 \\ 32 & 132 & 12 \\ 40 & 98 & 9 \end{pmatrix}$$

Durant la période de quatre semaines, le prix unitaire hors taxe du produit P_1 est de 2 €, pour le produit P_2 de 1 € et pour le produit P_3 de 3 €.

1. Écrire la matrice colonne P des prix unitaires, puis déterminer la matrice V des prix de vente hors taxe pour ces quatre semaines.
2. Calculer le montant TTC que l'entreprise a encaissé pour la vente du produit P_2 durant la période étudiée, avec un taux de TVA de 19,6% sur ces produits.

Exercice 3.9.
Démontrer que les matrices A et B suivantes sont inverses l'une de l'autre.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.10.
1. Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ n'admet pas d'inverse.

Exercice 3.11.
À l'aide de la calculatice, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.12.
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Calculer :
   - $A \times B$;
   - $B \times A$;
   - A^2 ;
   - A^3 ;
   - B^2 ;
   - B^3.
2. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Exercice 3.13.
On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions de A, de B, de $A \times B$, de $B \times A$.
2. Calculer $A \times B$. Que constate-t-on ?
3. B est-elle la matrice inverse de A ?

Exercice 3.14.
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 3.15.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 3.16.
Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.
Calculer $J - I_3$ puis $(J - I_3)^2$ puis $(J - I_3)^3$.

Exercice 3.17.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.
Vérifier que $A^{-1} = {}^{t}A$.

Exercice 3.18.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire l'inverse de la matrice A.
3. On pose $B = A^2$. Déterminer l'inverse de B.

Exercice 3.19.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.

1. Vérifier que A^3 est la matrice nulle.
2. Développer le produit matriciel : $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$.
3. Déduire des résultats précédents la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.20.
On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et que $A = P \times D \times P^{-1}$.
2. Calculer D^2, D^3 et D^4.
3. Expliquer pourquoi $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$, $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$ et $A^4 = P \times D^4 \times P^{-1}$

Exercice 3.21.

Dans une usine de métallurgie, on s'intéresse à la fabrication de pièces mécaniques toutes semblables.
Cette usine possède cinq ateliers A, B, C, D et E et dans chacun de ces ateliers, la production est faite à l'aide de quatre types de machine, plus ou moins vieilles, si bien que la production ne se fait ni au même rythme, ni au même coût.
Le tableau 3.1 de la présente page donne les paramètres de fabrication par machine (le temps, le nombre de pièces produites pendant ce temps et le coût de fabrication de ces pièces) et le tableau 3.2 donne le nombre de machines de chaque type dans les ateliers.

TAB. 3.1 – Paramètres de fabrication

machine	temps (en min)	nombre de pièces	coût (en €)
1	10	120	10
2	7	100	15
3	6	80	12
4	8	110	11

Exemple : en 10 min, la machine 1 fabrique 120 pièces pour un coût total de 10 €

TAB. 3.2 – Nombre de machines par atelier

machine	atelier				
	A	B	C	D	E
1	3	0	2	0	0
2	0	4	2	0	0
3	0	0	0	4	0
4	1	0	0	1	5

1. À l'aide du produit de deux matrices, donner la tableau des paramètres de fabrication de chaque atelier.
   Quel sera le nombre de pièces fabriquées par l'atelier C en 34 min de fonctionnement de ses quatre machines ? Et pour quel coût ?
2. Quel sera la coût total sur les cinq ateliers ?
   Quel nombre de pièces au total pourront etre fabriquées ?
   Quel sera le temps total de fonctionnement des 22 machines ?

Exercice 3.22 (Chaîne de MARKOV).

Une marque a une clientèle fidèle avec un produit A. Elle a lancé sur le marché un nouveau produit B. Après quelques mois de vente, une enquête auprès de sa clientèle détermine que **chaque mois** :

- 20 % des acheteurs du produit A abandonnent A pour choisir le produit B ;
- 10 % des consommateurs du produit B sont déçus et reviennent au produit A.

On étudie une population fixe de 24 000 consommateurs de cette marque, répartis le mois de l'enquête en 15 000 personnes consommant le produit A et 9 000 consommant le produit B.
On note a_n et b_n les nombres de consommateurs de A et de B au bout de n mois. On a donc $a_0 = 15000$ et $b_0 = 9000$.
On a toujours $a_n + b_n = 24000$. On veut évaluer l'évolution de la distribution des consommateurs entre les produits A et B à long terme.

1. *À l'aide de la calculatrice.*
   (a) Montrer que $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
   On notera $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
   (b) Exprimer $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ en donction de $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$ et de M.
   (c) Calculer, à l'aide de la calculatrice, les puissances successives de M et la répartition des consommateurs correspondante, jusqu'à $n = 20$.
   (d) Quelle semble être la distribution à long terme des consommateurs entre les deux produits ?
2. *À l'aide d'un tableur.*
   (a) i. Entrer les éléments de la matrice M dans la plage A2 : B3.
   Entrer les valeurs de a_0 et b_0 dans la plage D2 : E2.
   ii. Pour déterminer le produit $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \times M$:
   - sélectionner la plage D3 : E3
   - entrer dans la barre de formule « =PRODUITMAT(D2 : E2 ; A2 :B3) »
   - Valider en appuyant sur les touches « CTRL + MAJ + Entrée »

   Vous devez alors lire la valeur a_1 en D3 et b_1 en E3.
   (b) i. Numéroter les mois en entrant en colonne C les valeurs de n (0 en C2 ; 1 en C3 puis sélection des deux cases et copier / coller vers le bas jusqu'à la valeur $n = 30$).
   ii. Copier coller les cases D3 : E3 jusqu'aux cases correspondant à $n = 30$
   (c) i. La distribution obtenue confirme-t-elle les résultats obtenus à la calculatrice ?
   ii. Le directeur voudrait savoir comment aurait évolué cette distribution si celle de départ avait été différente.
   En observant la distribution à $n = 30$ après chaque modification, modifier les cases correspondant à a_0 et b_0 de la façon suivante :

- $a_0 = 20000$ et $b_0 = 4000$;
- $a_0 = 24000$ et $b_0 = 0$;
- $a_0 = 10000$ et $b_0 = 14000$;
- $a_0 = 5000$ et $b_0 = 19000$;
- $a_0 = 0$ et $b_0 = 24000$.

Répondre alors au directeur.

3. *Travail théorique.*
L'état stable $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ pour le marché de ces deux produits vérifie $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ et $a + b = 24000$.
Résoudre le système correspondant et retrouver les valeurs observées dans les questions précédentes.

Chapitre 4

Équations cartésiennes de plans et de droites

Sommaire

4.1 Équation cartésienne d'un plan

4.1.1 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 4.1. *Le plan est muni d'un repère* $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

- *Tout plan* $\mathscr{P}$ *de l'espace admet une équation de la forme* $ax + by + cz = d$ *avec* $(a\,;\, b\,;\, c) \neq (0\,;\,0\,;\,0)$
- *Si* $(a\,;\, b\,;\, c) \neq (0\,;\,0\,;\,0)$ *alors l'ensemble des points* M *de coordonnées* $(x\,;\, y\,;\, z)$ *vérifiant* $ax + by + cz = d$ *est un plan.*

On l'admettra.

4.1.2 Vecteur normal à un plan

Définition 4.1. $\vec{n}$ est dit *vecteur normal* au plan $\mathscr{P}$ lorsqu'il est orthogonal à deux droites sécantes incluses dans $\mathscr{P}$.

Propriété 4.2. *Soit* $\vec{n}$ *normal à un plan* $\mathscr{P}$ *et* $A \in \mathscr{P}$. *Pour tout point* $M \in \mathscr{P}$ *on a* $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Preuve. Étant orthogonal à deux droites du plan, il est orthogonal à toute droite du plan. ♢

Théorème 4.3. *Dans un repère orthonormal, soit* $\vec{n}$ *non nul et* $\mathscr{P}$ *un plan.*

$$\vec{n}\,(a\,;\, b\,;\, c) \text{ normal à } \mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{P} \text{ admet une équation de la forme } ax + by + cz = d.$$

Preuve. Soient $A\,(\alpha\,;\, \beta\,;\, \gamma)$ un point de $\mathscr{P}$ et $M\,(x\,;\, y\,;\, z)$ un point quelconque l'espace.

$$\begin{aligned} M\,(x\,;\, y\,;\, z) \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,(x-\alpha\,;\, y-\beta\,;\, z-\gamma) \perp \vec{n}\,(a\,;\, b\,;\, c) \\ &\Leftrightarrow a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0 \text{ (le repère est orthonormal)} \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = a\alpha + b\beta + c\gamma \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = d \text{ en posant } d = a\alpha + b\beta + c\gamma \end{aligned}$$

♢

4.1.3 Propriétés des plans et équations cartésiennes

Propriété 4.4 (Parallélisme)**.** *L'espace étant muni d'un repère orthonormal, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans d'équations respectives $\mathscr{P} : ax+by+cz=d$ et $\mathscr{P}' : a'x+b'y+c'z=d'$.*

$$\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \Leftrightarrow \text{ il existe } k \text{ tel que } a=ka', b=kb' \text{ et } c=kc'$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' &\Leftrightarrow \vec{n}\,(a;b;c) \text{ et } \vec{n'}\,(a';b';c'), \text{ vecteurs normaux respectifs de } \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P}', \text{ colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \text{ tel que } a=ka', b=kb' \text{ et } c=kc'\end{aligned}$$

◇

Remarque. Une conséquence de cette propriété est que les plans $\mathscr{P} : ax+by+cz=d$ et $\mathscr{P}' : ax+by+cz=d'$ sont parallèles $(k=1)$.

Propriété 4.5 (Perpendicularité)**.** *L'espace étant muni d'un repère orthonormal, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans d'équations respectives $\mathscr{P} : ax+by+cz=d$ et $\mathscr{P}' : a'x+b'y+c'z=d'$.*

$$\mathscr{P} \perp \mathscr{P}' \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathscr{P} \perp \mathscr{P}' &\Leftrightarrow \vec{n}\,(a;b;c) \text{ et } \vec{n'}\,(a';b';c'), \text{ vecteurs normaux respectifs de } \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P}', \text{ orthogonaux}\\ &\Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0 \text{ (le repère est orthonormal)}\end{aligned}$$

◇

4.1.4 Équations particulières

Propriété 4.6 (Équations des plans de base)**.** *Le plan étant muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on a :*

- *le plan (xOy) admet $z=0$ comme équation cartésienne ;*
- *le plan (zOy) admet $x=0$ comme équation cartésienne ;*
- *Le plan (xOz) admet $y=0$ comme équation cartésienne.*

Preuve. $(xOy)\perp\vec{k}\,(0;0;1)$ donc (xOy) admet comme équation $0x+0y+1z=d$. $O(0;0;0)\in(xOy)$ donc $d=0$. De même pour $(zOy)\perp\vec{\imath}\,(1;0;0)$ et $(xOz)\perp\vec{\jmath}\,(0;1;0)$. ◇

Propriété 4.7 (Plans parallèles aux plans de base)**.** *Le plan étant muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on a :*

- *tout plan parallèle à (xOy) admet $z=d$ comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à (zOy) admet $x=d$ comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à (xOz) admet $y=d$ comme équation cartésienne.*

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathscr{P} \parallel (xOy) &\Leftrightarrow \mathscr{P} \perp \vec{k}\,(0;0;1)\\ &\Leftrightarrow \mathscr{P} \text{ admet comme équation } 0x+0y+1z=d\end{aligned}$$

De même dans les deux autres cas. ◇

Propriété 4.8 (Plans parallèles aux axes)**.** *Le plan étant muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on a :*

- *tout plan parallèle à (Ox) admet $by+cz=d$ avec $(b;c)\neq(0;0)$ comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à (Oy) admet $ax+cz=d$ avec $(a;c)\neq(0;0)$ comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à (Oz) admet $ax+by=d$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ comme équation cartésienne.*

On l'admettra.

4.2 Système d'équations cartésiennes d'une droite

4.2.1 Un exemple

En observant l'axe (Ox) on constate que tous les points de cet axe ont pour coordonnées $(k\,;0\,;0)$ où k est un réel quelconque. Les points de la droite (Ox) vérifient donc le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$

Mais ces deux équations sont celles de (xOz) et de (xOy). Or (Ox) est l'intersection de ces deux plans.

Considérons deux autres plans dont (Ox) est l'intersection, par exemple le plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}=(0\,;1\,;1)$ passant par O, donc d'équation $\mathscr{P}: y+z=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ de vecteur normal $\overrightarrow{n'}=(0\,;-1\,;1)$ passant par O donc d'équation $\mathscr{P}': -y+z=0$. Les points de (Ox) appartiennent aux deux plans donc vérifient $\left\{\begin{array}{l} y+z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right.$ ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l} y=-z \\ y=z \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$.

De cet exemple on peut généraliser :

- une droite étant l'intersection de deux plans, les points de cette droite vérifient les équations des deux plans donc le système d'équation constitué par les deux équations de ces plans ;
- On peut trouver plusieurs plans dont une droite est l'intersection donc le système d'équation d'une droite est un des systèmes d'équations que vérifient les points de la droite.

4.2.2 Système d'équations cartésiennes d'une droite

Théorème 4.9. *Le plan étant muni d'un repère* $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$*, on a :*

- *toute droite de l'espace admet un système d'équation de la forme* $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{array}\right.$ *avec* $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)\neq(a'\,;b'\,;c')$ *et tels que il n'existe pas de réel k tel que* $a=ka'$, $b=kb'$ *et* $c=kc'$ *;*
- *Si* $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)\neq(a'\,;b'\,;c')$ *et qu'il n'existe pas de réel k tel que* $a=ka'$, $b=kb'$ *et* $c=kc'$ *alors l'ensemble des points M dont les coordonnées* $(x\,;y\,;z)$ *vérifient* $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{array}\right.$ *est une droite.*

4.2.3 Système d'équations cartésiennes des axes

Propriété 4.10. *Le plan étant muni d'un repère* $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$*, on a :*

- *l'axe* (Ox) *admet* $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ *comme système d'équations cartésiennes ;*
- *l'axe* (Oy) *admet* $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ *comme système d'équations cartésiennes ;*
- *l'axe* (Oz) *admet* $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ a=0 \end{array}\right.$ *comme système d'équations cartésiennes.*

4.3 Exercices

4.3.1 Équations de plans

Exercice 4.1.
$\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est orthonormé.
Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(1;-2;7)$ et dont $\vec{u}=\left(-1;\frac{1}{2};2\right)$ est un vecteur normal.
Déterminer une équation de $\mathscr{P}$.

Exercice 4.2.

1. $2x+3y-4z+1=0$ est l'équation d'un plan.
   Quels points parmi $A\left(0;0;\frac{1}{4}\right)$, $B\left(0;\frac{1}{4};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$ et $D(1;-1;2)$ appartiennent à ce plan ?
2. Soit $A(1;1;1)$, $B(0;-1;2)$ et $C(-2;1;2)$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et en déduire que A, B et C définissent un plan.
   (b) Sachant que ce plan est d'équation $ax+by+cz+d=0$ et que A, B et C appartiennent à ce plan, en déduire une équation de ce plan.

Exercice 4.3.
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $2x+y+z=6$.

1. Déterminer les coordonnées du point A, intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses (Ox).
2. Déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives du plan $\mathscr{P}$ avec les axes (Oy) et (Oz).
3. Dans un repère de l'espace, placer les points A, B et C.
   Tracer les droites (AB), (AC) et (BC), traces du plan $\mathscr{P}$ sur les plans de coordonnées.

Exercice 4.4.
Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par : $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$ et $C(0;0;6)$ sous la forme $ax+by+cz=d$.
On choisira d entier afin que a,b et c soient aussi des entiers.

Exercice 4.5.
Soit $A(1;1;1)$, $B(0;2;3)$ et $C(1;2;0)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.
2. Soit $ax+by+cz=d$ une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   Déterminer des valeurs possibles pour a, b, c et d.
   En déduire une équation de $\mathscr{P}$ dont tous les coefficients sont entiers.

Exercice 4.6.

1. Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans le repère de la figure 4.1 page ci-contre.
2. Déterminer les équations des plans
   (a) $\mathscr{P}_1$ parallèle à (Ox) passant par B et C ;
   (b) $\mathscr{P}_2$ parallèle à (Oy) passant par A et E ;
   (c) $\mathscr{P}_3$ parallèle à (Oz) passant par B et F.
3. Déterminer les équations des plans (ABC), (ADE), (CFB) et (FED).

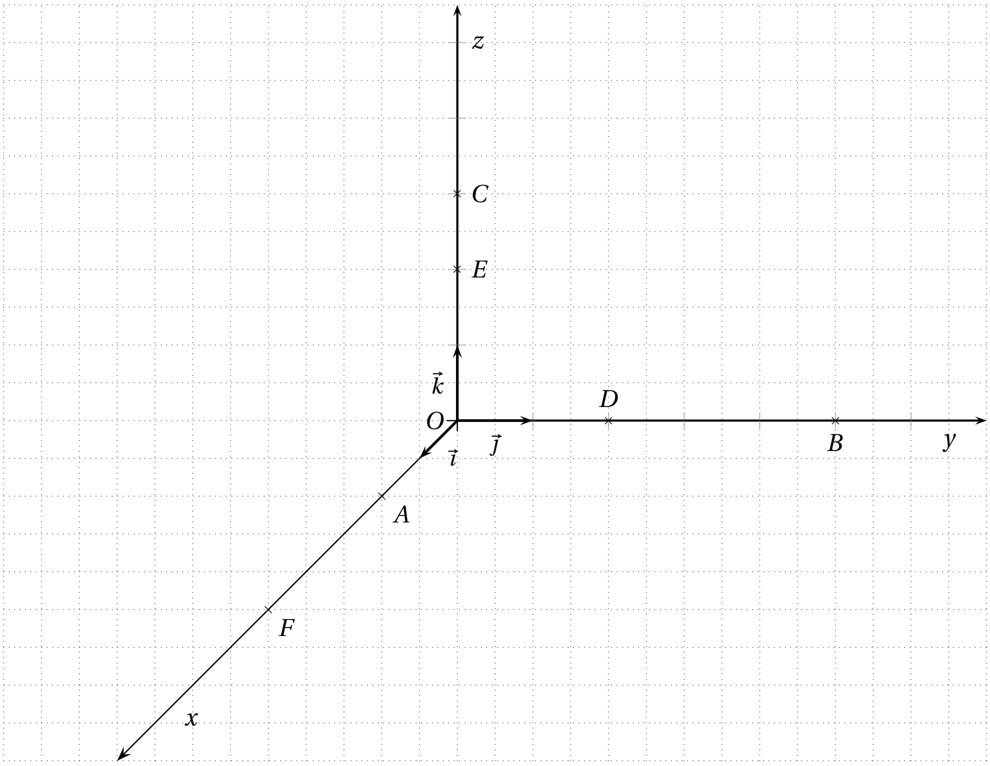
Exercice 4.7.
On considère les points $A(0;3;2)$, $B(0;2;4)$ et $C(3;0;2)$.

1. Montrer que ces points définissent un plan $\mathscr{P}$.
2. Justifier que la droite (AB) est la trace du plan $\mathscr{P}$ sur le plan (yOz).
3. Déterminer graphiquement les points d'intersection E et F de la droite (AB) sur les axes (Oz) et (Oy).
4. En déduire la représentation du plan $\mathscr{P}$.

Exercice 4.8.
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. L'unité est le centimètre.
On considère les points $A(-1;3;3)$, $B(0;5;5)$, $C(2;3;6)$ et $D(1;1;4)$.

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$.
   (c) Montrer que $AB=AD$.
   (d) On en déduit que $ABCD$ est un carré. Calculer son aire.
2. (a) Calculer les coordonnées du point I, centre du carré $ABCD$.
   (b) Soit $J\left(\frac{9}{2};5;\frac{1}{2}\right)$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (ABC).

FIG. 4.1 – Figure de l'exercice 4.6



(c) En déduire une équation du plan (ABC).

3. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en un point F que l'on déterminera.

Exercice 4.9.

$OPQRSTUV$ est un cube de côté 6 dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace (voir la figure 4.2 page suivante).

1. (a) Soit $G(4\,;2\,;4)$, montrer que les points R, G et T sont alignés.
   (b) Montrer que les droites (RG) et (SG) sont perpendiculaires.
2. On désigne par I le milieu de $[TP]$ et par J le milieu de $[VR]$.
   (a) Calculer les coordonnées de I et de J.
   (b) Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[IJ]$.
   (c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
   (d) Calculer l'aire du triangle SIJ.
3. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
   (b) Déterminer alors une équation du plan (SUM).

Exercice 4.10.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(A\,; \overrightarrow{AI}\,; \overrightarrow{AJ}\,; \overrightarrow{AK}\right)$.
Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ est tel que $B(2\,;0\,;0)$, $D(0\,;6\,;0)$, $E(0\,;0\,;4)$.
Les points L et M sont les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FB]$

1. Placer les points L et M sur la figure 4.3 page suivante.
   Donner (sans justification) les coordonnées des points A, C, F, G et H, puis vérifier par le calcul que les points L et M ont respectivement pour coordonnées $(1\,;0\,;4)$ et $(2\,;0\,;2)$.
2. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation : $y = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation : $2x + z = 6$.
   (a) Montrer que $\mathscr{P}_l$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
   (b) Soit Δ l'intersection des deux plans $\mathscr{P}_l$ et $\mathscr{P}_2$.
   Montrer que Δ est la droite (ML).
   (c) Justifier que le plan $\mathscr{P}_2$ est parallèle à l'axe $\left(A\,; \overrightarrow{AJ}\right)$.
   (d) Tracer en rouge sur la figure l'intersection de $\mathscr{P}_2$ avec le pavé $ABCDEFGH$.
   On ne demande pas de justifier cette construction.

FIG. 4.2 – Figure de l'exercice 4.9

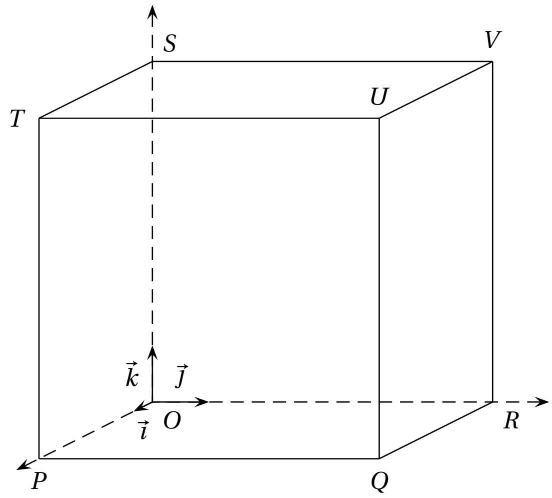
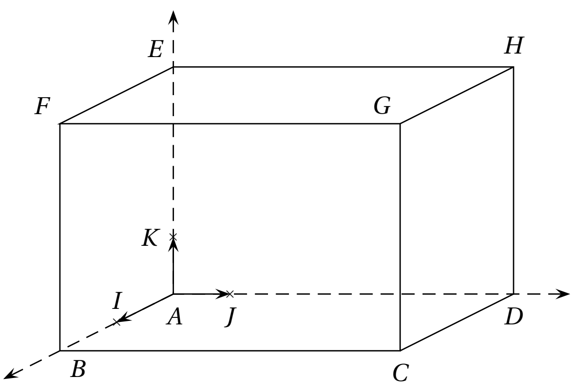


FIG. 4.3 – Figure de l'exercice 4.10



4.3.2 Équations de droites

Exercice 4.11.
On donne $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans d'équations respectives $2x+3y-4z+5=0$ et $-x+y-z+2=0$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles.
2. En déduire quel est l'ensemble des points $M \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$.

Exercice 4.12.
L'espace est muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ orthonormé. A et B sont les deux points de coordonnées $A(0\,;\,0\,;2)$ et $B(0\,;3\,;2)$.

1. Montrer que A et B appartiennent au plan (yOz).
2. Montrer que A et B appartiennent à un plan parrallèle à (xOy).
3. En déduire un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).

Exercice 4.13.
L'espace est muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ orthonormé. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont les deux plans d'équations respectives $2x+3y+z-4=0$ et $z=2$.

1. (a) Le système $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z-4 \\ z=2 \end{array}\right.$ définit-il une droite $\mathscr{D}$?
   (b) Construire la trace de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{Q}$ sur les plans de coordonnées.
   (c) En déduire la représentation de $\mathscr{D}$.
2. Mêmes questions avec les systèmes suivants :
   - $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-z-7=0 \\ x=5 \end{array}\right.$
   - $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z-8=0 \\ -x+y-z-2=0 \end{array}\right.$
   - $\left\{\begin{array}{l} x+3y+2z-6=0 \\ 3x+y+z-4=0 \end{array}\right.$

Exercice 4.14.
Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite :

1. qui passe par $A(-3\,;2\,;0)$ et qui est perpendiculaire au plan (xOy) ;
2. qui passe par $B(5\,;0\,;-2)$ et qui est perpendiculaire au plan (xOz).

Exercice 4.15.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1. On considère les points $A(-1\,;2\,;1)$ et $B(3\,;-2\,;0)$.
   (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite (AB).
   (b) Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de la droite (AB).
   Expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{-1}$.
   (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
2. De la même manière, déterminer un système d'équations cartésiennes de :
   - (CD) avec $C(-1\,;2\,;-3)$ et $D(0\,;-2\,;1)$.
   - (EF) avec $E(1\,;0\,;1)$ et $F(1\,;-2\,;4)$;

Exercice 4.16.
Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, $\mathscr{D}$ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+2y-z+3=0 \end{array}\right.$.

1. (a) Résoudre le système suivant $\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+2y-z+3=0 \\ x=0 \end{array}\right.$.
   (b) Interpréter géométriquement la solution du système résolu en 1a.
2. Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec chacun des plans de coordonnées.

Chapitre 5

Systèmes linéaires d'équations

Sommaire

5.1 Rappel du chapitre 3 : Inverse d'une matrice

Définition 5.1. Deux matrices carrées A et B sont dites inverses si $A \times B = B \times A = I$ où I est la matrice unité. On notera alors $B = A^{-1}$ (ou $A = B^{-1}$).

Remarque. Certaines matrices n'ont pas d'inverse. Celles qui en ont un sont dites *inversibles*.

5.2 Écriture matricielle d'un système linéaire d'équations

Soit le système de deux équations à deux inconnues $\left\{\begin{array}{l} 6x+5y=2 \\ -x-y=3 \end{array}\right.$.

En posant $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce système s'écrit $A \times X = B$ (ou $AX = B$).

Propriété 5.1. *Tout système linéaire d'équations s'écrit sous la forme matricielle $AX = B$ où X est la matrice colonne des inconnues.*

Théorème 5.2. *Soit un système linéaire d'équations s'écrivant sous la forme matricielle $AX = B$ avec A matrice carrée d'ordre n. Alors ce système admet une solution unique si et seulement si la matrice A possède une matrice inverse A^{-1}. Dans ce cas, la solution est donnée par la matrice colonne $X = A^{-1}B$.*

Preuve. $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ ◇

5.3 Exercices

Exercice 5.1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice inverse de A est $\begin{pmatrix} 2,5 & -2 \\ 3,5 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Soit le système $\left\{\begin{array}{l} 6x-4y=7 \\ 7x-5y=8 \end{array}\right.$.

   En utilisant la matrice A^{-1}, chercher la solution de ce système.

Exercice 5.2.

Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux sortes de chaises, les unes vendues 30 € pièce, les autres 60 € pièce. La production d'une journée a été totalement vendue et le montant des ventes s'élève à 7 260 €.

On note x le nombre de chaises à 30 € et y le nombre de chaises à 60 € vendues dans la journée.

1. Montrer que :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 7260 \end{pmatrix}$$
2. Déterminer l'inverse de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}$.
3. En déduire le nombre de chaises à 30 € et à 60 € qui ont été vendues.

Exercice 5.3.

Pour chacun des systèmes suivants, les écrire sous la forme matricielle $A \times X = B$, chercher la matrice inverse de A et, à l'aide de votre calculatrice, en déduire la solution du système.

1. $\begin{cases} -2x + 5y = 1 \\ 3x - 8y = -3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ -x + y - 2z = -5 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x - y + z + 2t = 4 \\ 3x - 2y + 5z - 2t = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

Exercice 5.4.

Un triathlon comprend un parcours de natation, suivi d'un parcours à bicyclette, puis d'un parcours de course à pied. La distance totale est de 32 km. Le parcours de course à pied dépasse celui de natation de 8,8 km et le parcours à bicyclette est deux fois plus long que celui de course à pied.

On se propose de calculer la longueur de chacun des parcours.

On note n la longueur du parcours de natation, p celle du parcours de course à pied et b celle du parcours à bicyclette.

1. Montrer que :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet que A est inversible. Montrer que : $\begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. À l'aide de votre calcutrice, déterminer n, p et b.

Exercice 5.5.

L'espace est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On donne $A(0;1;1)$, $B(1;2;-3)$ et $C(2;-1;0)$.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan.
2. On pose $(ABC) : ax + by + cz = d$.
   (a) Montrer que les réels a, b, c et d vérifient le système :
   $$\begin{cases} b + c = d \\ a + 2b - 3c = d \\ 2a - b = d \end{cases}$$
   (b) En posant $d = 11$ et en utilisant les matrices, déterminer une équation de (ABC).

Chapitre 6

Fonctions de deux variables

Sommaire

6.1 Activités

Activité 6.1.
Soit un triangle ABC rectangle en A. On note $x = AB$, $y = AC$ et $z = BC$.

1. (a) Exprimer z en fonction de x et de y.
   On notera $f(x, y)$ la fonction qui, à un couple $(x; y)$, associe la valeur z.
   On a donc $f(x, y) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
   (b) Calculer $f(3,4)$. Interpréter le résultat.
   (c) Calculer $f(8,6)$, $f(6,8)$ et $f(1,8)$.
2. On veut utiliser un tableur pour procéder aux calculs de $f(x, y)$ pour différentes valeurs de x et de y et pour représenter une telle fonction.
   On utilisera pour cela Excel (et non sur Calc qui ne gère pas de telles représentations graphiques).
   La colonne A sera réservée aux valeurs de x et la ligne 1 aux valeurs de y.
   La plage B2 : L12 sera destinée aux calculs de $f(x, y)$.
   (a) Entrer des valeurs de x et de y variant de 1 à 10
   (b) Quelle formule doit-on entrer en B2 qui, par copie automatique, permet d'obtenir tous les résultats jusqu'à L2 ? Le faire. Vérifier les résultats obtenus à la question 1c.
   (c) Sélectionner la plage B2 : L2 et, à l'aide de l'assistant graphique en utilisant le type de graphique *surface* puis *surface 3D*, représenter les données. Contempler votre œuvre.
   (d) On désire obtenir la représentation graphique de ces données mais *vue d'au-dessus*. Sélectionner la plage B2 : L2 et, à l'aide de l'assistant graphique en utilisant le type de graphique *surface* puis *contour*, représenter les données. Contempler votre œuvre.

Activité 6.2 (Utilisation du logiciel Gnuplot).
L'ensemble de ce qui suit provient du site Calque.

1. **Prise en main**
   (a) *Précisions*
   Les captures d'écran qui suivent sont faites sous Windows et peuvent être légèrement différentes de ce que vous affichez.
   Une ligne de commande peut être corrigée tant qu'elle n'est pas validée avec la touche Entrée mais pas avec la souris : il faut utiliser les touches de déplacement horizontal.
   (b) *Ma première ligne de commande*
   On saisit plot x**2 (la double étoile signifiant *exposant*) et on valide avec la touche Entrée. Une fenêtre apparaît avec la courbe représentant la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-10; 10]$. On obtient la figure 6.1 page 38.

Par défaut, la plage des x est $[-10;10]$ et la plage des y s'adapte. Si je veux une plage des x égale à $[-2;3]$ je rajoute une nouvelle ligne set xrange [-2 :3] (attention au :) et si je valide, ça ne marche pas. La commande est bien enregistrée mais pour l'appliquer à la figure, il faut taper une ligne de plus : replot.

(c) *Améliorations*
   - Pour dessiner plusieurs courbes, il suffit de les séparer par une virgule.
     Par exemple plot [-2 :3] x**2,-x+5.
     Il peut être pratique de les définir d'abord (faire Entrée après chaque ligne) :
     f(x)=x**2
     g(x)=-x+5
     set xrange [-2 :3]
     plot f(x),g(x)
   - On obtient la palette des couleurs en tapant simplement test. Mais attention, ce test dépend du terminal (windows ou linux) qui a été défini. On tape test et on obtient une image de test avec les codes couleurs ou symboles affichés à droite.
     Pour donner à la courbe dessinée par une ligne de la couleur désirée, on peut taper plot f(x) 5. Si on veut une courbe dessinée avec un symbole, on tape plot f(x) with lines 5, g(x) with points 6. On obtient alors la figure 6.2 page 38.

2. **Surfaces dans l'espace**

(a) *Le fonctionnement de base*
   Pour représenter la fonction $f(x;y)\mapsto x^2-y^2$, on peut saisir (faire Entrée après chaque ligne) :
   set xrange [-10 :10]
   set yrange [-10 :10]
   f(x,y)=x**2-y**2
   splot f(x,y)
   Ne pas oublier le s de splot (voir la figure 6.3 page 38).

   Si on fait un clic droit sur la figure, on s'aperçoit qu'on peut manipuler la : la faire tourner, la voir par en dessous, du dessus etc.

(b) *Des améliorations*
   - Pour que la surface ne soit plus transparente et que les zones cachées n'apparaissent pas :
     set hidden3d
     replot
   - La figure 6.4 page 38, avec un gradient de couleur est obtenue avec :
     set pm3d
     replot
   - Par défaut, l'intervalle des x et celui des y est divisé en 10. La surface est donc, vue du dessus composée de 100 carrés de de divisions des x, le second celui des y). On a donc les carrés qui indiquent par leur couleur, leur hauteur approximative. Attention toutefois à ne pas diviser excessivement : le logiciel se noierait dans les calculs. couleurs. Si on veut l'augmenter, il suffit de saisir set isosamples 30,30 (le premier nombre est le nombre

(c) *Faire apparaître les lignes de niveau*
   - *Une surface*
     Représenter d'abord la fonction f définie pour $x\in[-2,5;2,5]$ et $y\in[-2,5;2,5]$ par $f(x,y)=(x^2+3y^2)\exp(1-(x^2+y^2))$ en saisissant :
     f(x,y)=(x**2+3*y**2)*exp(1-(x**2+y**2))
     set xrange [-2.5 :2.5]
     set yrange [-2.5 :2.5]
     set pm3d
     set isosamples 30,30
     set hidden3d
     splot f(x,y)
     On obtient la figure 6.5 page 38 qui va nous permettre, avec ces deux « pics » de mieux mettre en évidence la notion de ligne de niveau.
   - *La commande de base*
     Pour faire apparaître les lignes de niveau, saisir :
     set contour both
     set key left bottom (pour mettre la légende en bas à gauche)
     replot
     On obtient la figure 6.6 page 38.
     À la place de contour both, qui met des lignes de niveau sur la surface et sur le plan du bas, on aurait pu mettre (*ne pas le faire*) :

  - contour surface qui met des lignes de niveau seulement sur la surface ;
  - contour base qui met des lignes de niveau seulement sur le plan du bas.
- *Choisir ses lignes de niveau*
  Si on désire représenter seulement les lignes de niveau correspondant à 2,5 et 2,6 on tapera le code set cntrparam levels discrete 2.5, 2.6 (*ne pas le faire*).
- *Lignes de niveau vues de dessus*
  Pour obtenir le gradient de couleur puis les lignes de niveau uniquement dans le plan du bas (comme une vue du dessus) :
  unset surface (supprime la surface)
  set pm3d map (met le gradient de couleur sur le plan de base)
  unset key (supprime la légende)
  set title "cartographie de la fonction f" (met un titre)
  replot
  Puis :
  unset pm3d (supprime le gradient)
  set isosamples 60,60 (augmente la définition)
  replot
  On obtient alors la figure 6.7 page suivante

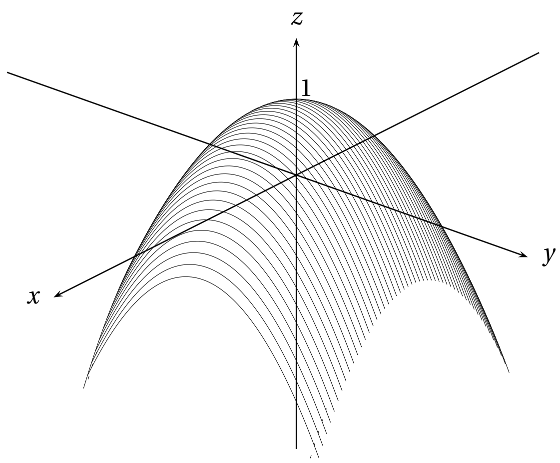
6.2 Fonctions de deux variables et surface

Définition 6.1. Une fonction numérique de deux variables est une fonction qui à deux nombres x et y associe un nombre z noté $z = f(x, y)$.
Une telle fonction est représentée dans l'espace par une surface d'équation $z = f(x, y)$.

Exemple 6.1. Pour toute la suite nous considèrerons la fonction de deux variables f définie par :

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Un logiciel en donne la représentation suivante :



Une telle représentation n'est guère exploitable. Si l'on peut deviner (éventuellement) les coordonnées du sommet $(0;0;1)$, quasiment aucun autre point n'est lisible.

Pour pouvoir procéder plus facilement à des lectures graphiques, on fait apparaître sur cette surface des lignes de niveau $x = k$, $y = k$ et $z = k$ où k prend des valeurs entières (0, 1, 2, 3, etc. ou bien 0, 5, 10, etc.), c'est-à-dire l'ensemble des points appartenant à cette surface tels que $x = 0$, $x = 1$, etc. $y = 0$, $y = 1$ etc. et $z = 0$, $z = 1$ etc.

On colore en général les espaces entre deux lignes de niveau $z = 0$, $z = 1$ etc.

Enfin on place les axes à l'extérieur.

On obtient alors, avec un autre logiciel la figure 6.8 page 39.

Enfin un logiciel plus récent donne encore la figure 6.9 page 39 mettant en évidence par des couleurs les valeurs différentes prises par z.

Exercice.
Montrer, par le calcul, que les coordonnées du sommet sont bien $(0;0;1)$.

FIG. 6.1 – Ma première ligne de commande

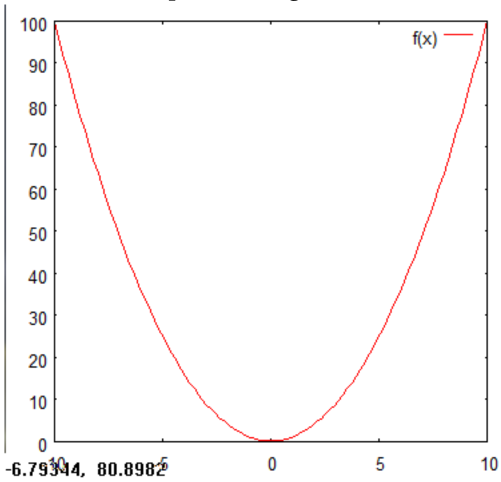


FIG. 6.2 – Couleurs et symboles

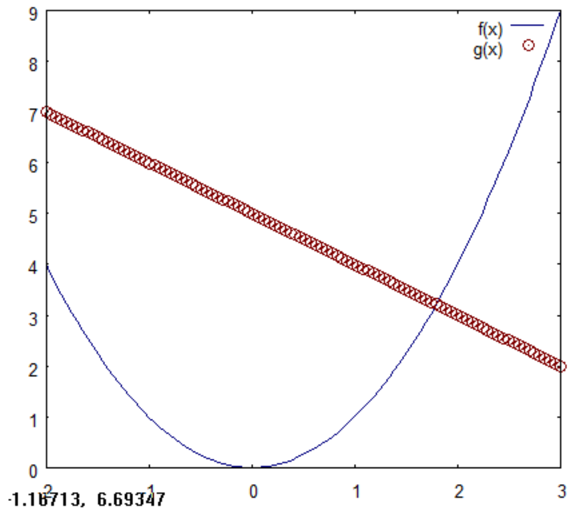


FIG. 6.3 – Surface

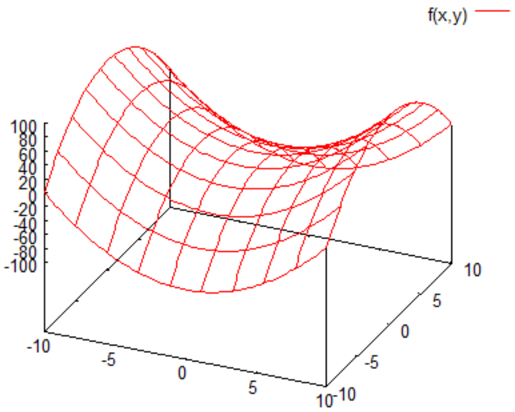


FIG. 6.4 – Surface en couleur

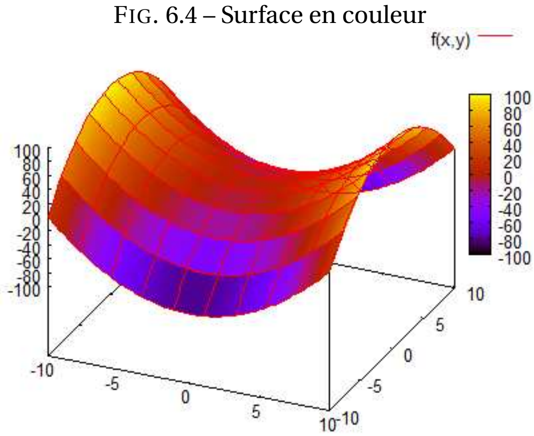


FIG. 6.5 – Deux pics

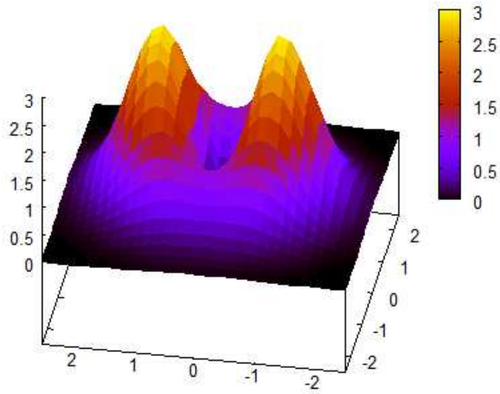


FIG. 6.6 – Lignes de niveau

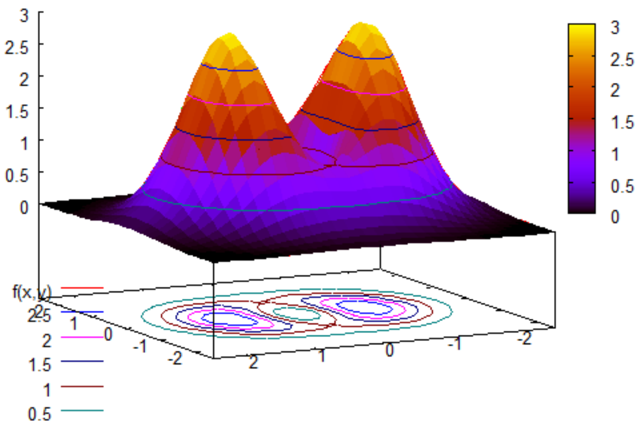


FIG. 6.7 – Lignes de niveau vues de haut

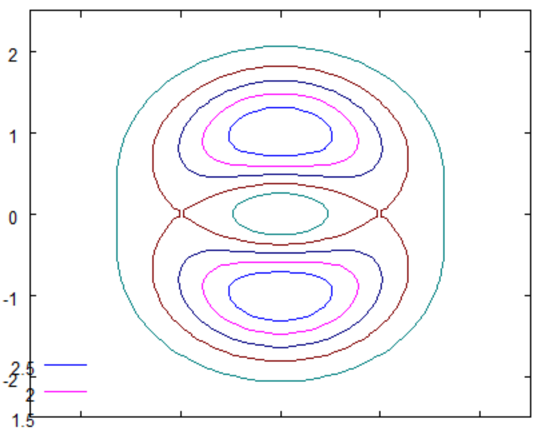
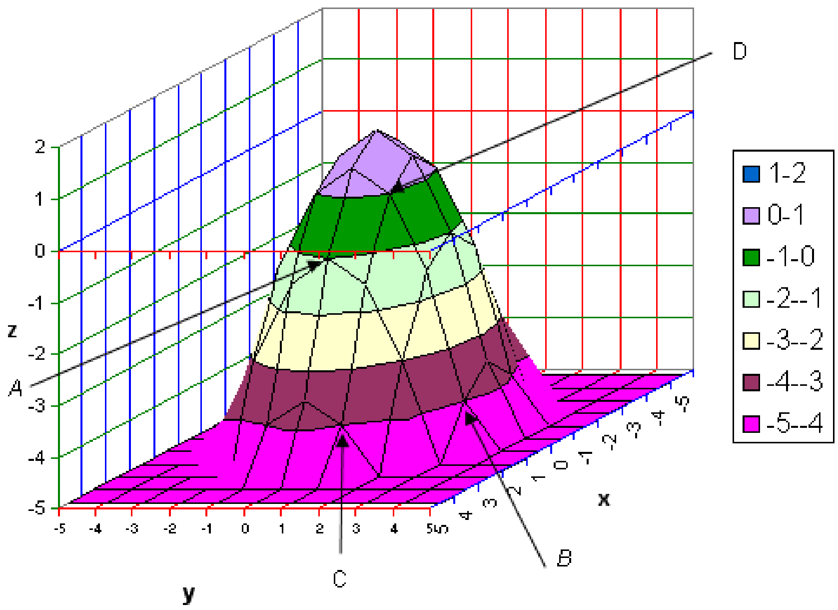
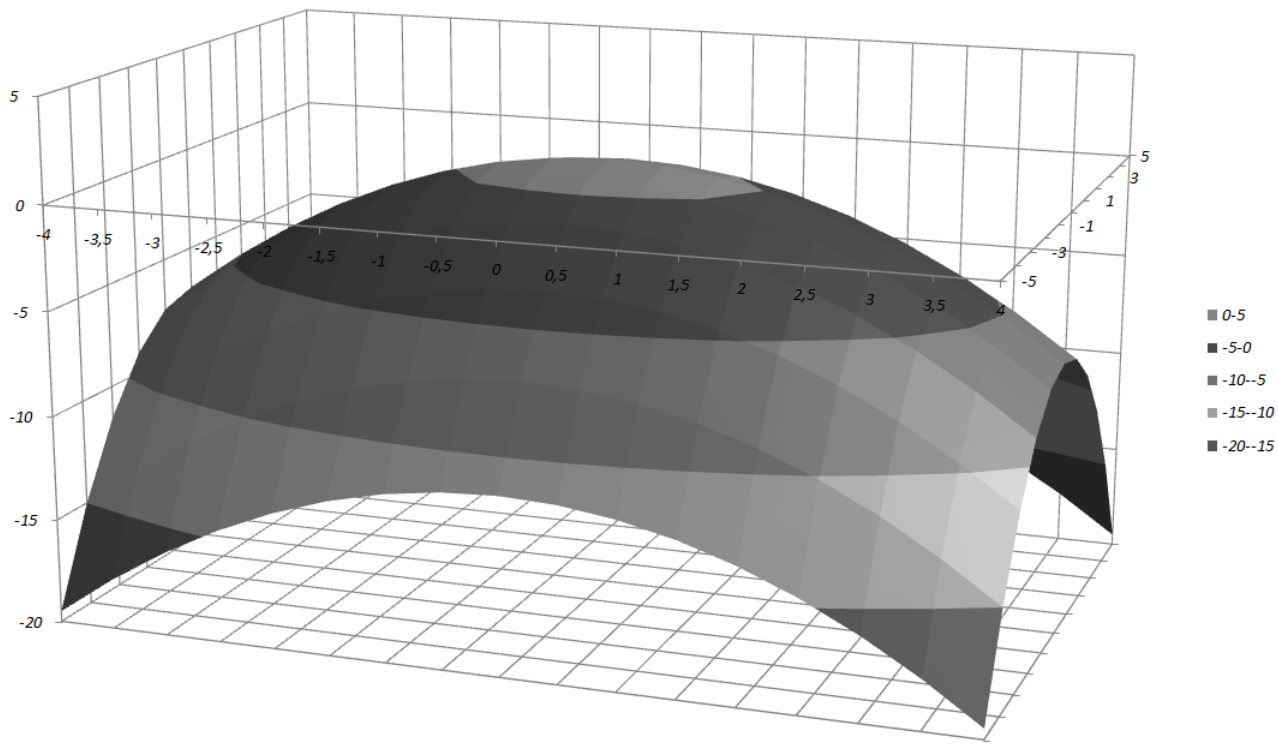


FIG. 6.8 – Un premier logiciel



Remarque. La surface semble présenter des « angles », mais cela est dû au logiciel, la surface étant parfaitement « lisse ».

FIG. 6.9 – Un second logiciel – Valeurs de z mises en évidence par des couleurs



6.3 Lectures graphiques

Les lignes joignant l'axe des x « de droite » à l'axe des x « de gauche » sont les lignes de niveau $x = k$, avec ici k variant de 5 (devant) à -5 (derrière).

Les lignes joignant l'axe des y « de devant » à l'axe des y « de derrière » sont les lignes de niveau $y = k$, avec ici k variant de -5 (gauche) à 5 (droite).

Enfin les autres lignes délimitant les couleurs sont les lignes de niveau $z = k$, avec ici k variant de -5 (bas) à 2 (haut).

Mathématiquement, les lignes de niveau se définissent comme suit :

Définition 6.2. Soit S une surface d'équation $z = f(x, y)$.
On appelle ligne de niveau $z = k$, la courbe formée par l'intersection du plan d'équation $z = k$ et de la surface d'équation $z = f(x, y)$.
C'est donc l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient le système $\begin{cases} z = k \\ z = f(x,y) \end{cases}$

Remarque. On définit de la même manière les lignes de niveau $x = k$ et $y = k$.

Exemple 6.2. Le point A est sur la surface aux croisements des lignes de niveau $x = 2$, $y = 0$ et $z = -1$. Ses coordonnées sont donc $A(2;0;-1)$. Le calcul le confirme : $f(x_A, y_A) = f(2,0) = 1 - \frac{1}{2}(2^2 + 0^2) = 1 - 2 = -1 = z_A$.

Le point B est sur la surface aux croisements des lignes de niveau $x = 1$, $y = 3$ et $z = -4$. Ses coordonnées sont donc $B(1;3;-4)$. Le calcul le confirme : $f(x_B, y_B) = f(1,3) = 1 - \frac{1}{2}(1^2 + 3^2) = 1 - 5 = -4 = z_B$.

Exercice.
1. Déterminer les coordonnées des points C et D.
2. Déterminer les côtes de $E(3;-1;z_E)$, $F(-1;3;z_F)$, $G(1;2;z_G)$ et $H(0;3;z_H)$ puis les placer sur la surface.

6.4 Tracer les lignes de niveau

On peut avoir besoin de visualiser la surface « d'en haut », « de droite » ou « de face ».

Cela revient, mathématiquement, à représenter, respectivement, les lignes de niveau $z = k$ dans le plan (xOy), les lignes de niveau $x = k$ dans le plan (yOz) et les lignes de niveau $y = k$ dans le plan (xOz).

On obtient les représentations de la figure page ci-contre (les « angles » sont dûs au logiciel).

On peut démontrer, dans certains cas, que les lignes de niveau sont des courbes connues, en général des droites, cercles ou paraboles. Plus précisément :

Propriété 6.1. *Soit S une surface d'équation $z = f(x, y)$.*
Si la ligne de niveau $z = k$ est équivalente à un système de la forme :
- $\begin{cases} z = k \\ y = mx + p \text{ ou } x = my + p \end{cases}$ *alors c'est une droite (contenue dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$ *alors c'est un cercle de centre $\Omega(0;0\ k)$ et de rayon r (contenu dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\begin{cases} z = k \\ y = ax^2 + bx + c \text{ ou } x = ay^2 + by + c \end{cases}$ *alors c'est une parabole (contenue dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\begin{cases} z = k \\ y = u(x) \text{ ou } x = u(y) \end{cases}$ *où u est une fonction associée à la fonction inverse alors c'est une hyperbole (contenue dans le plan d'équation $z = k$).*

On l'admettra.

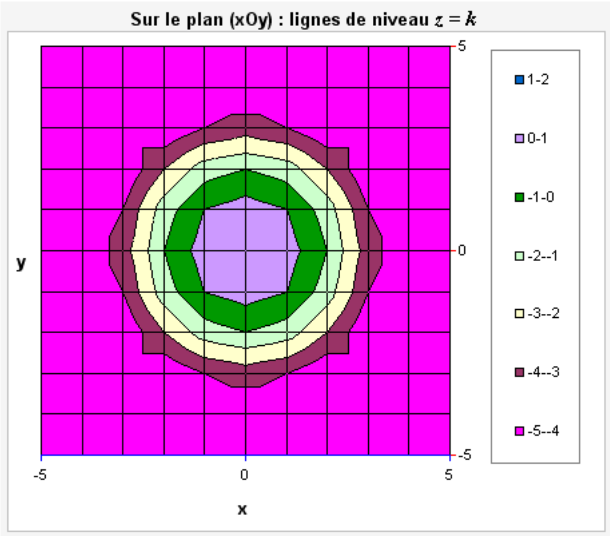
Remarque. On obtient des propriétés équivalentes pour les lignes de niveau $y = k$ et $x = k$ en permutant les lettres.

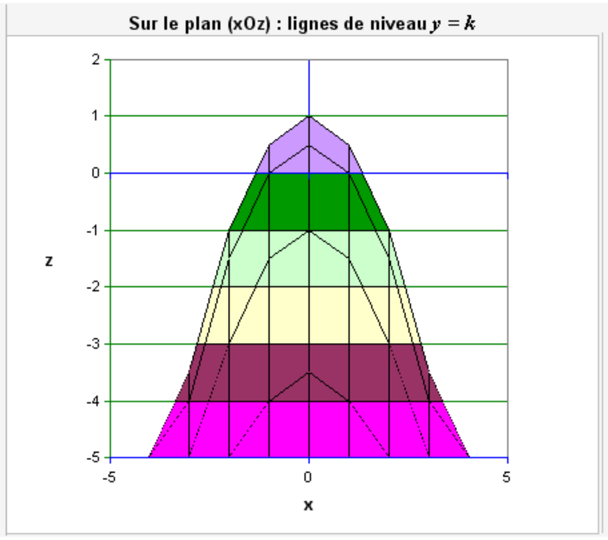
Exemple 6.3. Montrons que la ligne de niveau $z = -1$ est un cercle pour notre fonction $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Par définition, la ligne de niveau $z = -1$ est constituée des points dont les coordonnées vérifient :

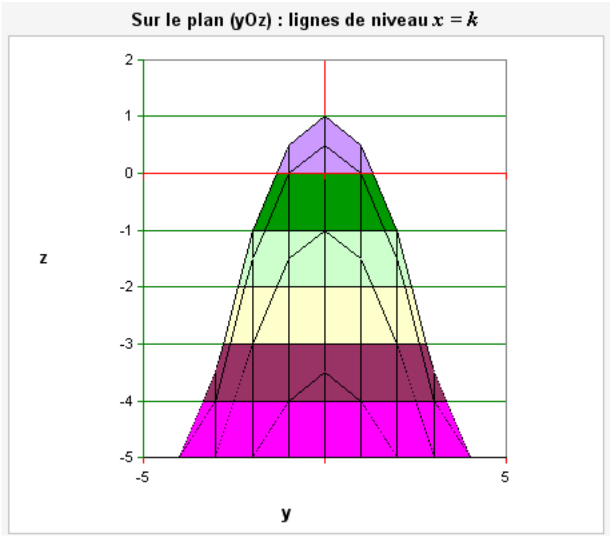
$$\begin{cases} z = -1 \\ z = f(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ -1 = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ 4 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

C'est donc un cercle de centre $(0;0;-1)$ et de rayon $\sqrt{4} = 2$.

Exercice.
1. (a) Montrer que les lignes de niveau $x = k$ sont des paraboles.
   (b) Représenter ces lignes pour $k = -2$, pour $k = 0$ et pour $k = 4$ dans le plan (yOz).
2. Mêmes questions pour les lignes de niveau $y = k$ (les représenter dans le plan (xOz)).


Sur le plan (xOy) : lignes de niveau $z = k$
y
x
-5
0
5
1-2
0-1
-1-0
-2--1
-3--2
-4--3
-5--4


Sur le plan (xOz) : lignes de niveau $y = k$
z
x
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
5


Sur le plan (yOz) : lignes de niveau $x = k$
z
y
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
5

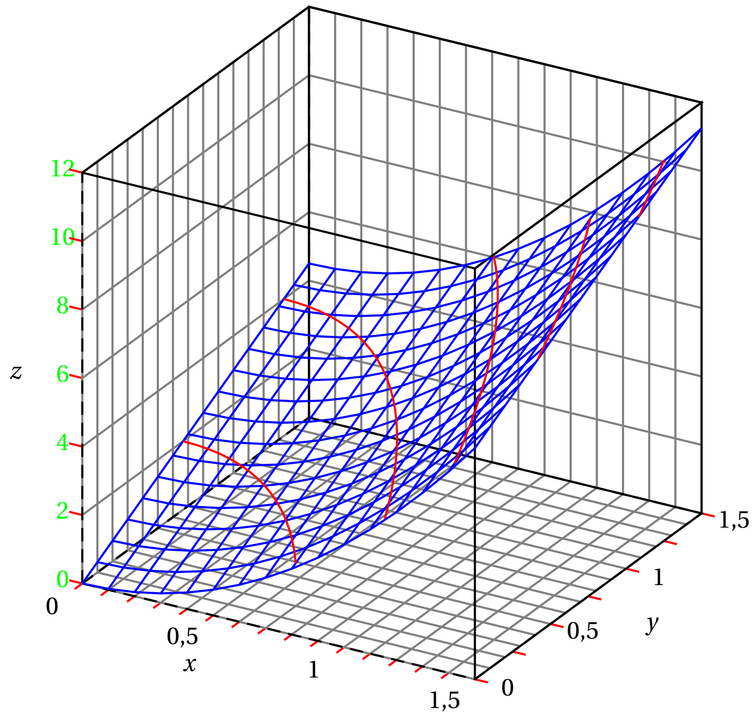
6.5 Exercices

Exercice 6.1.

On a représenté su la figure 6.10 de la présente page la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$.
On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée, placer le point A de coordonnées $(1; 1; 6)$.
2. Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

FIG. 6.10 – Figure de l'exercice 6.1



Exercice 6.2.

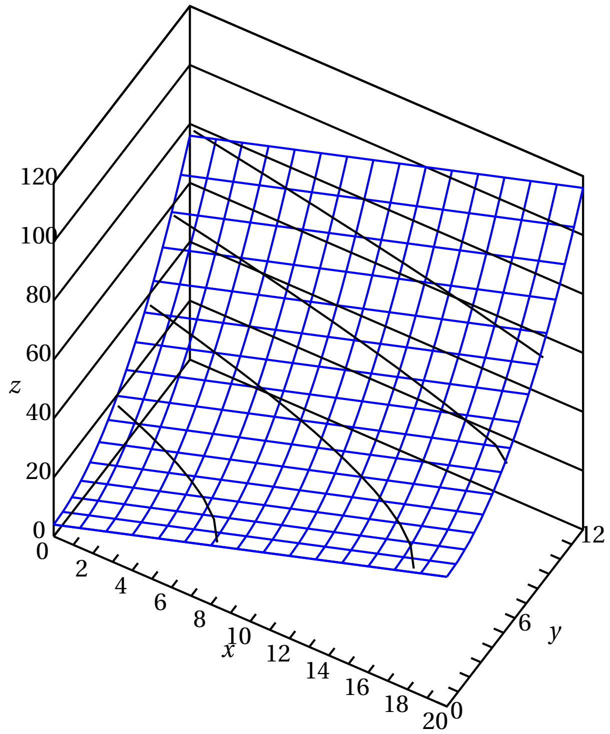
Pour fabriquer un alliage une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x; y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

La figure 6.11 page ci-contre représente la surface d'équation $z = C(x; y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$ et $0 \leqslant y \leqslant 12$.

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x; y)$?
   (a) $M(13; 9; 60)$ (b) $N(12; 4; 40)$ (c) $R(12; 8; 60)$ (d) $S(15; 4; 40)$
2. La courbe de niveau $x = 20$ est :
   (a) une parabole (b) une droite (c) une hyperbole (d) autre réponse
3. Déterminer la nature de la courbe de niveau $y = 10$.
4. (a) Déterminer la nature des courbes de niveau $z = k$ pour $k = 0$, $k = 5$, $k = 10$, $k = 15$, $k = 20$.
   (b) Représenter leurs projections dans le plan (xOy)

FIG. 6.11 – Surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$



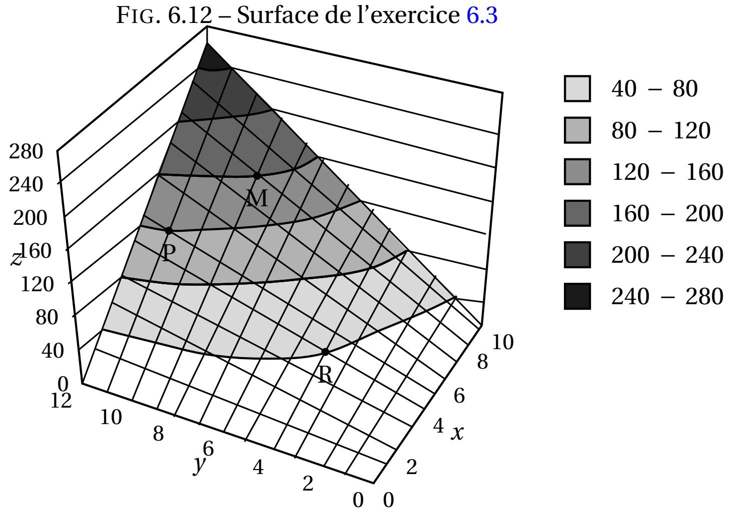
Exercice 6.3.

Soit f la fonction définie pour tout réel x élément de $[0\,;\,10]$ et pour tout réel y élément de $[0\,;\,12]$ par : $f(x\,;\,y) = 2x(y+1)$.
On donne sur la figure 6.12 de la présente page la représentation graphique de la surface $z = f(x\,;\,y)$ dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Pour financer un projet humanitaire, les adhérents d'une association décident de fabriquer des cartes de voeux.
Pour produire une quantité z de paquets de cartes, ils utilisent x décilitres d'encre A et y décilitres d'encre B. On admet que x, y et z sont liés par la relation $z = 2x(y+1)$ où x est un nombre entier compris entre 0 et 10, et y un nombre entier compris entre 0 et 12.
Dans tout l'exercice, les quantités d'encre seront exprimées en décilitres.

1. (a) Combien de paquets de cartes peut-on fabriquer avec 7 décilitres d'encre A et 8 décilitres d'encre B ?
   (b) Donner la quantité d'encre A, la quantité d'encre B, et le nombre de paquets de cartes associés respectivement aux points M, P et R à coordonnées entières, de la surface donnée ci-dessous.
2. Quelle est la nature de la section de la surface par le plan d'équation $x = 4$, parallèle au plan $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$? Justifier la réponse.

FIG. 6.12 – Surface de l'exercice 6.3



Exercice 6.4 (Liban juin 2005).

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tel que $z = 3xy$. On dit que $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = 3xy$.
Une courbe de niveau de cote z_0 est l'intersection d'un plan d'équation $z = z_0$, parallèle au plan (xOy), avec la surface $\mathcal{S}$. On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse x_0 et une courbe de niveau d'ordonnée y_0.

1. Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'abscisse 2.
   Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan (yOz).
2. (a) Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?
   (b) Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.
3. Sur la figure 6.13 de la présente page sont représentées trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant les projections orthogonales dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ de trois courbes de niveau de cote constante k.
   Préciser, en le justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.
4. Le point A′ représenté sur la courbe $\mathcal{C}_2$ de la figure ci-dessous est la projection orthogonale dans le plan (xOy) d'un point $\mathrm{A}(x\,;\,y\,;\,z)$, de la surface $\mathcal{S}$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
   (b) Préciser les coordonnées du point A″, projeté orthogonal de A dans le plan (yOz), puis placer ce point A″ sur la figure 6.13.
5. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 6y - z - 6 = 0$.
   (a) Montrer que le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ contient la courbe de niveau d'abscisse 2.
   (c) Démontrer que l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.
   On pourra utiliser la factorisation $x + 2y - xy - 2 = (x-2)(1-y)$.

FIG. 6.13 – Figure de l'exercice 6.4