Mathématiques en Terminale STG

David ROBERT

2008–2009

Sommaire

Chapitre 1

Optimisation à deux variables

Sommaire

1.1 Équations de droites

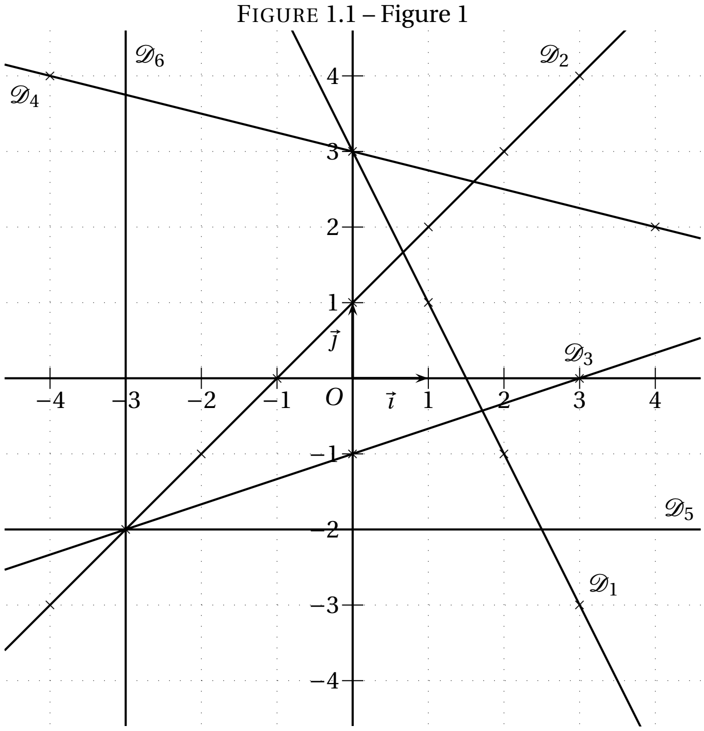
1.1.1 Activités

Activité 1.1 (Équations de droites (rappels)).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction $f(x)=-3x+0,5$, définie sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer si $A(150,5;-451)$ ou $B(-73,25;-219,5)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.
2. Dans chacun des cas suivants, dire si le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$:
   (a) $A\left(\frac{1}{3};\frac{13}{6}\right)$ et $\mathscr{D}: y=6x+\frac{1}{6}$;
   (b) $A(1;-7)$ et $\mathscr{D}: y=-\frac{3}{4}(x+2)-5$;
   (c) $A(2;5)$ et $\mathscr{D}: x=5$;
   (d) $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right)$ et $\mathscr{D}: y=\frac{1}{6}$;
3. La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite : $y=\frac{5}{2}x-1$.
   (a) A est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
   (b) B est le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?
4. Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :
   - $\mathscr{D}_1: y=-\frac{1}{2}x+5$;
   - $\mathscr{D}_2: y=4x-2$;
   - $\mathscr{D}_3: y=-3$;
   - $\mathscr{D}_4: y=\frac{3}{4}x-4$;
   - $\mathscr{D}_5: x=6$;
5. Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :
   - $\mathscr{D}_1: y=-5x+10$;
   - $\mathscr{D}_2: y=6x-14$;
   - $\mathscr{D}_3: y=\frac{3x-1}{6}$;
   - $\mathscr{D}_4: y=\frac{-2x+1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_5: 2x-5y=3$;
6. Dans un même repère, tracer les droites suivantes :
   - $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3;1)$ et de coefficient directeur -1 ;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3;2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1;0)$ et de coefficient directeur 3 ;
   - $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0;2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
   - $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2;2)$ et de coefficient directeur 0 ;

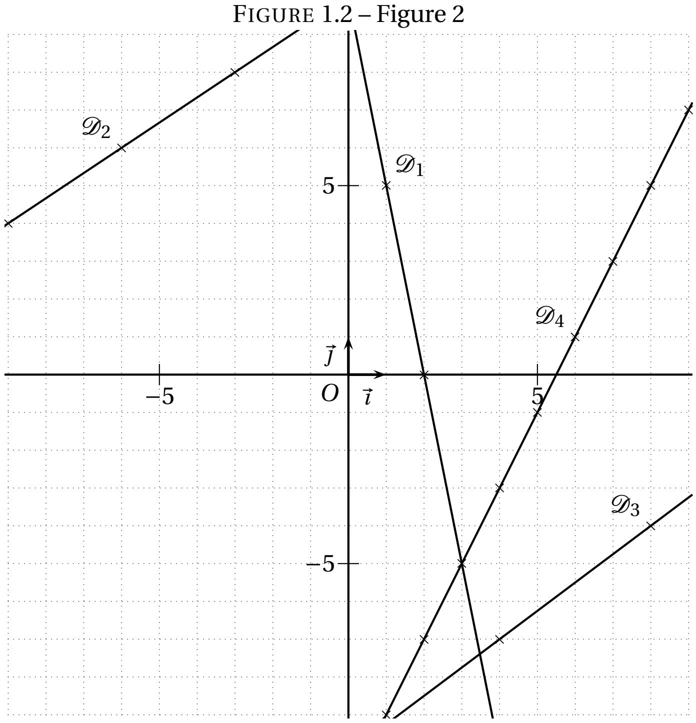
7. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :
   (a) $A(1;2)$ et $B(3;-1)$;
   (b) $A(4;4)$ et $B(-1;2)$;
   (c) $A(0;-1)$ et $B(2;3)$;
   (d) $A(-2;2)$ et $B(3;2)$;
   (e) $A(1;3)$ et $B(1;4)$;
   (f) $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ et $B(3;5)$.
8. Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 1.1 de la présente page.

FIGURE 1.1 – Figure 1



9. Même question pour les droites représentées sur la figure 1.2 de la présente page.

FIGURE 1.2 – Figure 2



Activité 1.2 (Autres équations).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On cherche à identifier quel est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $2x + y = 3$.
   (a) Déterminer y lorsque $x = 1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera A.
   (b) Déterminer y lorsque $x = 0$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera B.
   (c) Déterminer x lorsque $y = -3$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera C.
   (d) Déterminer x lorsque $y = -1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera D.
   (e) Que constate-t-on concernant A, B, C et D ?
   (f) Choisir un autre point ayant la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
   (g) Choisir un autre point n'ayant pas la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
2. En vous inspirant de ce qui précède, représenter l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $3x - 2y = 4$.
3. Mêmes questions avec les relations suivantes :
   - $-x + 3y = 1$;
   - $-x - 2y = 3$;
   - $2x + 0y = 5$;
   - $0x + 3y = 2$.

   Que constate-t-on dans les deux derniers cas ?

Activité 1.3 (Droites parallèles).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On considère les droites $(d_1) : 2x + 5 = 0$ et $(d_2) : x = -1$.
   Expliquer pourquoi ces droites sont parallèles.
2. On donne $(d_3) : y = 3x + 4$, $(d_4) : 3x - y = 9$ et $(d_5) : 3x + y = 0$.
   (a) Déterminer l'équation réduite des droites (d_4) et (d_5).
   (b) Parmi ces trois droites, quelles sont celles qui sont parallèles ?
3. On donne la droite $(d) : 5x + 2y = 10$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (d) avec les axes du repère et placer ces points.
   (b) Déterminer l'équation réduite de (d) et en déduire son coefficient directeur.
   (c) Tracer la droite (d') parallèle à (d) et passant par le point $K(1; -1)$ et déterminer son équation réduite.
   (d) Montrer qu'une équation de (d') est : $5x + 2y = 3$.
   (e) Montrer que la droite (d'') d'équation : $5x + 2y = c$ (où c est un réel) est parallèle à la droite (d).

Activité 1.4 (Droites sécantes).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.
On considère les droites $(d_1) : 2x + y = 5$ et $(d_2) : 3x - 5y = 3$.

1. Déterminer les équations réduites des droites (d_1) et (d_2) et en déduire qu'elles sont sécantes.
2. Tracer ces deux droites et lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection I.
3. Soit $(x; y)$ les coordonnées du point I. Le point I appartient aux deux droites, par conséquent ses coordonnées vérifient simultanément les équations des deux droites, donc elles vérifient le système :

   $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 3 \end{cases}$$

   Résoudre ce système par la méthode de votre choix.

1.1.2 Bilan et compléments

On admettra les propriétés suivantes :

Propriété 1.1. *Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by=c$ où $(a;b)\neq(0;0)$.*
Si $a=0$ la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
Si $b=0$ la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ la droite est sécante aux deux axes.

Propriété 1.2. *Soient $\mathscr{D}: y=mx+p$ et $\mathscr{D}': y=m'x+p'$ deux droites.*
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur ($m=m'$).

Propriété 1.3. *Soit $\mathscr{D}: ax+by=c$.*
Toute droite parallèle à $\mathscr{D}$ admet une équation de la forme $ax+by=c'$.
Toute droite d'équation $ax+by=c'$ est parallèle à $\mathscr{D}$.

Propriété 1.4. *Si les droites $\mathscr{D}: ax+by=c$ et $\mathscr{D}': a'x+b'y=c'$ sont sécantes, les coordonnées $(x;y)$ de leur point d'intersection I vérifient le système* $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

1.1.3 Exercices

Exercices 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13 pages 170-171

1.2 Régions du plan

1.2.1 Activités

Activité 1.5.
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthogonal.

1. (a) Dans un repère orthogonal tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x-3y=6$.
   (b) Choisir quatre points à coordonnées entières situés du même côté de $\mathscr{D}$ et calculer $2x-3y$ pour chacun d'entre eux.
   (c) Faire de même avec quatre autres points à coordonnées entières situés de l'autre côté de $\mathscr{D}$.
   (d) Que constate-t-on ?
   (e) Identifier la région du plan dont les points ont leurs coordonnées vérifiant $2x-3y\geq 6$ (on hachurera le reste).
2. En vous inspirant de ce qui précède, faire de même pour la région caractérisée par l'inéquation $-3x-4y\geq -12$ (on hachurera le reste).
3. Même question pour les inéquations $x\geq 0$ et $y\geq 0$.
4. Quel système d'inéquations vérifie la région non hachurée ?

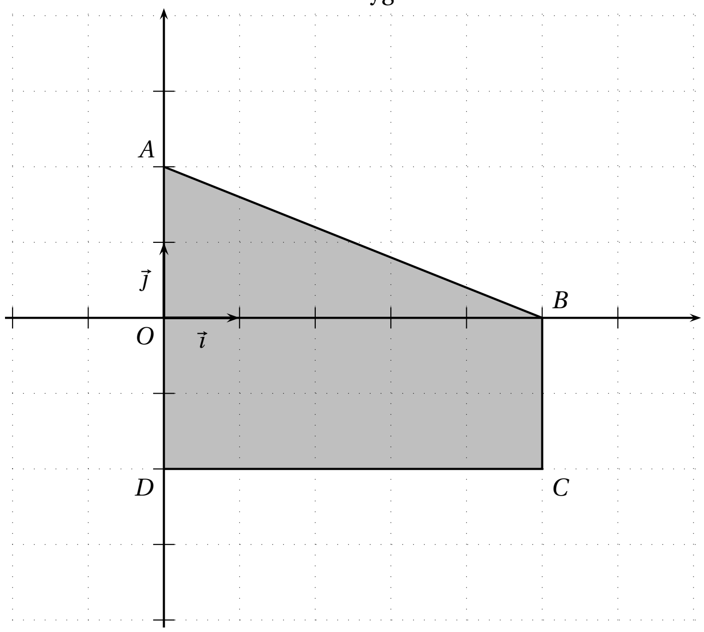
Activité 1.6 (Délimiter une région du plan).
Pour visualiser un demi-plan $(\mathscr{P})$, on peut hachurer les points qui n'en font pas partie. Ainsi les points du demi-plan $(\mathscr{P})$ apparaissent en blanc.

1. On considère l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$
   Hachurer sur un graphique les points qui n'appartiennent pas à l'ensemble $(\mathscr{E})$.
2. On veut représenter les points $M(x;y)$ solutions du système :

$$\begin{cases} x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ 2x+3y\leqslant 6 \\ x+y\leqslant 4 \end{cases}$$

   (a) Construire sur le graphique précédent la droite (d_1) d'équation : $2x+3y=6$.
   (b) Hachurer les points qui ne font pas partie du demi-plan (P_1) : $2x+3y\leqslant 6$.
   (c) Hachurer les points qui ne font pas partie du demi-plan (P_2) : $x+y\leqslant 4$.
   (d) Où se trouvent, sur le graphique, les points solutions du système ?

FIGURE 1.3 – Polygone $ABCD$



Activité 1.7 (Caractériser une région).
On considère les points $A(0;2)$, $B(5;0)$, $C(5;-2)$ et $D(0;-2)$.
On veut caractériser les points qui se trouvent à l'intérieur du polygone $ABCD$ (frontières comprises). Voir la figure 1.3 de la présente page.

1. (a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   (b) Caractériser par une inéquation le demi-plan situé en dessous de cette droite (frontière comprise).
2. (a) Déterminer une équation de chacune des droites (AD), (DC) et (BC).
   (b) Compléter les phrases :
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (AD), donc vérifient : ....
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (DC), donc vérifient : ....
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (BC), donc vérifient : ....
3. En déduire un système d'inéquations caractérisant l'intérieur du polygone $ABCD$ (frontières comprises).

1.2.2 Bilan

On admettra la propriété suivante :

Propriété 1.5. *Toute droite d'équation $ax+by=c$ partage le plan en deux demi-plans régions :*
- *un demi-plan dont les coordonnées des points vérifient l'inéquation $ax+by \geqslant c$;*
- *un demi-plan dont les coordonnées des points vérifient l'inéquation $ax+by \leqslant c$;*

La droite d'équation $ax+by=c$ est la frontière entre ces demi-plans.

1.2.3 Exercices

Exercices 15, 18 pages 174-175.

1.3 Programmation linéaire

1.3.1 Activités

Activité 1.8 (Traduction de contraintes).
Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 jetés de lit. Deux ateliers de confection font des offres par lots :

- l'atelier A propose un lot de 12 coussins, 4 rideaux et 4 jetés de lit pour un montant de 400 € ;
- l'atelier B propose un lot de 6 coussins, 6 rideaux et 2 jetés de lit pour un montant de 300 €.

1. On note x le nombre de lots A achetés et y le nombre de lots B achetés.
   (a) Compléter les phrases suivantes :
   - Dans un lot A, il y a 12 coussins.
     Si on achète 3 lots A, on dispose de .... coussins.
     Si on en achète 10, on dispose de .... coussins.
     Si on achète x lots, on dispose de .... coussins.
   - Dans un lot B, il y a 6 coussins.
     Si on achète y lots B, on dispose de .... coussins.
   - Au total, on dispose de : ...... + ... coussins.
   - Le texte impose une contrainte sur ce nombre : « il faut changer au moins 72 coussins », ce qui veut dire que le nombre total de coussins achetés doit être .... à 72 : ...... + ... $\geqslant 72$

   (b) Compléter le tableau suivant :

	Nombre de coussins achetés	Nombre de rideaux achetés	Nombre de jetés de lit achetés
x lots A			
y lots B			
Total			
Contraintes			

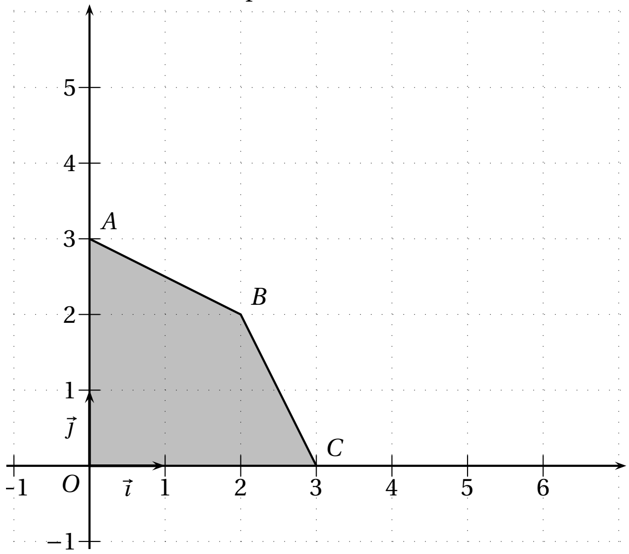
2. (a) Traduire les contraintes par un système d'inéquations.
   (b) Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ solutions du système.
3. Respecte-t-on les contraintes si on achète :
   (a) 5 lots A et 4 lots B ? 5 lots A et 6 lots B ? 6 lots A et 7 lots B ?
   (b) Représenter les points correspondants sur le graphique.
4. Un lot A coûte 400 € et un lot B coûte 300 €.
   (a) Calculer le coût pour 5 lots A et 6 lots B achetés.
   (b) Calculer le coût pour x lots A et y lots B achetés.
   (c) Tracer sur le graphique la droite d'équation : $400x + 300y = 3800$.
   (d) Le gérant de l'hôtel dispose de 3800 € pour ses achats. Trouver les solutions qui s'offrent à lui.

Activité 1.9 (Rendre maximal un nombre soumis à une contrainte).
La région coloriée représentée sur la figure 1.4 page suivante traduit les contraintes du système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x + y \leqslant 6 \\ x + 2y \leqslant 6 \end{cases}$$

1. Tracer sur le graphique les droites $(d_1) : 2x + 3y = 12$ et $(d_2) : 2x + 3y = 6$.
2. Ces droites ont-elles des points communs avec la région coloriée ?
3. On veut rendre maximal le nombre $2x + 3y = b$, tout en respectant les contraintes du système.
   Soit (d) la droite d'équation : $2x + 3y = b$.
   (a) Comparer la droite (d) avec les droites (d_1) et (d_2).
   (b) Par quel point de coordonnées entières doit passer la droite (d) pour rendre b maximal, tout en respectant les contraintes du système ?
   (c) Tracer la droite ainsi trouvée et calculer le nombre b correspondant.

FIGURE 1.4 – Optimisation sous contrainte



Activité 1.10.
Le patron d'un restaurant prévoit d'acheter du mobilier de jardin en vue d'aménager un parc pour ses clients. Il prévoit deux modèles, l'un en bois, l'autre en métal.
Pour un modèle en bois, le lot comprend une table, trois chaises et quatre fauteuils.
Pour un modèle en métal, le lot comprend une table, neuf chaises et deux fauteuils.

Le projet est de disposer d'au moins 63 chaises et 30 fauteuils. Soit x le nombre de lots en bois (lots A) et y le nombre de lots en métal (lots B) achetés par le restaurateur.

1. Ecrire le système des contraintes correspondant à ce problème (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

	Nombre de chaises	Nombres de fauteuils
x lots A		
y lots B		
Total		
Contraintes		

2. Représenter dans un repère, l'ensemble des points $M(x;y)$ solutions de ce système. On prendra comme unités graphiques : 1 cm pour 2 unités en abscisses et en ordonnées.
3. Un lot en bois coûte 2 400 € et un lot en métal coûte 1 600 €.
   (a) Déterminer le coût c occasionné par l'achat de 5 lots en bois et 6 lots en métal.
   (b) Déterminer le coût c occasionné par l'achat de x lots en bois et y lots en métal.
   (c) Déterminer graphiquement le nombre de lots de chaque sorte pour que le coût c soit minimal.

1.3.2 Exercices

Exercices 20, 22 pages 178-179. Exercices 47 à 51 pages 186-188.

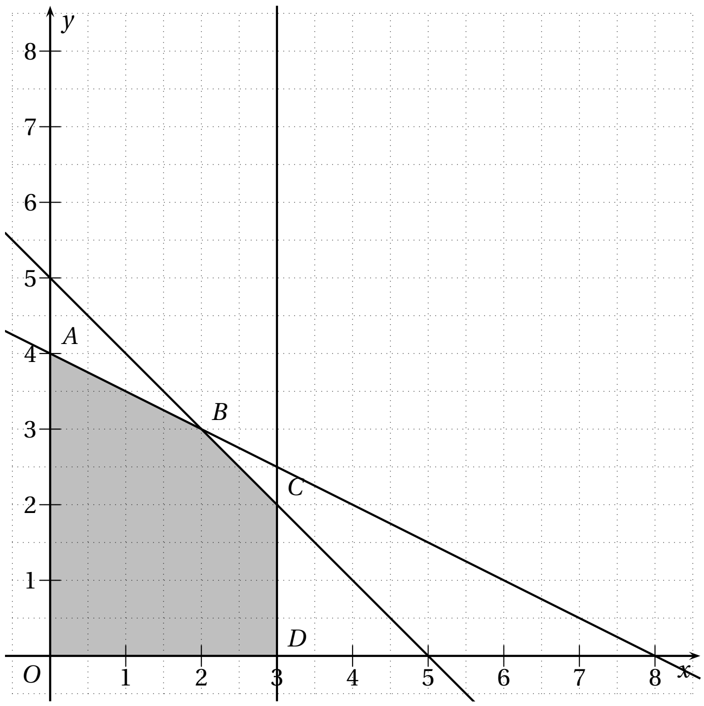
Devoir surveillé n°1

Optimisation à deux variables

Exercice 1.1 (Caractériser une région du plan – 6 points).
Le plan est muni d'un repère orthonormal.
On considère le polygone OABCD représentée sur la figure 1.1 de la présente page, et on appelle $\mathscr{P}$ la partie grisée, bords compris.

1. On admettra que la droite (BC) a pour équation : $y = x + 5$.
   Déterminer, en justifiant, une inéquation du demi-plan $\mathscr{P}_1$ de frontière (BC) correspondant à l'intérieur du polygone $OABCD$.
2. (a) Déterminer, par le calcul, l'équation réduite de la droite (AB).
   (b) Déterminer, en justifiant, une inéquation du demi-plan $\mathscr{P}_2$ de frontière (AB) correspondant à l'intérieur du polygone $OABCD$.
3. En déduire un système d'inéquations $\mathscr{S}$ caractérisant l'intérieur $\mathscr{P}$ du polygone $OABCD$ (frontières comprises).
4. Déterminer graphiquement en expliquant votre démarche :
   (a) Peut-on respecter les contraintes et avoir $x = 3$ et $y = 3$?
   (b) Peut-on respecter les contraintes et avoir $x = 2$ et $y = 3$?
   (c) Si l'on choisit $x = 2$, quelles sont toutes les valeurs entières de y que l'on peut prendre tout en respectant les contraintes ?
   (d) Si l'on choisit $y = 1$, quelle est la valeur entière maximale de x que l'on peut prendre tout en respectant les contraintes ?

FIGURE 1.1 – Figure de l'exercice 1.1



Exercice 1.2 (Résolutions de sytèmes – 6 points).
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On donne deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives : $x+2y=30$ et $2x+y=30$.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection I de ces deux droites.
2. Représenter graphiquement dans le repère de la figure 1.2 page suivante l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+2y \geqslant 30 \\ 2x+y \geqslant 30 \end{cases}$$

On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.

Exercice 1.3 (Optimisation à deux variables – 8 points).
Un artisan ferronnier doit fabriquer des tables et fauteuils métalliques pour un grand magasin.
Chaque table nécessite 10 kg de fer, 2 litres de peintures anti-corrosion et demande 3 heures de travail.
Chaque fauteuil nécessite 5 kg de fer, 4 litres de peintures anti-corrosion et demande 4 heures de travail.
Pour cet ouvrage, l'artisan reçoit 100 kg de fer et 36 litres de peintures anti-corrosion. Les délais imposés font qu'il ne dispose que de 40 heures de travail.
On note x le nombre de tables et y le nombre de fauteuils que l'artisan va réaliser.

1. Montrer que les contraintes de cette situation peuvent être traduites par le système d'inéquations :

$$\mathscr{S}\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x+y \leqslant 20 \\ x+2y \leqslant 18 \\ 3x+4y \leqslant 40 \end{cases}$$

   où x et y sont des entiers naturels. La figure 1.3 page 12 représente l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient le système $\mathscr{S}$ (polygone grisé).
2. L'artisan recevra 60 € pour chaque table produite et 40 € pour chaque fauteuil produit.
   Soit S le salaire que l'artisan recevra pour la confection de x tables et de y fauteuils.
   (a) Exprimer S en fonction de x et y.
   (b) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ correspondant à un salaire de 440 € et compléter le graphique de la figure 1.3 page 12 en traçant la droite $\mathscr{D}$.
   (c) En justifiant la démarche, déterminer le couple d'entiers x et y qui permettent à l'artisan d'obtenir le salaire le plus élevé.
   Préciser le montant de ce salaire maximum.
   À combien alors s'élève son salaire horaire ?

FIGURE 1.2 – Figure de l'exercice 1.2

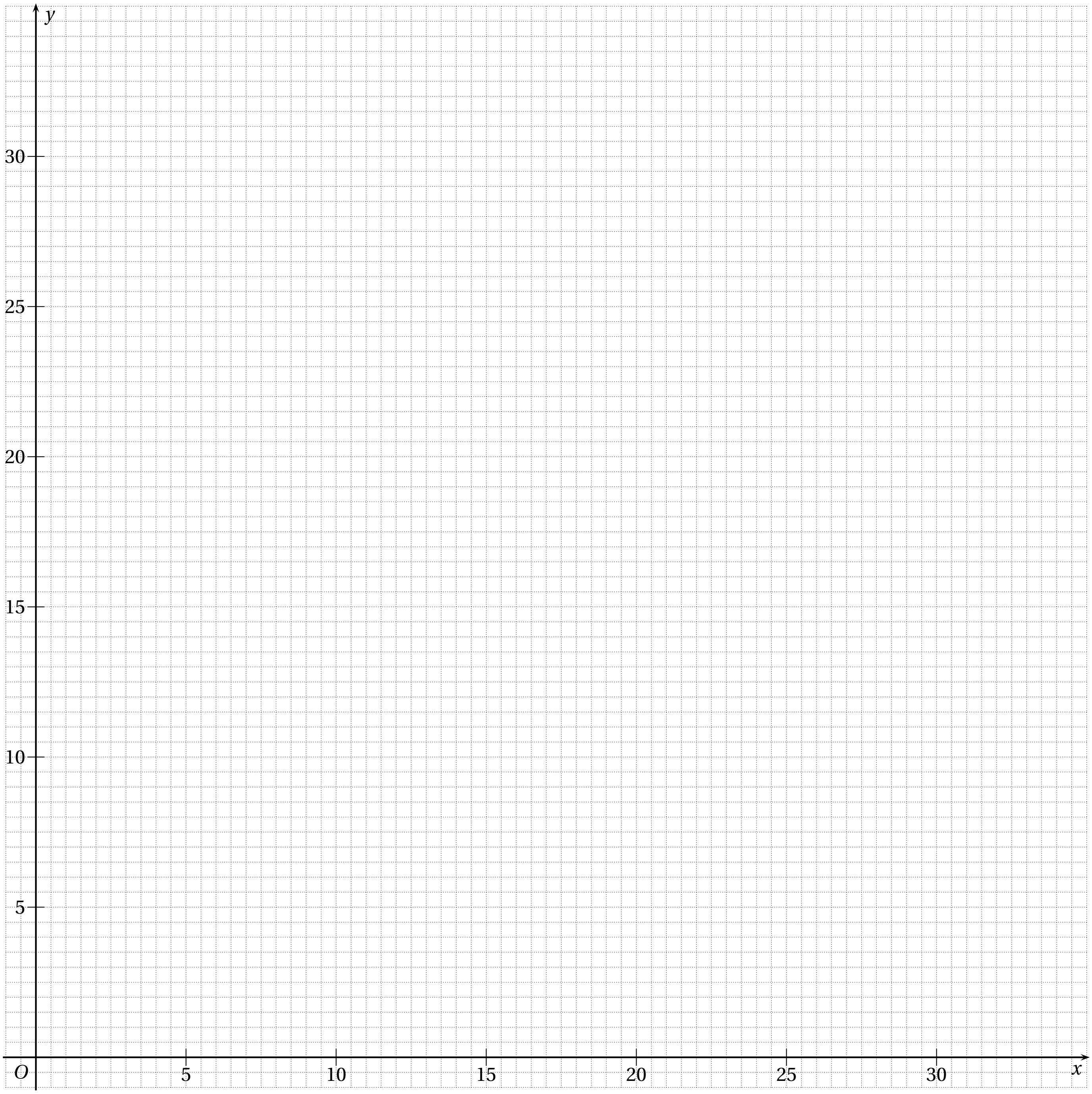
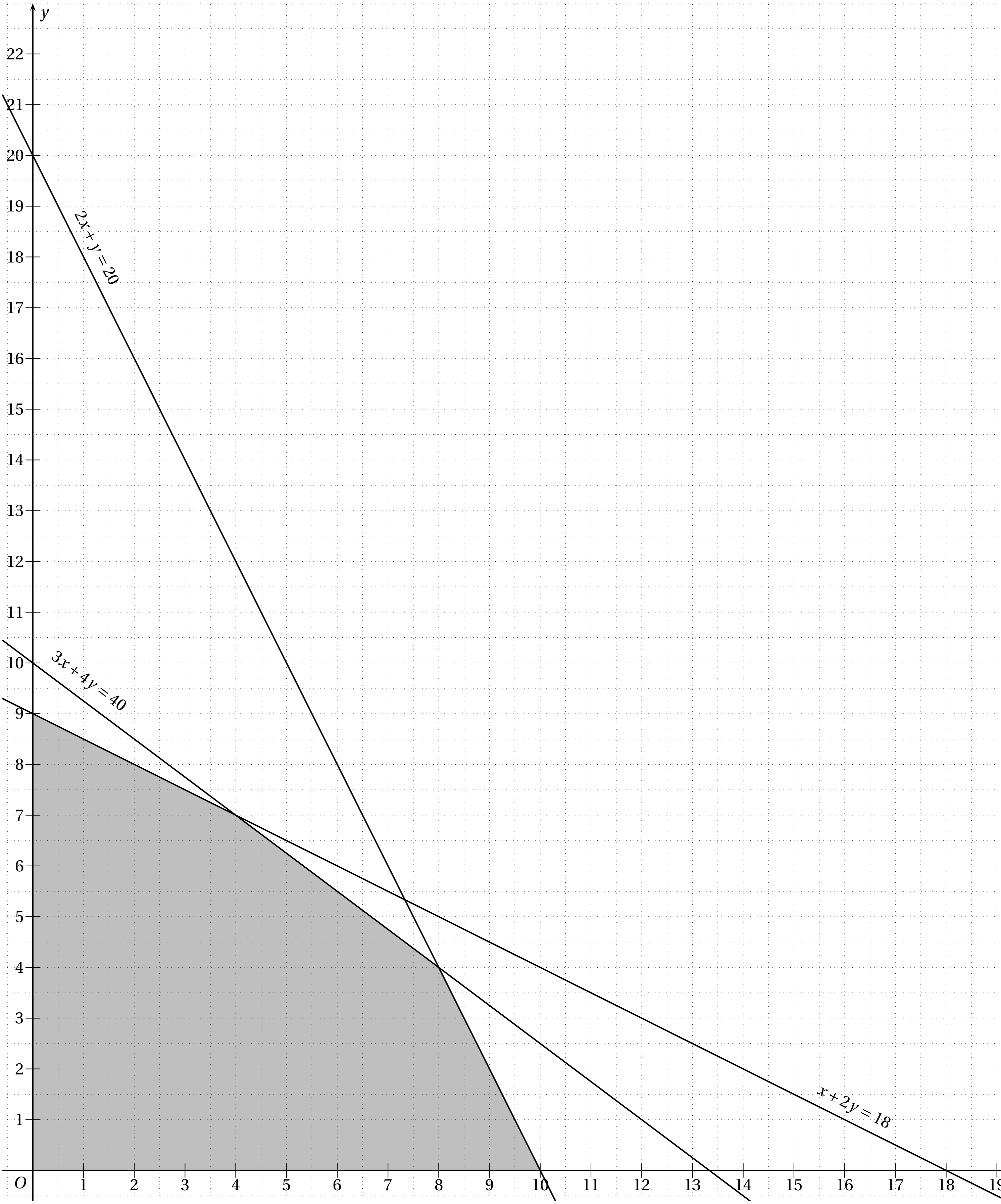


FIGURE 1.3 – Figure de l'exercice 1.3



Chapitre 2

Statistiques à deux variables

Sommaire

2.1 Activités

Activité 2.1 (Ajustement affine par une méthode graphique).
A la suite d'une visite médicale dans dix entreprises de services informatiques, on a constaté qu'une certaine proportion du personnel travaillant devant un ordinateur souffrait régulièrement de maux de tête ou de troubles de la vision. Ces résultats figurent, par entreprise, dans le tableau ci-dessous dans lequel l'horaire est donné en heures et centièmes d'heures.

Entreprises	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9	n°10
Horaire quotidien devant un ordinateur x_i	5,5	5,5	6	6,5	6,5	6,5	6,75	7,25	7,25	7,25
Pourcentage du personnel atteint y_i	30	40	45	40	45	50	55	55	60	55

1. Construire dans le repère orthogonal de la figure page 15 le nuage de points associé à ce tableau statistique. On prendra les unités suivantes : en abscisse 1 cm pour 0,25 heure et en ordonnées 1 cm pour 10 %. On graduera l'axe des abscisses à partir de la valeur 5.
2. (a) On note respectivement $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes des séries (x_i) et (y_i). Calculer $\overline{x}$ et $\overline{y}$.
   (b) On note G le point de coordonnées $(\overline{x}\,;\overline{y})$. G est le point moyen du nuage. Placer le point G sur le graphique.
3. On considère les points $A\,(8\,;70)$ et $B\,(8\,;55)$. Construire les droites (GA) et (GB) sur le graphique précédent.
   (a) On se propose de faire un ajustement du nuage par l'une de ces droites. Quelle droite vous semble la plus appropriée ? Expliquer votre choix.
   (b) Déterminer une équation de la droite choisie.
4. En utilisant l'ajustement que vous avez choisi, estimer le pourcentage de personnes atteintes de maux de têtes pour une utilisation moyenne de 7 heures.

Activité 2.2 (Ajustement par la méthode de MAYER et la méthode des moindres carrés).
Le tableau suivant donne dans une population féminine, la moyenne de la tension artérielle maximale en fonction de l'âge.

Rang de l'âge	1	2	3	4	5	6
Age en années : x_i	36	42	48	54	60	66
Tension maximale : y_i	11,8	13,2	14	14,4	15,5	15,1

1. Droite de MAYER
   (a) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ de cette série statistique dans le repère orthogonal de la figure page suivante. On graduera l'axe des abscisses à partir de 36 et l'axe des ordonnées à partir de 11. De plus, on prendra comme unités 0,5 cm pour une année en abscisse et 2 cm pour une unité de tension en ordonnée.
   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer G sur le graphique.
   (c) On fractionne le nuage précédent en deux parties constituées respectivement par les points numérotés de 1 à 3 et ceux numérotés de 4 à 6. On note G_1 et G_2 les points moyens respectifs de ces deux parties du nuage de points.
      i. Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.
      ii. Tracer la droite (G_1G_2).
      La droite (G_1G_2) s'appelle droite de MAYER. On admet qu'elle constitue une bonne droite d'ajustement pour un nuage de points « étiré ».
      iii. Vérifier que la droite (G_1G_2) a pour équation : $y = 19x + 253$.
      iv. Vérifier que le point G appartient à la droite (G_1G_2).
      C'est un résultat général : le point moyen G appartient dans tous les cas à la droite de MAYER (G_1G_2).
   (d) On admet que la droite de MAYER constitue un ajustement convenable du nuage de points précédent.
      i. Déterminer graphiquement, en faisant apparaître les traits de construction utiles, la tension artérielle maximale prévisible pour une personne de 70 ans.
      ii. Vérifier le résultat précédent par le calcul en utilisant l'équation de la droite (G_1G_2).
2. Méthode des moindres carrés
   (a) i. On décide de faire un ajustement affine de cette série à l'aide de la calculatrice. Pour trouver la droite qui passe « au plus près » de tous les points, les calculatrices utilisent une méthode de calcul appelée méthode des moindres carrés. Avec le menu *stat* de la calculatrice (voir le paragraphe 2.2.5 page 19 pour des informations sur les calculatrices), écrire les deux séries et donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$.
      ii. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère.
   (b) A l'aide de l'équation de $\mathscr{D}$, déterminer par le calcul une estimation de l'âge d'une personne dont la tension est 16.

Activité 2.3 (Principe de la méthode des moindres carrés).
On peut mesurer la distance d'une droite $\mathscr{D}$ à un nuage de points en calculant la somme des carrés des distances M_iP_i où pour chaque i, le point M_i est un point du nuage et le point P_i est le point de la droite $\mathscr{D}$ ayant la même abscisse que M_i (voir la figure 2.1 page 16).

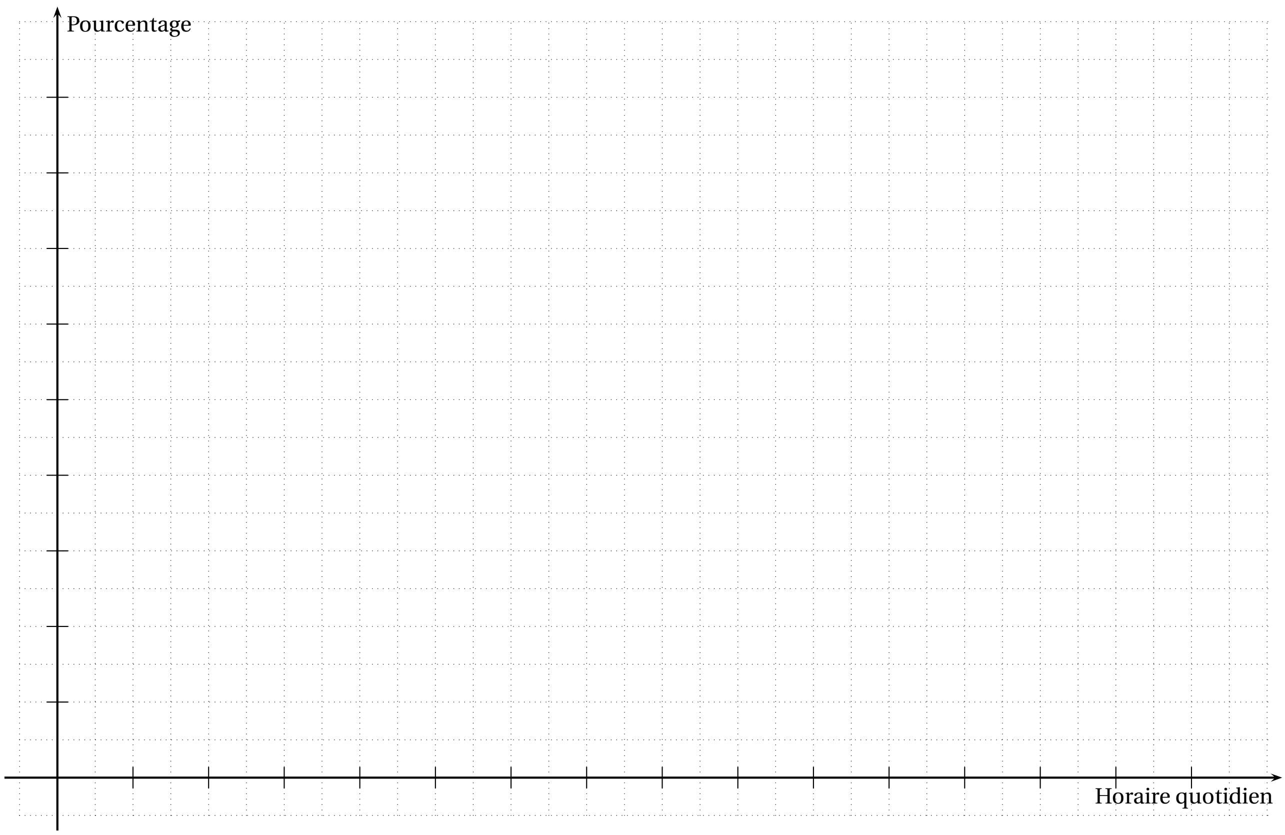
Plus cette somme sera petite et plus la droite sera proche du nuage de points.
On procédera suivant la démarche :

- Première étape : Chercher une équation de droite ($y = ax + b$) qui passe au plus près des points du nuage.
- Deuxième étape : Calculer pour chaque M_i la valeur $M_iP_i^2 = (y_i - ax_i - b)^2$.
- Troisième étape : Chercher à minimiser la somme des $M_iP_i^2$.

Voici la série statistique étudiée :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	123	129	135	140	145	152	160	163

1. Saisir la feuille de calcul
   A l'aide d'un tableur, reproduire la feuille de calcul sur le modèle de la figure page 16.
   - En A2 est inscrit le coefficient directeur et en C2 est inscrit l'ordonnée à l'origine de la droite d'ajustement.
   - Pour les lignes 5 à 12, on trouve :
     · dans la colonne A, la série (x_i) des abscisses des points du nuage
     · dans la colonne B, la série (y_i) des ordonnées des points du nuage
     · dans la colonne C, les ordonnées des points P_i de la droite
     · dans la colonne E, $M_iP_i^2 = (\ldots\ldots\ldots)^2$
   - Pour la cellule C5, il faut écrire = ... puis copier-coller cette formule de C6 à C12.
2. Modifier l'ordonnée à l'origine
   D'après le graphique, il semble que la droite d'équation $y = 9x+100$ ne soit pas le meilleur ajustement : l'ordonnée à l'origine n'est pas assez grande.
   (a) Remplacer le contenu de la cellule C2 par 115.


Pourcentage
Horaire quotidien

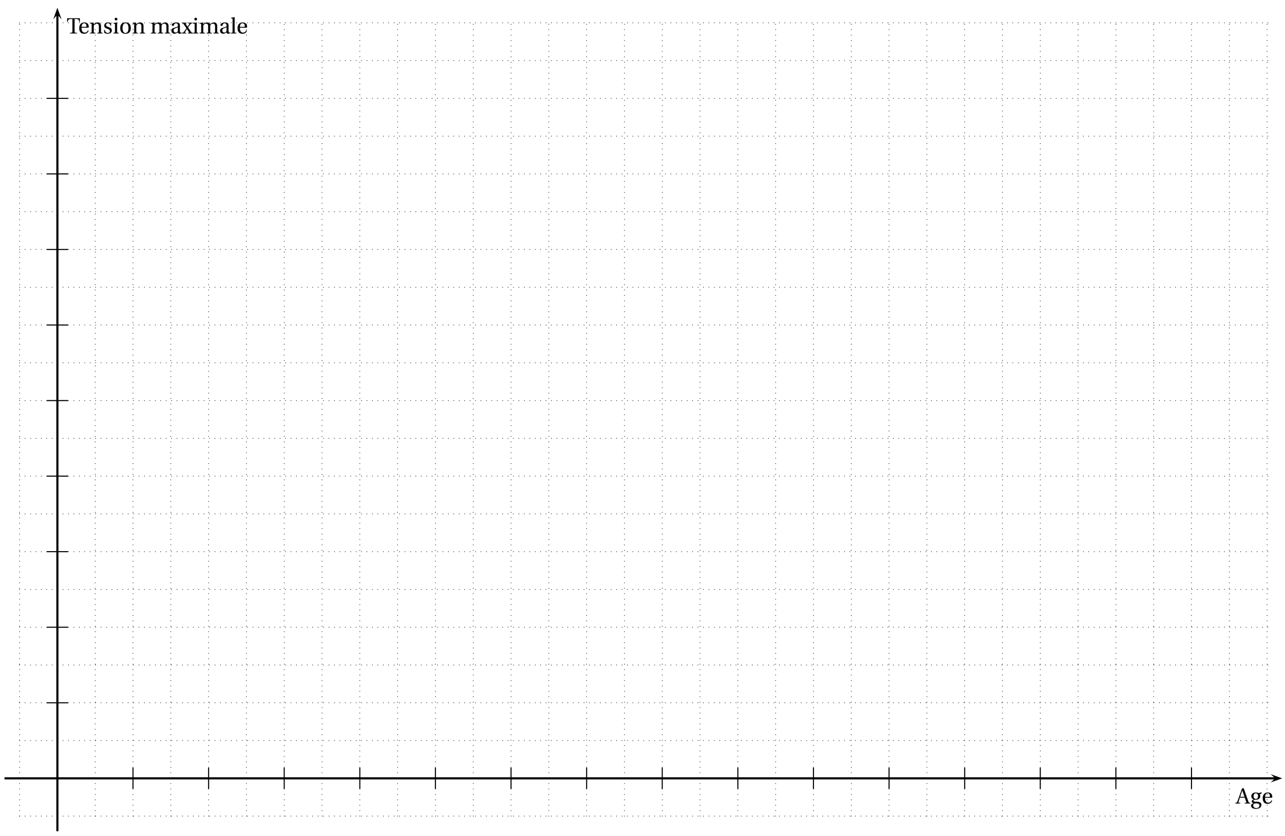
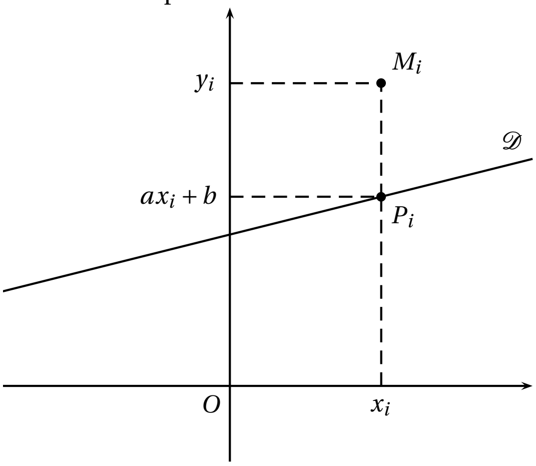
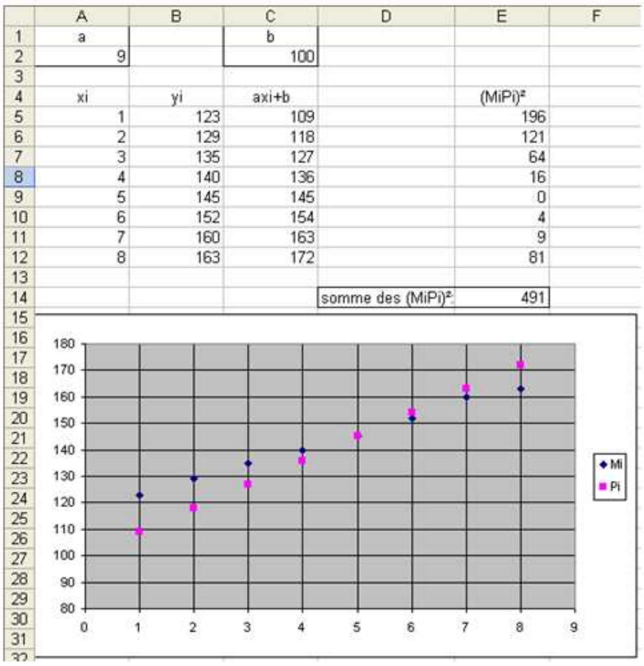

Tension maximale
Age

FIGURE 2.1 – Principe de la méthode des moindres carrés





	A	B	C	D	E	F
1	a		b			
2	9		100			
3						
4	xi	yi	axi+b		(MiPi)²	
5	1	123	109		196	
6	2	129	118		121	
7	3	135	127		64	
8	4	140	136		16	
9	5	145	145		0	
10	6	152	154		4	
11	7	160	163		9	
12	8	163	172		81	
13						
14				somme des (MiPi)²	491	

(b) Essayer par tâtonnement de trouver la valeur de a (au dixième près) qui minimise la somme des $M_iP_i^2$.
$a \approx \dots\dots\dots$

(c) Quelle est la somme des $M_iP_i^2$ avec cet ajustement ?
somme des $M_iP_i^2 \approx \dots\dots\dots$

3. Modifier le coefficient directeur
   (a) Remplacer le coefficient directeur de l'ajustement par 6 (cellule A2).
   (b) Essayer par tâtonnement de trouver la valeur de b (au dixième près) qui minimise la somme des $M_iP_i^2$.
   $b \approx \dots\dots\dots$
   (c) Quelle est la somme des $M_iP_i^2$ avec cet ajustement ?
   somme des $M_iP_i^2 \approx \dots\dots\dots$
4. En appliquant la méthode de MAYER
   (a) En prenant les quatre premiers points du nuage, puis les quatre derniers, déterminer avec le tableur, les coordonnées des deux points moyens G_1 et G_2 des deux sous-séries.
   G_1 (...... ; ......) et G_2 (...... ; ......)
   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2) de MAYER.
   $y = \dots\dots x + \dots\dots$
   (c) Avec le tableur, quelle est la somme des $M_iP_i^2$ avec cet ajustement ?
   somme des $M_iP_i^2 \approx \dots\dots\dots$
5. En utilisant la méthode des moindres carrés
   (a) A l'aide du tableur, donner l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
   $y = \dots\dots x + \dots\dots$
   (b) Quelle est la somme des $M_iP_i^2$ avec cet ajustement ?
   somme des $M_iP_i^2 \approx \dots\dots\dots$

   Remarque. Avec le tableur, on utilisera les fonctions DROITEREG pour déterminer le coefficient directeur et COEFFICIENT.DIRECTEUR pour déterminer le coefficient directeur de la droite d'ajustement.

2.2 Bilan et compléments

2.2.1 Série statistique à deux variables

Définition 2.1. On appelle série statistique à deux variables, l'étude simultanée de deux variables statistiques définies sur une même population.

Exemples.
- Le poids et la taille de nouveaux nés dans une maternité.
- Le volume des ventes et le montant alloué à la publicité dans une entreprise.
- La consommation d'un véhicule et sa vitesse.

En notant $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les p valeurs prises par les deux variables statistiques, les données sont données à l'aide d'un tableau d'effectif :

Variable X	x_1	x_2	...	x_p
Variable Y	y_1	y_2	...	y_p

On note $(x_i ; y_i)$ la série statistique double ainsi définie.

Exemple 2.1. Dans toute la suite du chapitre, on se référera à la série statistique suivante : On mesure l'allongement Y d'un ressort en fonction de la masse suspendue X.

Masse (en g)	30	40	50	60	70	80	90	100
Allongement (en mm)	12	19	24	30	37	42	48	55

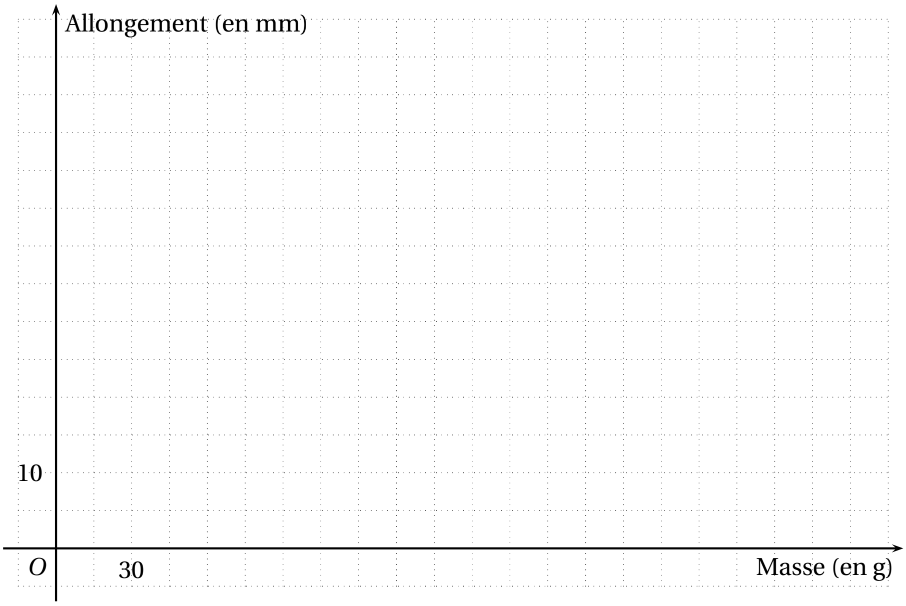
2.2.2 Nuage de points

Définition 2.2. Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on peut associer à chaque couple $(x_i ; y_i)$ de la série statistique le point M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$. Le graphique ainsi obtenu constitue un nuage de points.

Exemple. Les points du nuage ont pour coordonnées M_1 (30; 12), M_2 (40; 19), M_3 (50; 24), ..., M_8 (100; 55).

Placer ces points dans le repère de la figure 2.2 page suivante (Unités graphiques : 1 cm pour 10 g en abscisses et 1 cm pour 10 mm en ordonnées, on graduera l'axe des abscisses à partir de 30).

FIGURE 2.2 – Nuage de points



Définition 2.3. On appelle point moyen du nuage de N points M_i de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ le point G de coordonnées :

$$x_G = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{et } y_G = \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

Exemple. Dans la série précédente, le point moyen G a pour coordonnées :

$x_G = \ldots\ldots\ldots$ et $y_G = \ldots\ldots\ldots$ donc $G(\ldots\ldots\ldots\,;\ldots\ldots\ldots)$

2.2.3 Corrélation

Soient X et Y deux variables statistiques définies sur une même population. Dans certains cas, on peut soupçonner l'existence d'un lien entre ces deux variables. Par exemple, l'allongement du ressort est fonction de la masse suspendue, la taille des enfants peut dépendre de la taille des parents, etc.

Définition 2.4. Il y a corrélation entre deux variables X et Y observées sur les individus d'une même population lorsque X et Y varient dans le même sens ou en sens contraire.

Remarque. L'existence d'une corrélation entre deux variables peut être décelée à l'aide d'un nuage de points.

Exemples. Considérons les diagrammes de la figure 2.3 page ci-contre

Lorsque les points du nuage ont tendance à s'aligner comme pour le diagramme B, on parle alors de corrélation linéaire entre les deux variables. On essaye alors d'effectuer un ajustement affine, ce qui consiste à trouver une droite qui rend compte de la forme alignée du nuage en approchant « au mieux » les points qui le constituent.

2.2.4 Ajustement affine

Ajustement à la règle

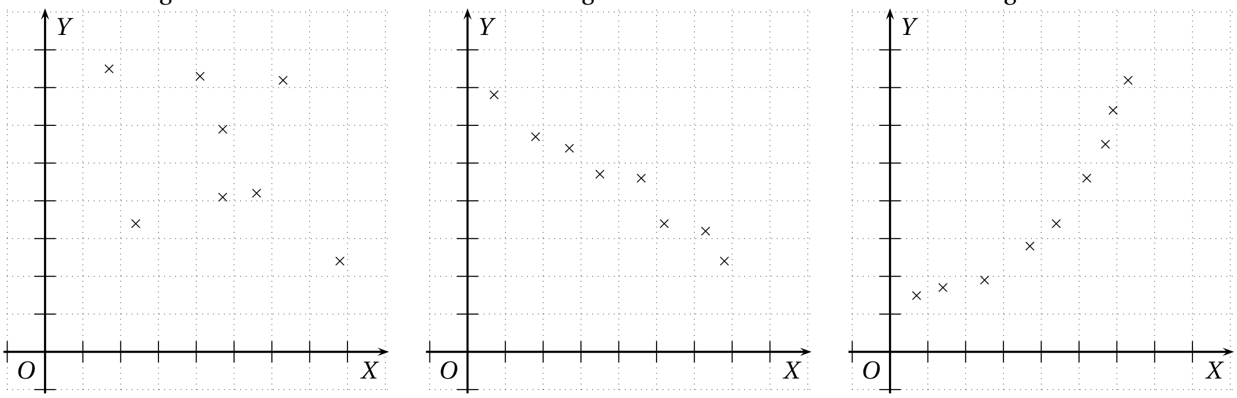
Exemple. La droite $\mathscr{D}$ contenant les points $M_1\,(30; 12)$ et $M_8\,(100; 55)$ approche de façon satisfaisante les points du nuage. Déterminer une équation de cette droite $\mathscr{D}$.
En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, déterminer quel serait l'allongement du ressort correspondant à une masse de 110 grammes.

Méthode de MAYER

On fractionne le nuage de points en deux nuages partiels de même effectif (à un près si l'effectif de la série est impair) : le premier nuage comprend les points ayant les abscisses les plus petites, et l'autre, les plus grandes.
On détermine ensuite les points moyens G_1 et G_2 des deux nuages partiels.
La droite de MAYER du nuage est la droite (G_1G_2).

FIGURE 2.3 – Corrélation

Diagramme A — Diagramme B — Diagramme C



Aucune liaison apparente ; absence de corrélation entre les deux variables — Corrélation négative — Corrélation positive

Exemple. Le premier nuage comprend les points M_1, M_2, M_3 et M_4. Son point moyen G_1 a pour coordonnées :

$$x_{G_1} = \dots\dots\dots \quad y_{G_1} = \dots\dots\dots \quad \text{d'où } G_1\,(\dots\dots\dots\,;\dots\dots\dots)$$

Avec les points restants, on obtient un second nuage dont le point moyen G_2 a pour coordonnées :

$$x_{G_2} = \dots\dots\dots \quad y_{G_2} = \dots\dots\dots \quad \text{d'où } G_2\,(\dots\dots\dots\,;\dots\dots\dots)$$

Placer les points G_1 et G_2 et tracer la droite de MAYER.
Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2).

On admettra la propriété suivante :

Propriété 2.1. *La droite de* MAYER *d'un nuage de points passe par le point moyen du nuage.*

Vérifier ce résultat sur le graphique et par le calcul.
En utilisant l'équation de la droite de MAYER, déterminer par le calcul la masse correspondant à un allongement de 60 mm. Retrouver ensuite ce résultat sur le graphique.

Méthode des moindres carrés

L'ajustement affine effectué avec la calculatrice est obtenu par une méthode appelée des moindres carrés qui consiste à trouver une droite qui passe « au plus près » des points du nuage. La calculatrice donne le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p.

Avec la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement et tracer dans le repère.

2.2.5 Utilisation de la calculatrice

On peut retrouver tous ces paramètres statistiques en utilisant les listes d'une calculatrice.

<table>
<tr><th></th><th>TI-82</th><th>Casio Graph 25</th></tr>
<tr><td>Effacer les anciennes données</td><td>$\boxed{\text{STAT}}$
4 : ClrList $\boxed{4}$
$\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\text{L1}}$
$\boxed{,}$
$\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\text{L2}}$
$\boxed{\text{ENTER}}$</td><td>Sélectionner le menu STAT
$\boxed{\text{F6}}$
DEL-A $\boxed{\text{F4}}$
YES $\boxed{\text{F1}}$
$\boxed{\triangleright}$
DEL-A $\boxed{\text{F4}}$
YES $\boxed{\text{F1}}$</td></tr>
<tr><td>Entrer les nouvelles données.
On entre les valeurs des x_i dans la première colonne (L1 ou list 1) et les valeurs des y_i dans la deuxième colonne (L2 ou list 2) ;</td><td>$\boxed{\text{STAT}}$
1 : Edit $\boxed{\text{ENTER}}$
A l'écran :<table><tr><th>L1</th><th>L2</th><th>L3</th></tr><tr><td>30</td><td>12</td><td></td></tr><tr><td>40</td><td>19</td><td></td></tr><tr><td>50</td><td>24</td><td></td></tr><tr><td>60</td><td>30</td><td></td></tr><tr><td>...</td><td>...</td><td></td></tr></table></td><td>A l'écran<table><tr><th></th><th>List 1</th><th>List 2</th><th>List 3</th></tr><tr><td>1</td><td>30</td><td>12</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>40</td><td>19</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>50</td><td>24</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>60</td><td>30</td><td></td></tr><tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Calculer les paramètres statistiques</td><td>CALC $\boxed{\triangleright}$
4 : Linreg $(ax+b)$ $\boxed{\text{ENTER}}$
A l'écran :
Linreg $(ax+b)$
$y=ax+b$
$a=$
$b=$
$r=$</td><td>CALC $\boxed{\text{F2}}$
REG $\boxed{\text{F3}}$
X $\boxed{\text{F1}}$
A l'écran :
Linreg
$a=$
$b=$
$r=$
$r^2=$
$y=ax+b$</td></tr>
</table>

2.3 Exercices

11 p 90, 15 p 91, 26 et 29 p 96, 36 et 40 p 101

Devoir surveillé n°2

Statistiques à deux variables

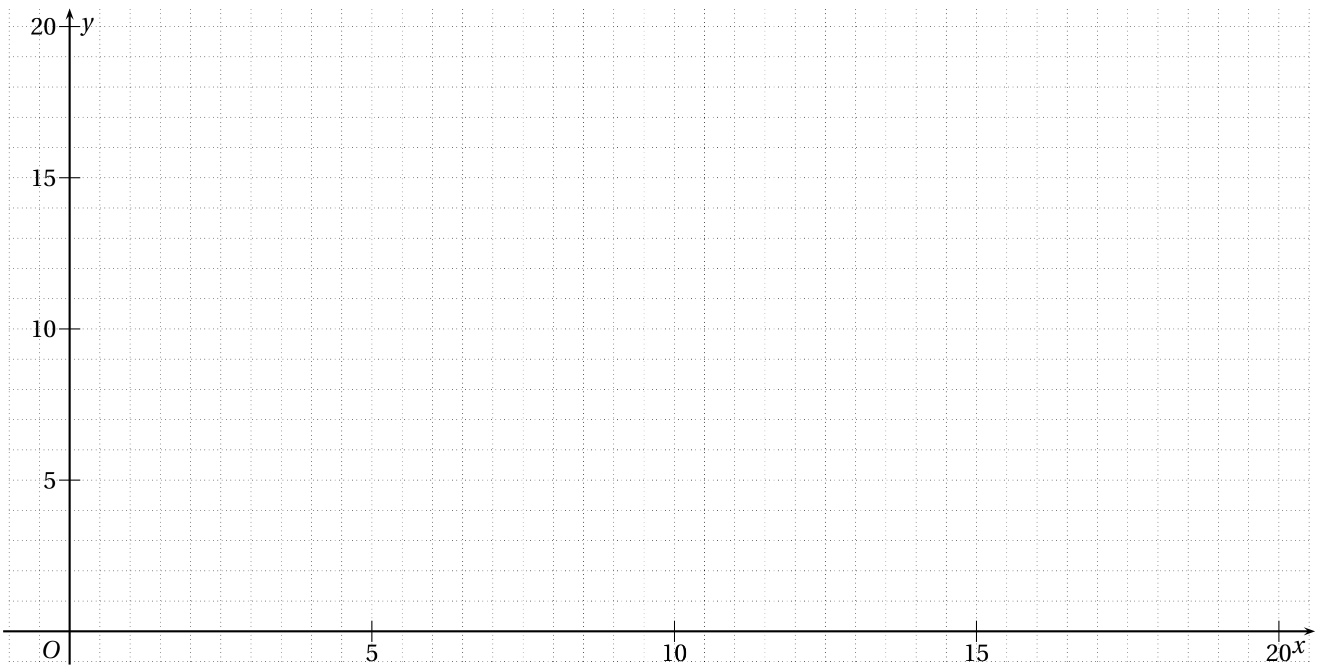
Tous les calculs statistiques pourront être effectués à la calculatrice.
Les résultats statistiques seront donnés au millième.

Exercice 2.1 (6 points).
Un hypermarché dispose de 20 caisses.
Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes :

Nombre de caisses ouvertes X	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) Y	16	12	9,6	7,9	6	4,8	4

1. Construire le nuage de points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ correspondant à cette série statistique dans le repère 2.1 de la présente page.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. (a) Montrer qu'une équation de la droite (M_2M_6), la droite passant par le deuxième et le sixième point du nuage de points est $y = -1,2x + 16,8$.
   (b) Tracer cette droite sur le graphique.
   (c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de la droite (M_2M_6) :
      i. le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes ;
      ii. le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.
      iii. pensez-vous que, dans le cas de la question 3(c)ii, l'ajustement affine soit fiable ?

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.1



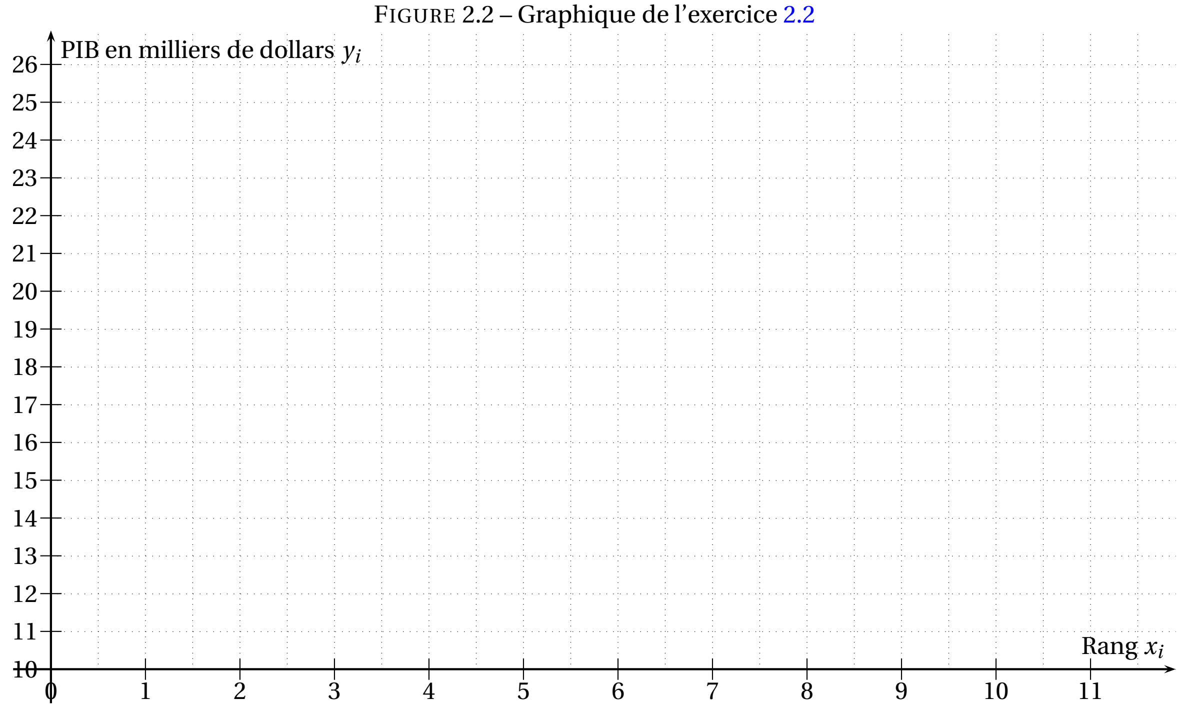
Exercice 2.2 (7 points).

Le tableau suivant donne l'évolution du montant du PIB (produit intérieur brut) par habitant de l'Union européenne, exprimé en milliers de dollars, entre 1 994 et 1 999 :

Année	Rang x_i	PIB par habitant y_i
1 994	1	18,3
1 995	2	19,4
1 996	3	20
1 997	4	20,6
1 998	5	21,5
1 999	6	22,5

1. Représenter, dans le repère de la figure 2.2 de la présente page, le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 6$.
2. On appelle G_1 et G_2 les points moyens des sous-nuages respectivement constitués des trois premiers et des trois derniers points.
   (a) Calculer les coordonées de G_1 et de G_2.
   (b) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère précédent et tracer la droite (G_1G_2).
   (c) Donner une équation de la droite (G_1G_2) en indiquant les calculs faits.
3. (a) Lire graphiquement l'année à partir de laquelle le PIB par habitant de l'Union européenne dépassera 25 000 dollars.
   Justifier la réponse en faisant apparaître tous les tracés utiles sur le graphique.
   (b) En utilisant l'ajustement affine obtenu à la question 2 :
      i. calculer le PIB par habitant de l'Union européenne en 2 000, puis en 2 003 ;
      ii. déterminer en quelle année il devrait atteindre 30 000 dollars.
4. En 2 003, le PIB par habitant de l'Union européenne était de 23 052 dollars.
   Calculer, en pourcentage, l'erreur commise en adoptant l'estimation obtenue à la question 3(b)i.

FIGURE 2.2 – Graphique de l'exercice 2.2



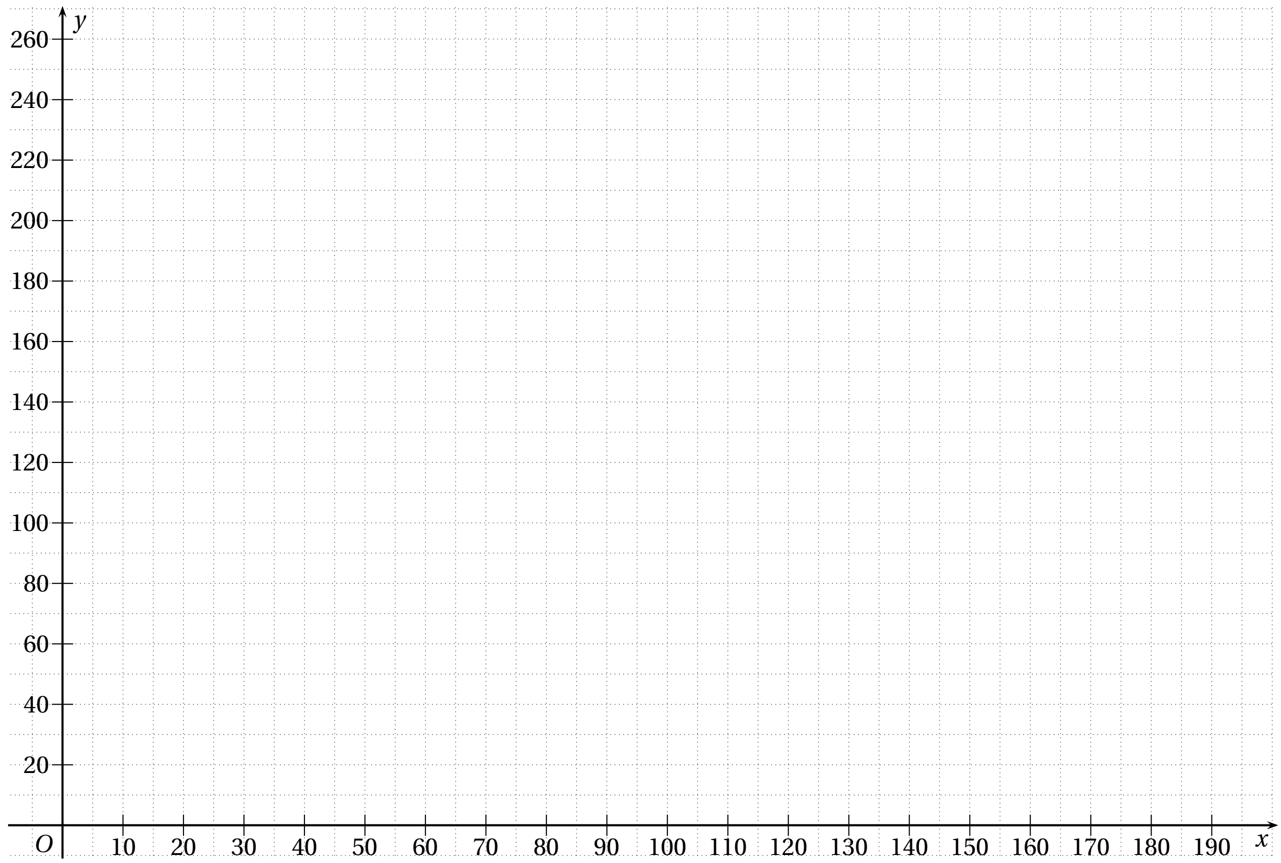
Exercice 2.3 (7 points).

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
Nombre lits X	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes Y	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Construire le nuage de points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ correspondant à cette série statistique dans le repère de la figure 2.3 de la présente page.
2. D'après la forme du nuage, un ajustement affine est-il justifié ?
3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
4. Déterminer une équation de la droite de régression D de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite D sur le graphique. (*Marquer les points utilisés pour tracer D*).
5. Montrer que G appartient à la droite D.
6. Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 4, à combien peut-on estimer, par calcul, le nombre de postes de personnel non médical ? Illustrer sur le graphique.

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.3



Chapitre 3

Nombre dérivé

Sommaire

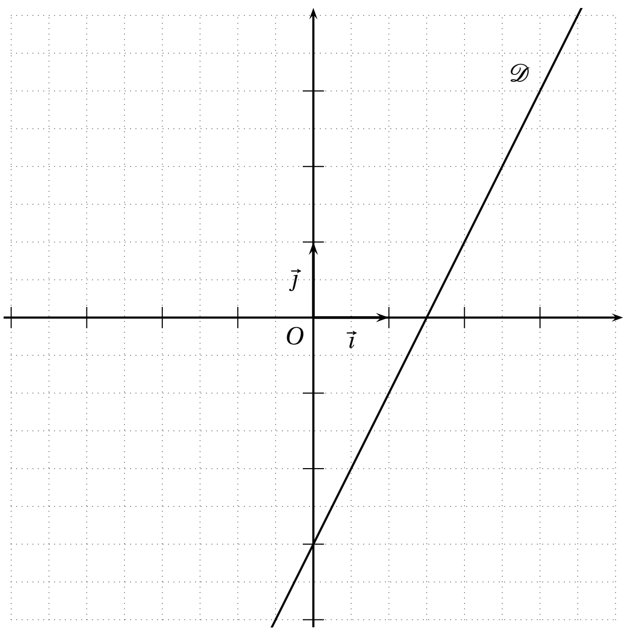
Ce chapitre est un rappel de notions déjà abordées en Première

3.1 Activités

Activité 3.1.
On se place dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (voir la figure 3.1 de la présente page).

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = 2x - 3$.
   (a) Déterminer l'ordonnée du point A de $\mathscr{D}$ dont l'abscisse est 0.
   (b) Déterminer l'abscisse du point B de $\mathscr{D}$ dont l'ordonnée est 0.
   (c) Déterminer l'abscisse du point D de $\mathscr{D}$ dont l'ordonnée est 3.
   (d) Le point $E\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$?
2. (a) Placer dans le repère le point $F(-2; 1)$.
   (b) Tracer dans les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$ passant par F et de coefficients directeurs respectifs 0, -2, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$.

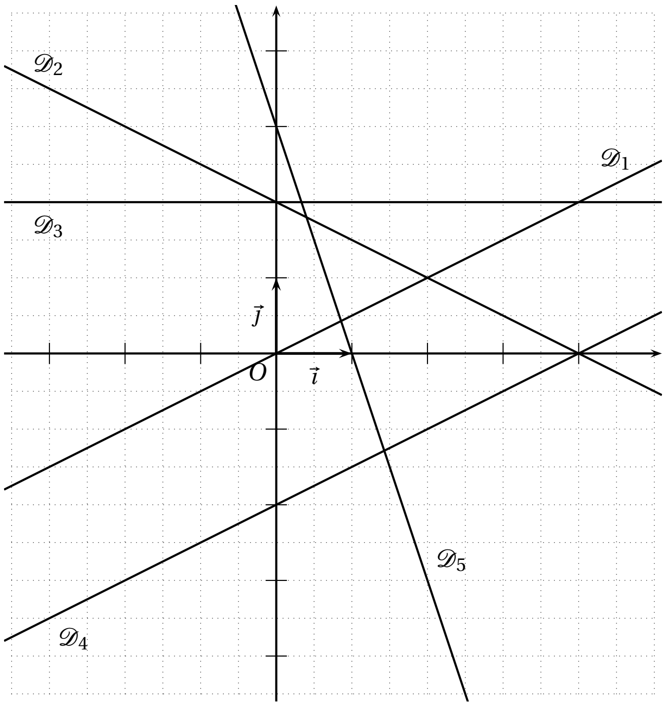
FIGURE 3.1 – Figure de l'activité 3.1



Activité 3.2.
On considère le repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ de la figure 3.2 de la présente page dans lequel on a représenté les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$. Ces droites coupent l'axe des abscisses et des ordonnées en des points dont les coordonnées sont des nombres entiers.

1. (a) Indiquer, sans calcul, le signe des coefficients directeurs m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 respectifs de chacune des droites
   (b) Classer ces droites par ordre croissant de leur coefficient directeur.
2. (a) En utilisant les coordonnées de deux points d'une droite, déterminer, par le calcul, la valeur exacte du coefficient directeur de chacune de ces cinq droites.
   (b) Les résultats des questions 1 et 2 sont-ils en accord ?
3. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites.
4. Déterminer algébriquement, puis graphiquement les coordonnées des points d'intersection des droites :
   (a) $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ (b) $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_3$ (c) $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$

FIGURE 3.2 – Figure de l'activité 3.2



Activité 3.3. 1. La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 3.3 page ci-contre représente graphiquement une fonction f.
   (a) Les trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont des tangentes à la courbe.
   En quels points les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont-elles tangentes à la courbe $\mathscr{C}$? (indiquer leurs coordonnées)
   (b) Compléter la phrase : On peut interpréter graphiquement $f'(-2)$ comme ....
   Donc $f'(-2) = \ldots\ldots\ldots$
   (c) Donner par lecture graphique :
   - $f'(0) = \ldots\ldots\ldots$
   - $f'(1) = \ldots\ldots\ldots$
2. Lorsque c'est possible, tracer au jugé une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de la figure 3.4 page suivante en chacun des points A, B, C, D et E.

FIGURE 3.3 – Figure de l'activité 3.3, question 1

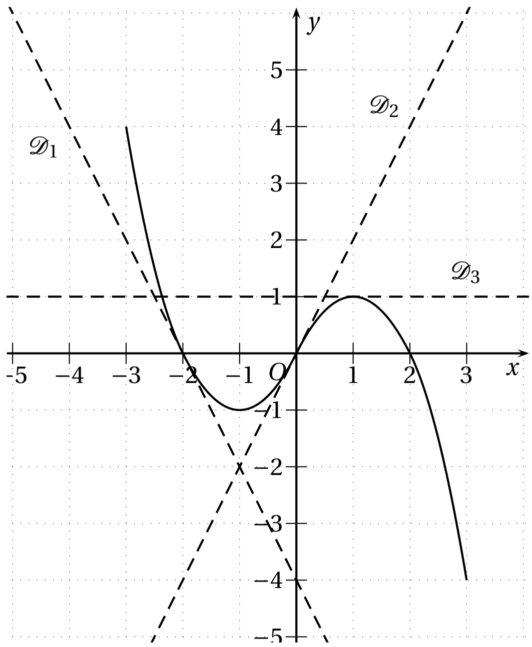
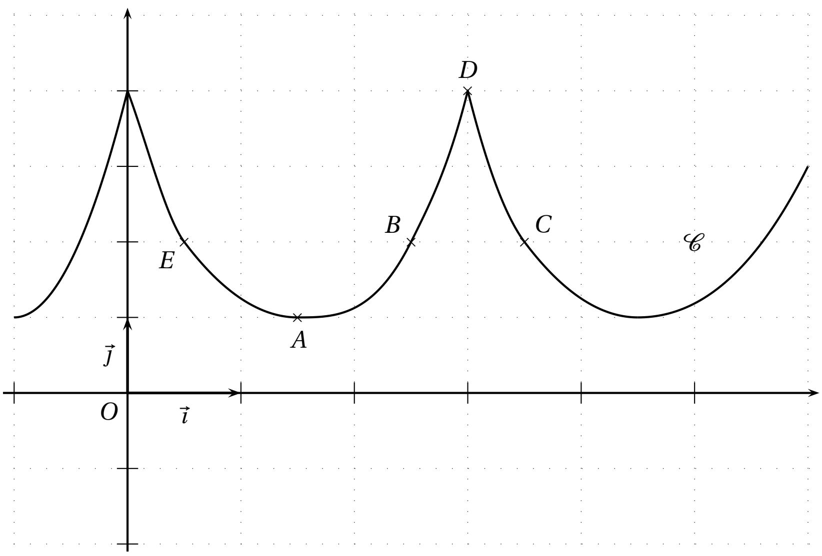
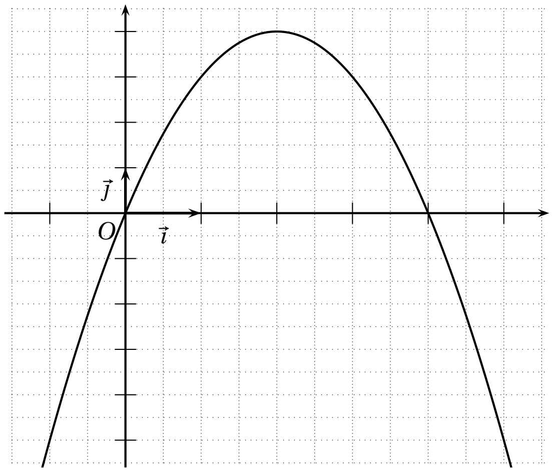


FIGURE 3.4 – Figure de l'activité 3.3, question 2



Activité 3.4.
Le plan est muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;5]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ sur la figure 3.5 de la présente page.

FIGURE 3.5 – Figure de l'activité 3.4



1. Lire sur le graphique :
   (a) l'image de 1 par f : ....
   (b) $f(-1)=$ ....
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de :
   (a) 3 par la fonction f : ....
   (b) -2 par la fonction f : ....
3. (a) Compléter les phrases suivantes :
   La fonction f admet un maximum atteint en $x=$ ....
   Ce maximum est $f(\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

   La fonction f admet un minimum atteint en $x=$ .... et $x=$ ....
   Ce minimum est $f(\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

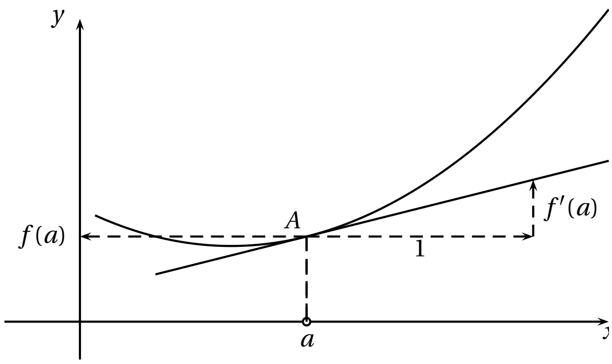
   (b) Compléter alors : Si $x\in[-1;5]$, alors $\ldots\ldots\ldots \leqslant f(x)\leqslant \ldots\ldots\ldots$
4. Résoudre graphiquement les équations suivantes :
   (a) $f(x)=0$ $S=$ ....
   (b) $f(x)=4$ $S=$ ....
5. (a) Déterminer pour quelles valeurs de x de $[-1;5]$, $f(x)$ est positif.
   (b) En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $[-1;5]$.

x	
Signe de $f(x)$	

6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leqslant 3$. $S=$ ....
7. (a) On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente Δ au point A de coordonnées $(3;3)$ et que $f'(3)=-2$.
   Construire la tangente Δ.
   (b) On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $S(2;4)$.
   En déduire le nombre dérivé $f'(2)$.
8. Soit B le point de coordonnées $(1;4)$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet (OB) comme tangente au point O.
   (a) Construire la droite (OB).
   (b) Déterminer le nombre dérivé $f'(0)$.
9. (a) Compléter le tableau de variation de f :

x	
Variations de f	

   (b) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
   i. $f'(x)\leqslant 0$ $S=$ ....
   ii. $f'(x)\geqslant 0$ $S=$ ....



3.2 Bilan

Définition 3.1. Le *nombre dérivé* d'une fonction f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(a\,;\,f(a))$. Il se note $f'(a)$. On dit alors que f est dérivable en a.

Propriété 3.1. *Par définition, la tangente au point* $A\,(a\,;\,f(a))$ *a une équation de la forme* $y = f'(a)x + p$.

Remarque. Pour trouver p on remplace x et y par les coordonnées de A.

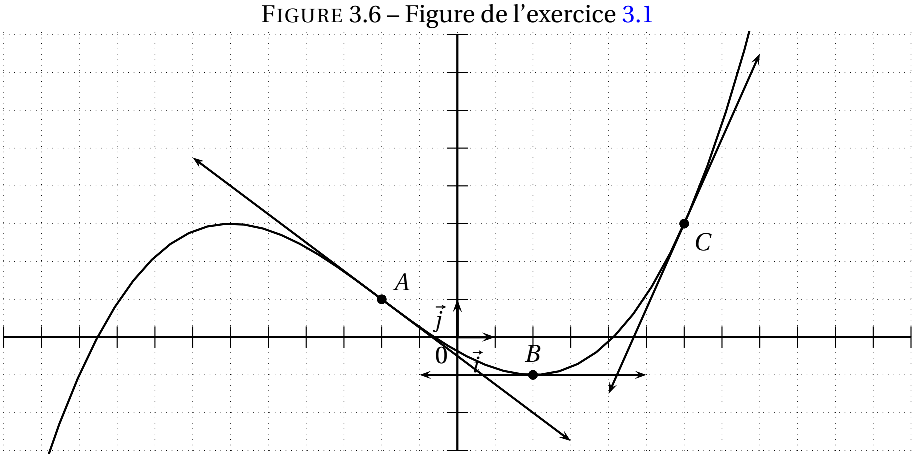
3.3 Exercices

Exercice 3.1.

On donne sur la figure 3.6 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

FIGURE 3.6 – Figure de l'exercice 3.1

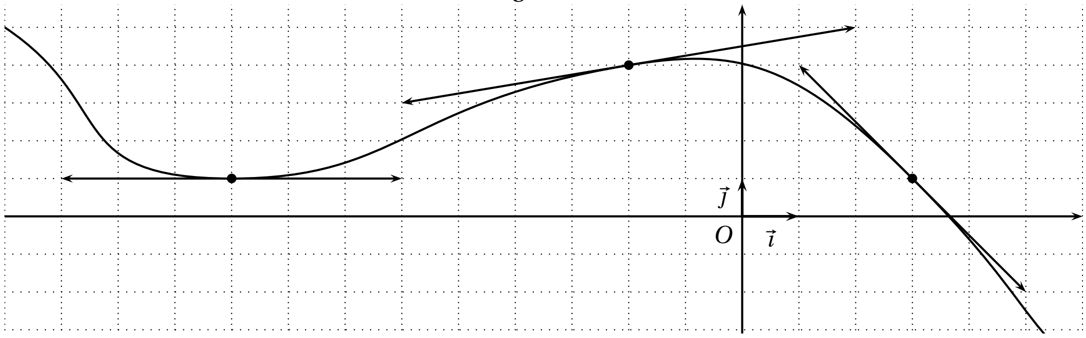


Exercice 3.2.

On donne sur la figure 3.7 page suivante la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

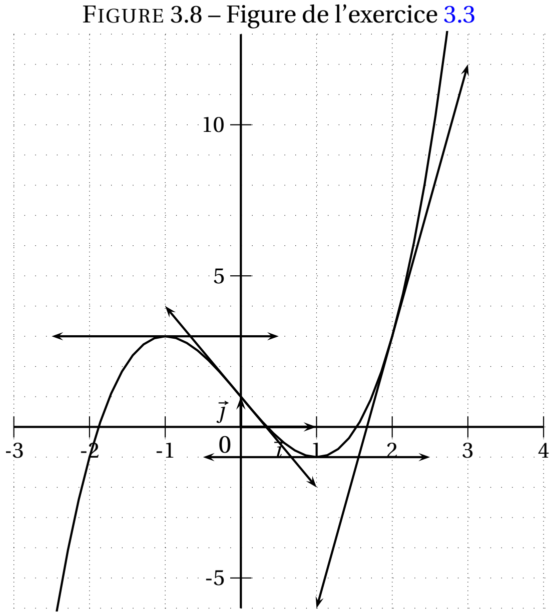
FIGURE 3.7 – Figure de l'exercice 3.2



Exercice 3.3.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 3.8 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1 ; 26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.

FIGURE 3.8 – Figure de l'exercice 3.3



Exercice 3.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3 ; 0]$;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $f(3) = 9$.

Exercice 3.5.

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.

Exercice 3.6.

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) < 0$.

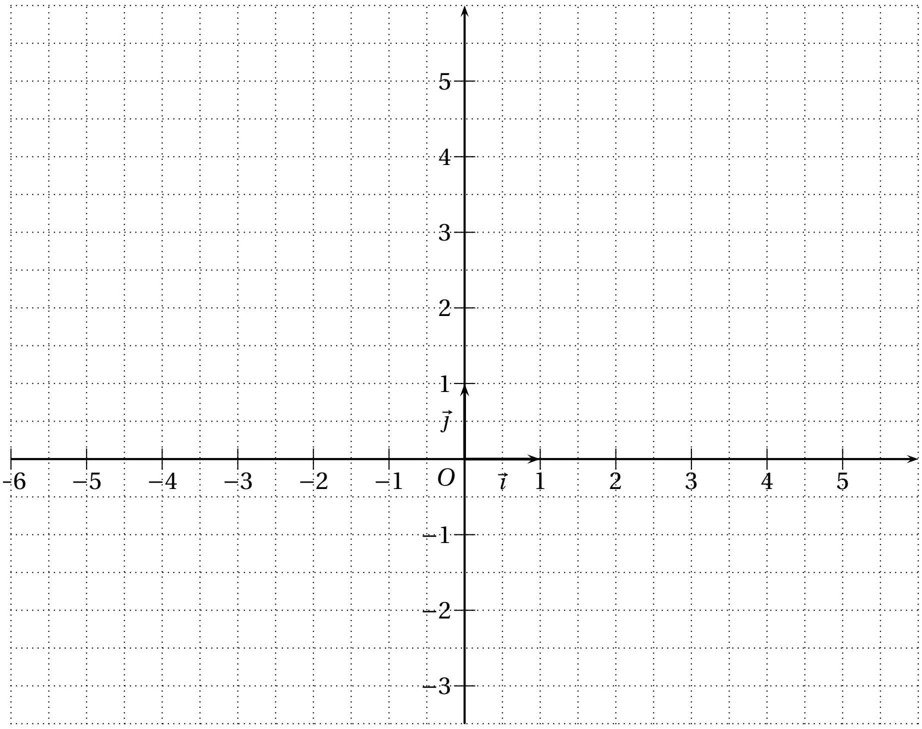
Exercice 3.7.

Tracer sur le repère de la figure 3.9 de la présente page la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

- f est définie sur $[-5\,;5]$;
- f est paire ;
- $f(0) = 3$, $f(2) = 1$ et $f(4) = 2$;
- $f'(0) = 0$, $f'(2) = -\frac{1}{2}$ et $f'(4) = 3$.

On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.

FIGURE 3.9 – Figure de l'exercice 3.7

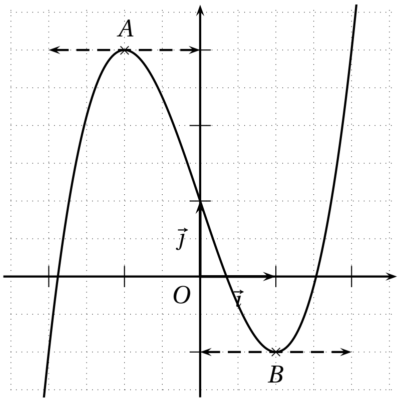


Exercice 3.8.

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 3.10 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $I = [-2 ; 2]$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Aux points A et B de la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses.

FIGURE 3.10 – Figure de l'excercice 3.8



1. **Approche graphique**
   (a) Donner le tableau de variation de f à partir du graphique.

x	
Variations de f	

   (b) En traçant à main levée des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$, dresser un tableau donnant le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

x	
Signe de $f(x)$	

   Préciser le lien constaté entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

2. **Étude algébrique**
   On admet que la formule qui donne $f'(x)$ en fonction de x est $f'(x) = 3x^2 - 3$.
   (a) Factoriser $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

x	
Signe de $f(x)$	

   (c) Comparer au résultat obtenu dans l'approche graphique.
   (d) Quel semble être le lien entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f ?

Chapitre 4

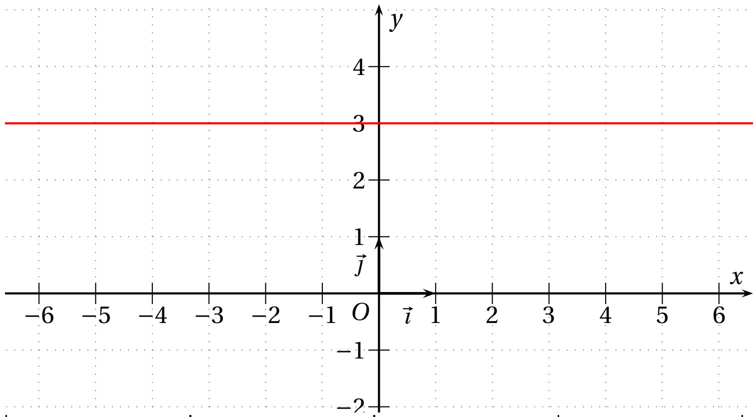
Fonction dérivée

Sommaire

4.1 Activités

Activité 4.1 (Fonctions dérivées des fonctions usuelles).
Dans chacun des cas suivants, compléter le tableau et conjecturer l'expression de $f'(x)$.

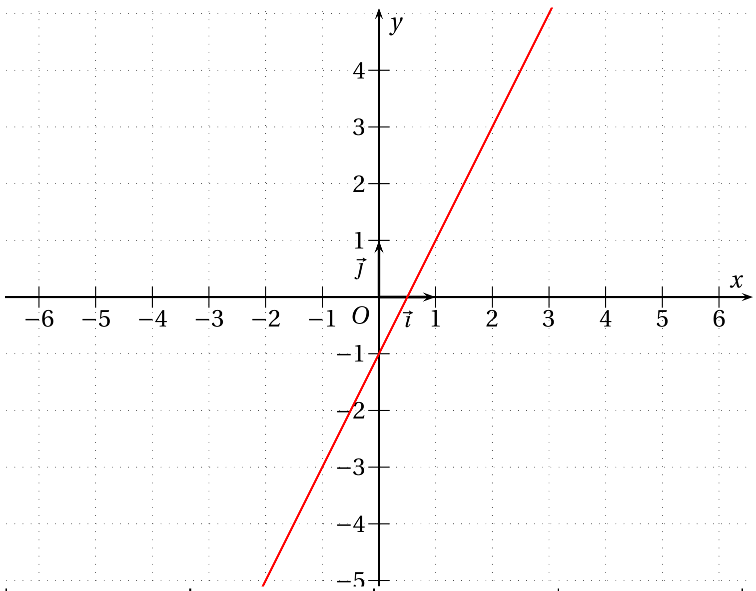
FIGURE 4.1 – Fonction constante : $f(x) = 3$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

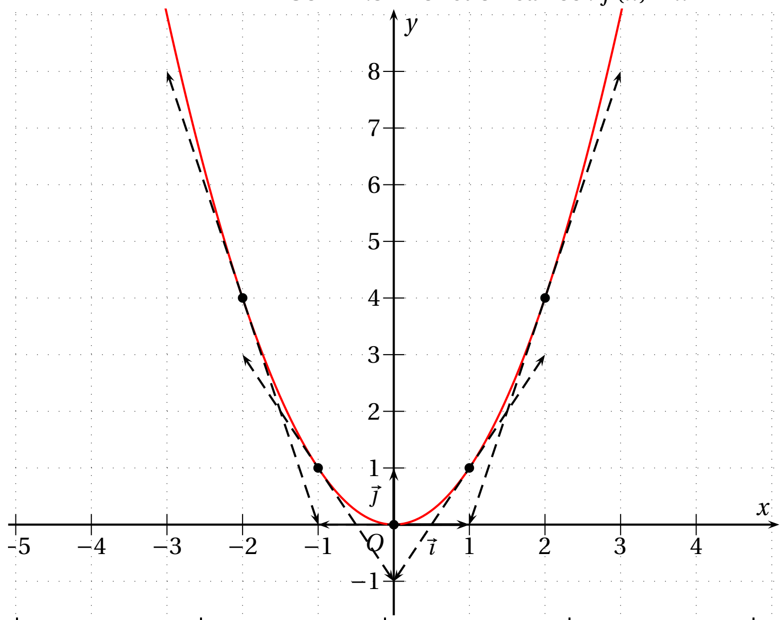
FIGURE 4.2 – Fonction affine : $f(x) = 2x - 1$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

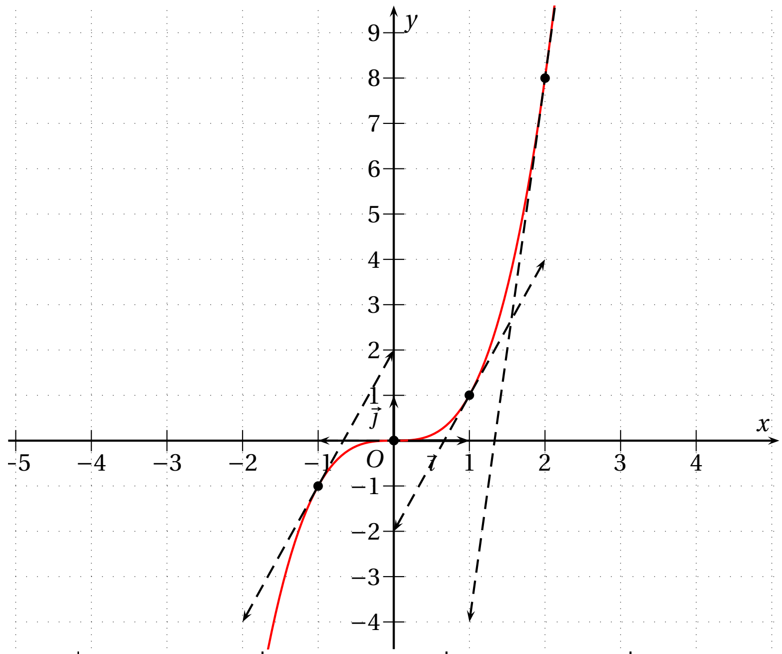
FIGURE 4.3 – Fonction carrée : $f(x) = x^2$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

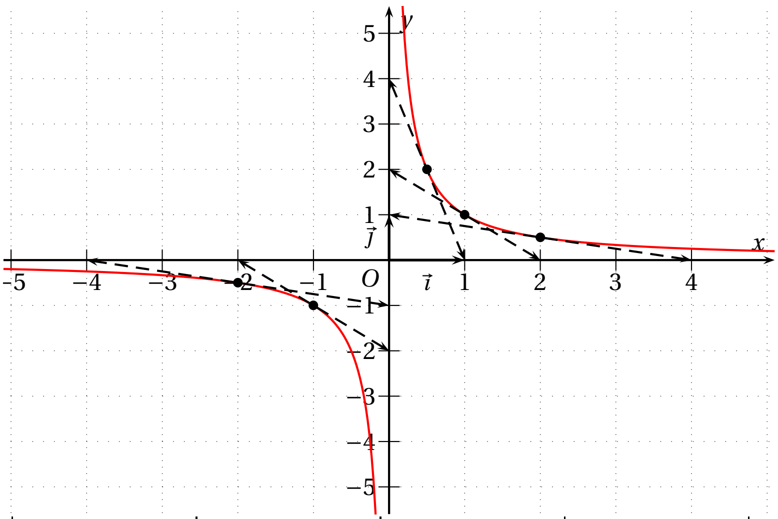
FIGURE 4.4 – Fonction cube : $f(x) = x^3$



x	-1	0	1	2
$f'(x)$				

$f'(x) = \ldots\ldots$

FIGURE 4.5 – Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$



x	-2	-1	$0,5$	1	2
$f'(x)$					

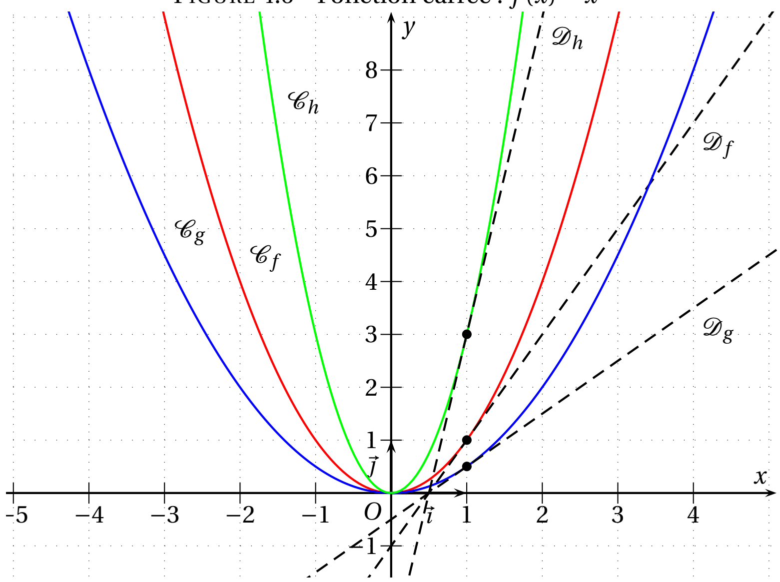
$$\boxed{f'(x) = \ldots\ldots}$$

Activité 4.2 (Fonction dérivée du produit d'une fonction par une constante).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{D}_f$ sa tangente au point d'abscisse 1.

Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{f(x)}{2}$ et $h(x) = 3f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On nomme $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_h$ leurs tangentes respectives au point d'abscisse 1.
On nomme enfin $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes respectives de f, g et h.

1. Déterminer par lecture graphique $f'(1)$, $g'(1)$ et $h'(1)$.
2. Conjecturer l'expression de $g'(x)$ et de $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$.

FIGURE 4.6 – Fonction carrée : $f(x) = x^2$



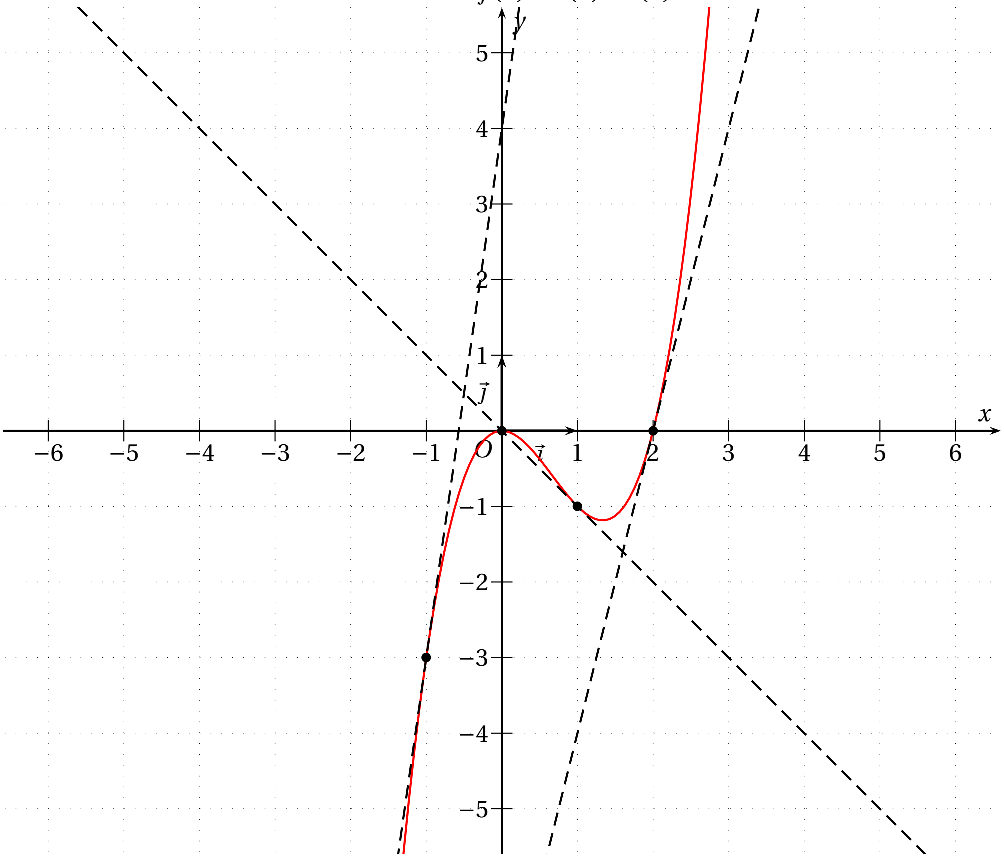
Activité 4.3 (Fonction dérivée d'une somme de fonction).
Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

1. Déterminer $u'(x)$ et $v'(x)$.
2. On donne sur la figure 4.7 de la présente page la courbe représentative de f ainsi que quelques tangentes.
   À l'aide de la question précédente et de la figure, compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1	2
$u'(x)$				
$v'(x)$				
$f'(x)$				

3. Conjecturer l'expression de $f'(x)$ en fonction de $u'(x)$ et de $v'(x)$.

FIGURE 4.7 – $f(x) = u(x) + v(x)$



4.2 Bilan et compléments

4.2.1 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Compléter le tableau 4.1 de la présente page.

TABLE 4.1 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**définie sur**	**Fonction dérivée f'**	**définie sur**
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) =$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$	$f'(x) =$	

4.2.2 Opérations algébriques et dérivation

Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I. Compléter le tableau 4.2 de la présente page.

TABLE 4.2 – Opérations sur les fonctions dérivées

Fonction	**Fonction dérivée**
ku avec $k \in \mathbb{R}$	
$u + v$	
$u \times v$	
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	
$\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	

4.2.3 Variation de fonctions et signe de la dérivée

Propriété 4.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- *Si f est croissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
- *Si f est décroissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*

Réciproquement :

Propriété 4.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

Propriété 4.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\alpha \in I$.*
Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en α, alors $f(x)$ admet un extremum local (minimum ou maximum) atteint en α.

On l'admettra.

4.3 Exercices

- Déterminer des fonctions dérivées
  - Sommes : 30 à 33 page 71
  - Produits : 35 à 37 page 71
  - Puissances : 39 et 41 page 73
  - Inverses : 44 et 46 page 73
  - Quotients : 55, 56 et 58 page 74
  - Problèmes : 83 à 88 page 82
- Variations et extremums
  - 2 page 139
  - 17 à 20 page 143
  - 27 et 30 page 148
  - 34 et 38 page 149
  - 42 page 150
  - Problèmes : 45 à 49 page 154 à 156

Devoir surveillé n°3

Dérivation

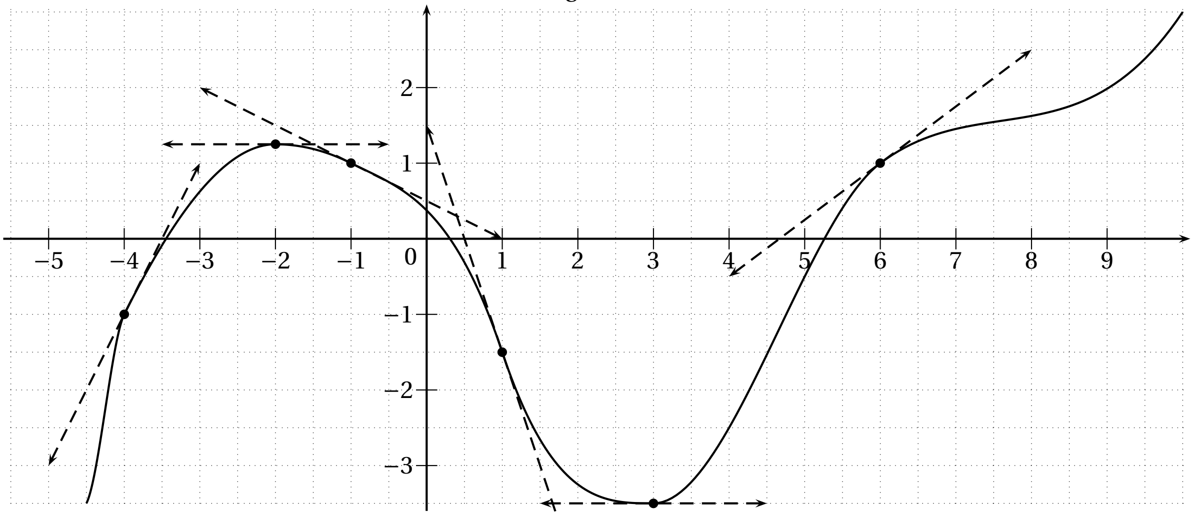
Exercice 3.1 (8 points).

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 3.1 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Compléter :
   (a) $f(-4) = \ldots\ldots$ et $f'(-4) = \ldots\ldots$;
   (b) $f(-1) = \ldots\ldots$ et $f'(-1) = \ldots\ldots$;
   (c) $f(1) = \ldots\ldots$ et $f'(1) = \ldots\ldots$;
   (d) $f(6) = \ldots\ldots$ et $f'(6) = \ldots\ldots$.
2. Compléter :
   (a) L'équation de la tangente T_1 au point d'abscisse 1 est .... ;
   (b) L'équation de la tangente T_3 au point d'abscisse 3 est ....
3. Compléter le tableau suivant avec le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x :

x	
Signe de $f'(x)$	

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.1



Exercice 3.2 (6 points).

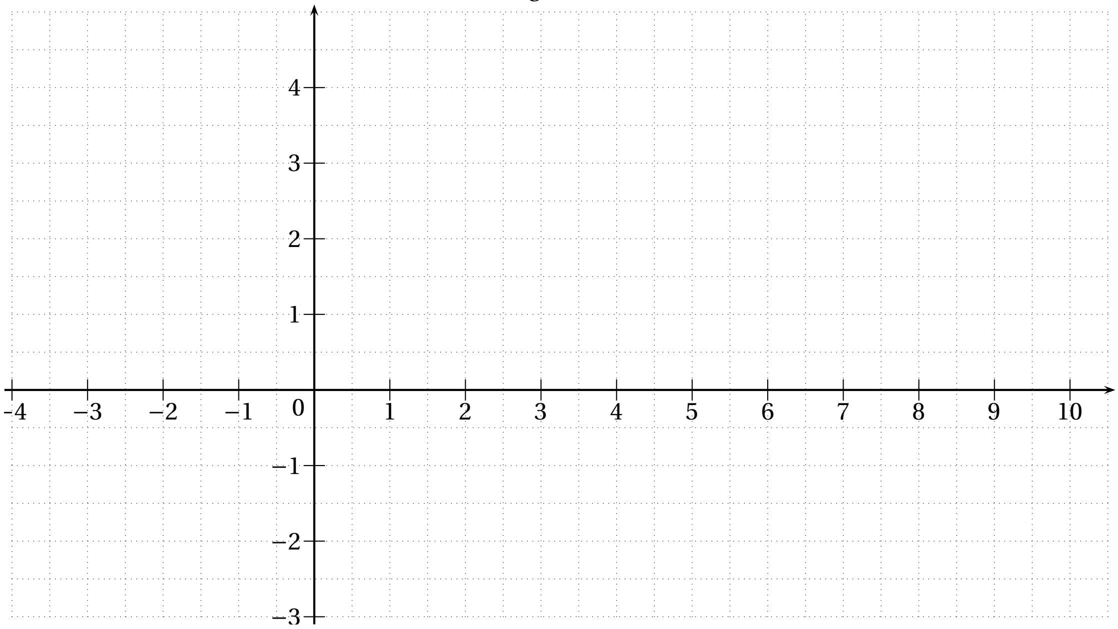
Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$
3. $f(x) = (x^3 + x)(x^2 + 1)$
4. $f(x) = (x^2 + x + 1)^5$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$
6. $f(x) = \dfrac{x + 2}{3x - 2}$

Exercice 3.3 (6 points).

Tracer dans le repère de la figure 3.2 de la présente page une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;\,10]$ ayant les propriétés suivantes (*on tracera les tangentes dont on connait les coefficients directeurs*) :

FIGURE 3.2 – Figure de l'exercice 3.3



- l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions : $x = 1$, $x = 4$ et $x = 8$;
- $f(2) = 1$ et $f'(2) = 0$;
- $f(7) = -1$ et $f'(7) = \frac{1}{2}$;
- $f(9) = 2$ et $f'(9) = 3$;
- $f'(4) = -2$;
- le minimum de la fonction est -2 et il est atteint en -1 ;
- le tableau des variations de la fonction f est le suivant :

x	-3		-1		2		6		10
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Devoir surveillé n°4

Dérivation

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.
Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \text{ où } x \text{ est compris entre 1 et 30.}$$

Partie A

On appelle coût marginal, noté C_m, le coût de fabrication d'un objet supplémentaire. Ainsi $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$

1. Déterminer $C_m(10)$ et $C_m(20)$.
2. Déterminer $C'(x)$ puis $C'(10)$ et $C'(20)$. Que constate-t-on ?

Pour la suite, on prendra $C_m(x) = C'(x)$.

Partie B

Le coût moyen de production d'un objet est donné par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

1. Montrer que $C_M(x) = x + 60 + \frac{121}{x}$.
2. Montrer que $C'_M(x) = \frac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $C'_M(x)$ et dresser le tableau de variation de C_M sur l'intervalle $[1\,;30]$.
4. (a) Déterminer le nombre d'objets en bois à produire pour que le coût moyen de production soit minimum. Donner ce coût moyen minimum.
   (b) Déterminer le coût marginal pour ce même nombre d'objets.
   (c) Que constate-t-on ?
5. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. *On arrondira à* 10^{-1} *les valeurs.*

x	1	2	4	8	11	15	20	25	30
$f(x)$						83,1		89,8	

6. Construire la courbe représentative de C_M dans le repère orthogonal de la figure 4.1 page suivante.

Partie C

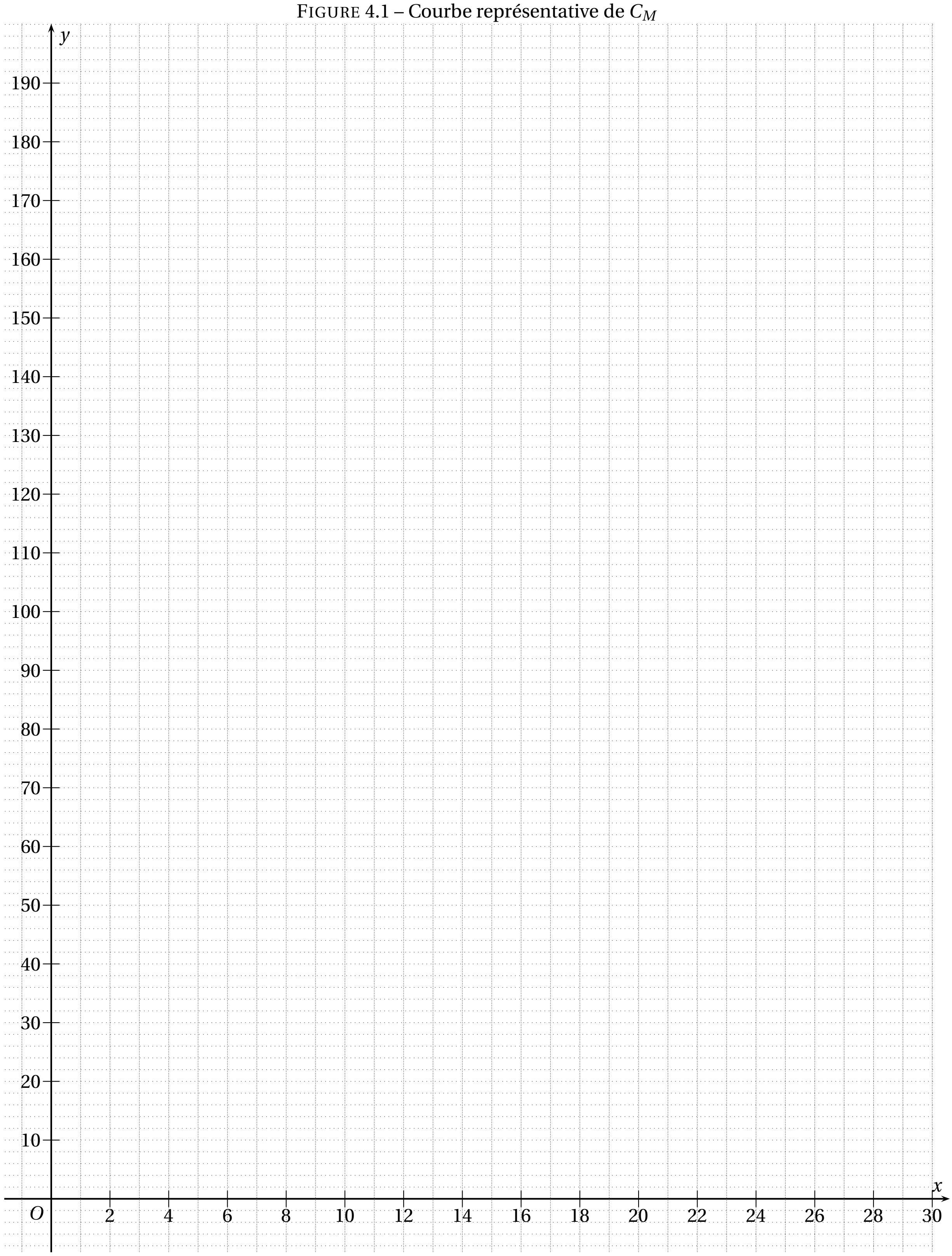
L'artisan vend chaque objet 110 €.

1. Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121 \text{ où } x \text{ est pris dans } [1\,;30].$$

2. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction B.
4. En déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
   Donner ce bénéfice maximal.

FIGURE 4.1 – Courbe représentative de C_M



Chapitre 5

Taux d'évolution

Sommaire

5.1 Activités

Activité 5.1.

Le tableau ci-contre donne la fréquentation à midi de la cantine d'un lycée du lundi au mercredi :

Lundi	Mardi	Mercredi
1200	1340	520

1. (a) Calculer la variation absolue entre lundi et mardi.
   (b) Calculer la variation relative entre lundi et mardi. Cette variation est appelée taux d'évolution entre lundi et mardi.
   L'exprimer sous forme décimale, puis en pourcentage.
   (c) Calculer le taux d'évolution entre mardi et mercredi.
2. (a) Le taux d'évolution entre lundi et jeudi est $-3,5\,\%$.
   Calculer la fréquentation de la cantine le jeudi.
   (b) Le taux d'évolution entre mardi et vendredi est $+0,012\,\%$.
   Calculer la fréquentation de la cantine le vendredi.

Activité 5.2.
En 2 004, il y avait 250 adhérents dans un club de tennis. Ce nombre a augmenté de 4 % en 2 005 et ensuite a baissé de 5 % en 2 006.

1. Compléter le tableau 5.1 de la présente page.

TABLE 5.1 – Tableau de l'activité 5.2, question 1

Année	Effectif	Variation en %	Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
2 004	250			
2 005		hausse de 4 %	$t_1 = \dots\dots$	$k_1 = \dots\dots$
2 006		baisse de 5 %	$t_2 = \dots\dots$	$k_2 = \dots\dots$
Résumé des deux évolutions		.........de ...... %	$T = \dots\dots$	$K = \dots\dots$

2. (a) Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre k tel que : $k^2 = K$.
   (b) En déduire la valeur arrondie au millième du nombre t tel que : $(1+t)^2 = K$.
   (c) Si le taux d'évolution du nombre d'adhérents de ce club avait été t % par an sur ces deux années, quel serait le taux global d'évolution ?
3. (a) Compléter le tableau 5.2 de la présente page où l'on remplacera la valeur de t par celle trouvée précédemment.

TABLE 5.2 – Tableau de l'activité 5.2, question 3a

Année	Effectif	Variation en %	Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
2 004	250			
2 005		.........de ...... %	$t = \dots\dots$	$k = \dots\dots$
2 006		.........de ...... %	$t = \dots\dots$	$k = \dots\dots$
Résumé des deux évolutions		.........de ...... %	$T = \dots\dots$	$K = \dots\dots$

   (b) Quel résultat le tableau permet-il de vérifier ?

Activité 5.3.
Le tableau ci-dessous donne le nombre d'animaux dans un zoo.

Année	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004	2 005
Population	1 250	1 200	1 000	1 250	1 500	2 000
Indice	100					

1. (a) Quel est le taux d'évolution du nombre d'animaux entre 2 000 et 2 001 ?
   (b) Interpréter ce résultat en terme d'augmentation ou de diminution en pourcentage.
2. (a) Si la population avait été de 100 animaux en 2 000, quel aurait été le nombre d'animaux en 2 001 avec le taux d'évolution trouvé en 1a ?
   (b) Compléter la case correspondante dans le tableau.
   Cette valeur trouvée est appelé indice de la population en 2 001 avec pour base 100 en 2 000.
   (c) Compléter la troisième ligne du tableau selon le même principe qu'en 2b.
   (d) Donner la signification des indices trouvés en 2 002, en 2 003 et en 2 005.

Activité 5.4.
La population A d'une ville a augmenté de 1 % par an pendant deux ans entre 2 004 et 2 006.
La population d'une ville B a augmenté de 30 % pendant cette même période.
Anne habite la ville A et dit que la population de sa ville a augmenté de 2 % sur cette période ($2 \times 1\,\% = 2\,\%$).
Blanche habite la ville B et dit que la population de sa ville a augmenté de 60 % sur cette période ($2 \times 30\,\% = 60\,\%$).

1. (a) Pour chacune des deux villes, quel est le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation entre 2 004 et 2 006 ? En déduire le taux d'évolution correspondant.
   (b) Qui, de Anne ou de Blanche, est la plus proche de la réalité ?
2. (a) Compléter le tableau 5.3 page ci-contre.
   (b) Expliquer pourquoi les résultats des deux dernières colonnes sont identiques.

TABLE 5.3 – Tableau de l'activité 5.4, question 2a

Taux t	$(1+t)^2$	$1+2t$	$(1+t)^2-(1+2t)$	t^2
0,2				
0,1				
0,01				
0,005				

TABLE 5.4 – Tableau de l'activité 5.4, question 3a

Taux d'évolution t	k	k'	différence $k-k'$	différence en %
+40 %	1,96	1,8	0,16	16 %
+10 %				
+5 %				
+1 %				

(c) Compléter la phrase suivante pour la rendre correcte : $(1+t)^2 \approx 1+2t$ si ....

3. (a) Compléter le tableau 5.4 de la présente page.
   (b) Que peut-on dire à la lecture de ce tableau ?
   (c) Quel est le lien avec ce tableau et celui du 2a ?

Activité 5.5.
Pour une évolution au taux t, on multiplie par .... : $x \longrightarrow y$
Pour retrouver la valeur de départ, on divise par .... : $x \longleftarrow y$

1. Un prix a subit une évolution au taux t, le nouveau prix est y.
   Parmi les propositions suivantes, choisir celle(s) qui convient (conviennent) :
   - $y = tx$;
   - $y = (1+t)x$;
   - $x = y - tx$;
   - $y = x + t$;
   - $x = \frac{1}{1+t}y$;
   - $x = \frac{y}{t}$;
2. (a) Compléter le tableau ci-dessous :

Taux t	$\frac{1}{(1+t)}$	$1-t$	Différence
+20 %	$\approx 0,83$	0,80	0,03
+10 %			
+5 %			
+1 %			

   (b) Compléter la phrase suivante pour la rendre correcte :

$$\frac{1}{(1+t)} \approx 1-t \text{ si } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Dans quels cas, une hausse de t % est-elle à peu près compensée par une baisse de t % ?

Activité 5.6.
En 2 004, le prix d'un article était 150 €. Ce prix augmente de 20 % entre 2 004 et 2 006.

1. (a) Calculer le prix de cet article.
   (b) Assia affirme « puisque le prix a augmenté de 20 % sur deux ans, cela revient au même que s'il avait augmenté de 10 % chaque année ». A-t-elle raison ?
2. (a) En notant k le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution au taux t et k' le coefficient multiplicateur correspondant à deux évolutions successives au taux $\frac{t}{2}$, compléter le tableau ci-dessous :

Taux t	k	Prix correspondant	k'	Prix correspondant	Différence de prix
$+0,40$	1,40	$150 \times 1,40 = 210$	$1,20^2 = 1,44$	$150 \times 1,44 = 216$	$216 - 210 = 6$
$+0,10$					
$+0,05$					
$+0,01$					

   (b) Que peut-on dire à la lecture du tableau ?

5.2 Taux d'évolution et coefficient multiplicateur (rappels)

5.2.1 Calculs

Calcul d'un pourcentage

Propriété 5.1. *Le pourcentage d'une quantité A par rapport à une quantité B est :* ....

Exemple 5.1. 36 élèves sur 250 sont internes. Quel pourcentage des élèves, les internes représentent-ils ?

Pourcentage d'une quantité

Propriété 5.2. *t % d'une quantité B est égal à :* ....

Exemples 5.2.
- 75 % de 1 200 est égal à : ....
- Dans un lycée, les 76 élèves de TSTG représentent 12 % des élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans le lycée ?

5.2.2 Taux d'évolution et coefficient multiplicateur

Propriété 5.3. *Si une quantité varie de y_1 à y_2, alors le taux d'évolution de y_1 à y_2 est le nombre t tel que :*

$$\frac{y_2}{y_1} = \ldots\ldots\ldots = k \text{ ou encore } t = \ldots\ldots\ldots$$

k = ... est le coefficient multiplicateur.

Remarques. t est aussi appelé la variation relative de y_1 par rapport à y_2.
- Si t est positif, l'évolution est une ....
- Si t est négatif, l'évolution est une ....

Exemples 5.3.
- Un produit coûtant 50 € en 2 004 a coûté 55 € en 2 005.
  Le coefficient multiplicateur permettant de passer de 50 à 55 est : k = ... donc t = ... soit une ....de ....%.
- Ce produit a ensuite coûté 49,5 € en 2 006.
  Le coefficient multiplicateur permettant de passer de 50 à 55 est : k = ... donc t = ... soit une ....de ....%.

5.2.3 Augmenter en pourcentage

Propriété 5.4. *Une quantité y_1 augmente de t %. Sa nouvelle valeur est égale à y_2 = ...*
k = ... est le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2.

Exemple 5.4. Un prix de 520 € augmente de 24 %. Quel est le nouveau prix ?
Augmenter un prix de 24 % revient à le multiplier par : ....
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : k = ...
Le nouveau prix est : ....

5.2.4 Diminuer en pourcentage

Propriété 5.5. *Une quantité y_1 diminue de t %. Sa nouvelle valeur est égale à y_2 = ...*
k = ... est le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2.

Exemple 5.5. Un ordinateur 865 € baisse de 20 %. Quel est le nouveau prix ?
Augmenter un prix de 20 % revient à le multiplier par : ....
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : k = ...
Le nouveau prix est : ....

Exercice 5.1.
Compléter le tableau suivant :

Évolution en %	Augmentation de 35 %	Diminution de 12 %		
Taux d'évolution t	$+0,35$		$-0,54$	
Coefficient multiplicateur k	1,35			2,3

5.2.5 Évolutions successives

Propriété 5.6. *Une quantité x subit une évolution au taux t_1 ; le coefficient multiplicateur est : $k_1 =$ ....*
Cette quantité subit ensuite une seconde évolution t_2 ; le coefficient multiplicateur est : $k_2 =$ ....
Le coefficient multiplicateur global est : $k =$ .... $=$ ....

Exemple 5.6. Un article augmente de 20 %, puis baisse 15 %. Quel est le taux d'évolution global ?

- Augmenter un prix de 20 % revient à le multiplier par : ....
  Le coefficient multiplicateur est : $k_1 =$ ....
- Diminuer un prix de 15 % revient à le multiplier par : ....
  Le coefficient multiplicateur est : $k_2 =$ ....
- Le coefficient multiplicateur global est : $k =$ ....
  Il a donc finalement subit une évolution globale au taux : $t =$ .... soit une .... de .... %.

Conclusion : Augmenter un nombre de 20 %, puis diminuer de 15 %, revient à .... de .... %.

5.2.6 Évolutions réciproques

Propriété 5.7. *Si le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2 est k, le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_2 à y_1 est ....*

Exemple 5.7. Un article valant 50 € augmente de 25 %.
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : $k =$ ....
Le coefficient multiplicateur permettant de passer de .... à 50 est : ....
Ce qui correspond à une .... de .... %.
Conclusion : Pour compenser une augmentation de 25 %, il faut effectuer une .... de .... %.
On dit que l'évolution réciproque d'une augmentation de 25 % est une .... de .... %.

5.3 Taux d'évolution moyen et moyenne géométrique

Propriété 5.8. *Si une quantité subit deux évolutions successives à des taux respectifs t_1 et t_2, le taux global est T qui vérifie : $1+T =$ ....*
On appelle taux moyen d'évolution, le taux unique t qui, répété deux fois, fournit le même résultat que les évolutions successives, c'est-à-dire que : $1+T =$ ....
Autrement dit : $(1+t)^2 =$ .... ou encore : $1+t =$ ....
On dit que : $1+t$ est la moyenne .... de .... et ....
t est le taux moyen d'évolution : il s'interprète en terme de hausse et de baisse en pourcentage.

Exemple 5.8. En 2 004, le taux d'évolution du prix du livre était de $+0,10$ et en 2 005, pour le même livre, le taux d'évolution était de $-0,05$.

1. Calculer le taux global T correspondant à ces deux évolutions successives. Interpréter ce taux en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.
2. Calculer le taux moyen annuel t d'évolution durant cette période (arrondir au centième) et interpréter ensuite en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

5.4 Exposants et taux d'évolution

5.4.1 Règles de calcul

Propriété 5.9. *Pour tous nombres réels strictement positifs a, b, et pour tous entiers relatifs n et p, on a :*
- $\frac{a^n}{a^p} = \ldots\ldots$
- $(a^n)^p = \ldots\ldots$
- $(a \times b)^n = \ldots\ldots$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \ldots\ldots$

5.4.2 Exposants $\frac{1}{n}$

Propriété 5.10. *Pour tout réel strictement positif a et tout entier naturel non nul n, on a :*

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = \ldots\ldots$$

Exemple 5.9. $(2^5)^{\frac{1}{5}} = \ldots\ldots$

5.4.3 Résoudre une équation

Propriété 5.11. *Pour tout réel x positif et tout entier naturel non nul n, on a :*
- *Si $x^n = a$, alors $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$*
- *Si $x = a^{\frac{1}{n}}$, alors $x^n = \ldots\ldots\ldots\ldots$*

Exemple 5.10. Trouver la valeur exacte du réel x tel que : $x^8 = 2$, puis en donner la valeur arrondie au millième.

5.4.4 Applications aux taux de variations

Intérêts composés

Exercice 5.2.
On a placé un capital de 1 000 € à un taux annuels 2,25 % à intérêts composés sur une période de 8 ans. À l'issue de cette période, quel est le nouveau capital ? (arrondir au centime près).

Taux moyen

Exercice 5.3.
Un prix augmente de 2 % en janvier, de 5 % en février et de 3 % en mars.
Calculer le taux moyen t d'augmentation mensuel sur cette période de trois mois (donner la valeur arrondie à 0,001 près).

Placement

Exercice 5.4.
Luc place un capital le 1er janvier 1 995 à un taux annuel de x %. Au bout de 11 ans, son capital a été multiplié par 1,5.
Calculer le pourcentage d'augmentation annuel x (arrondir au centième).

5.5 Indice

Les indices sont des pourcentages qui ne disent pas leur nom.
Ils sont essentiellement utilisés dans des séries chronologies.
La valeur d'une grandeur observée d'une année ou d'un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence.
Indices et grandeurs sont alors proportionnels.

Propriété 5.12. *Soit n et n' deux dates, V_n et $V_{n'}$ les valeurs d'une grandeur à ces deux dates et I_n et $I_{n'}$ les indices correspondants, alors*

$$\frac{I_n}{I_{n'}} = \frac{V_n}{V_{n'}}$$

En particulier, si n' est la date de référence (indice 100) et en notant V_0 la valeur de la grandeur à cette date, on a :

$$\frac{I_n}{100} = \frac{V_n}{V_0} \Leftrightarrow I_n = \frac{V_n}{V_0} \times 100$$

Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

Exercice 5.5.
Le tableau suivant indique l'évolution du PIB base 100 en 1 980 aux États-Unis (EU), au Japon et dans l'Union Européenne (UE) :

Année	1 980	1 990	1 999
EU	100	132,6	172,3
Japon	100	155,2	166,0
UE	100	126,8	146,8

1. Donner le pourcentage d'évolution du PIB aux EU entre 1 980 et 1 990 puis entre 1 980 et 1 999. Faire de même pour le PIB du Japon et dans l'UE.
2. Pour les EU, calculer l'indice du PIB en 1 999 base 100 en 1 990. faire de même pour le Japon et l'UE (valeurs arrondies à 0,1 près).
3. Si le PIB aux EU était de 5 554 milliards de dollars en 1 990, calculer le PIB en 1 980 et en 1 999 (valeurs arrondies au milliard de dollars).
4. Peut-on dire que le PIB du Japon est supérieur à celui de l'UE ?

5.6 Approximation d'un taux d'évolution

5.6.1 Formule d'approximation locale

Propriété 5.13. *Pour t proche de 0,* $(1+t)^2 \approx \ldots\ldots\ldots$ *et* $\frac{1}{1+t} \approx\approx \ldots\ldots\ldots$

5.6.2 Application aux petits taux

Propriété 5.14. *Pour t proche de 0 :*
- *Deux évolutions successives aux taux t correspondent approximativement à une évolution au taux de :* ....
- *Le taux réciproque d'une évolution au taux de t est approximativement de :* ....

Attention ! : Ces approximations sont vraies seulement si t est très proche de 0.

Exemple 5.11. Un CD coûte 15 €. Son prix augmente deux fois de suite de 0,5 %.

1. Donner l'ordre de grandeur de l'augmentation en pourcentage, et à l'aide de cette approximation, calculer le nouveau prix du CD.
2. Calculer la valeur exacte du prix du CD.
3. Comparer les résultats des deux questions.

Devoir surveillé n°5 – Baccalauréat blanc

Statistiques – Optimisation – Dérivation

Exercice 1 (3 points).

Le tableau ci-dessous résume partiellement les échanges extérieurs concernant le tourisme au cours des deux années 2004 et 2005. Il est constitué à partir de données publiées par la Banque de France.

	2004	2005
Dépenses, en milliards d'euros, des touristes étrangers en France		33,9
Dépenses, en milliards d'euros, des touristes français à l'étranger	23,0	25,0
Solde, en milliards d'euros		8,9

Pour chaque question, donner les calculs effectués.

1. Calculer le taux d'évolution des dépenses des touristes français à l'étranger entre 2004 et 2005. (Arrondir le résultat à 0,1 %).
2. Sachant qu'entre 2004 et 2005 les dépenses des touristes étrangers en France ont augmenté de 3,5 %, déterminer le montant de ces dépenses en 2004. (Arrondir le résultat au dixième).
3. (a) Calculer le solde pour l'année 2004, c'est-à-dire la différence entre les dépenses des touristes étrangers en France et celles des touristes français à l'étranger.
   (b) Calculer le taux d'évolution de ce solde entre 2004 et 2005. (Arrondir le résultat à 0,1 %).

Exercice 2 (5 points).

Selon l'institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) un indice des prix a suivi, en France, l'évolution suivante entre les années 2000 et 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i	100	101,5	102,8	104,0	107,1	109,4	113,5

INSEE : formation brute de capital fixe

L'exercice a pour objet d'étudier l'évolution de cet indice en utilisant deux modèles mathématiques.

1. Représenter graphiquement le nuage de points M_i de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ sur la figure 5.2 page 57 donnée en annexe, **à rendre avec la copie**.
2. Ajustement affine.
   (a) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).
   (b) À partir des calculs effectués ci-dessus, on retient comme ajustement affine du nuage de points la droite d'équation $y = 2,2x + 96,8$.
   Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique donné en annexe sur la figure 5.2 page 57, **à rendre avec la copie**.
   Le tracé de la droite devra être justifié par un calcul approprié.
   (c) En supposant que ce modèle reste valable pour l'année 2007, donner une prévision de la valeur de l'indice pour 2007. Indiquer la méthode utilisée.
3. Ajustement à l'aide d'un logiciel.
   Un logiciel de calcul propose d'ajuster le nuage de points à l'aide d'une partie de la courbe d'équation :
   $$y = 0,3x^2 + 0,1x + 99,9.$$
   La courbe $\mathscr{C}$ est tracée en annexe sur la figure 5.2 page 57, **à rendre avec la copie**.
   (a) Déterminer l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 8.
   (b) On suppose que le modèle défini par la courbe $\mathscr{C}$ reste valable pour l'année 2007.
   Donner, selon ce modèle, la valeur de l'indice pour 2007.

Exercice 3 (7 points).

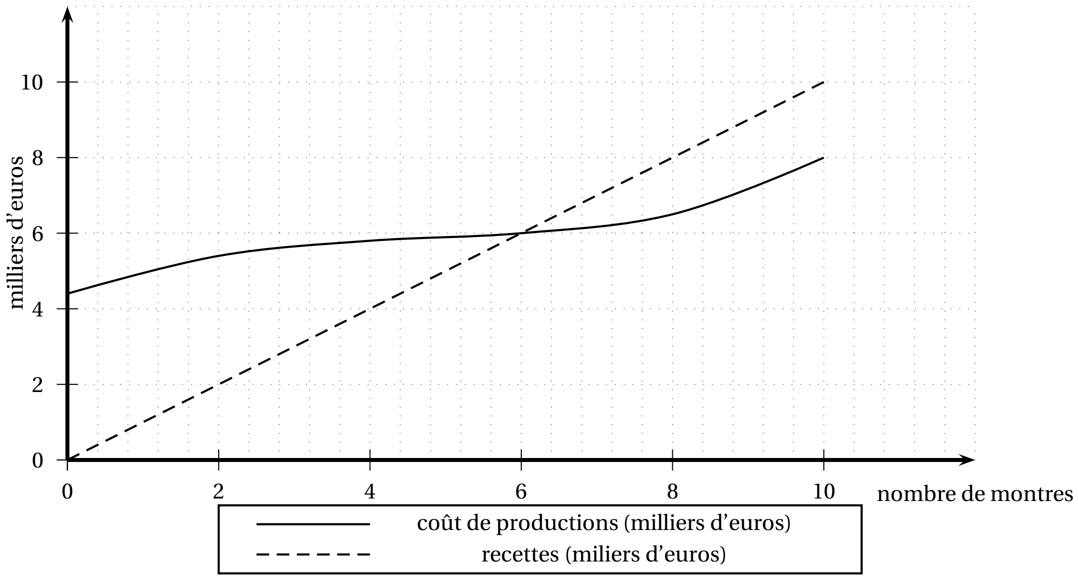
Monsieur Durand dirige une entreprise familiale qui fabrique des montres de luxe depuis cinquante ans. Il part à la retraite et confie l'entreprise à son fils Vincent.

Partie 1.

Dès la première semaine, Vincent demande à un collaborateur un compte rendu de l'activité journalière de l'usine ; celui-ci lui remet le document donné par la figure 5.1 page suivante.

En lisant graphiquement les deux courbes du document, répondre aux questions suivantes.

FIGURE 5.1 – Figure de l'exercice 3



1. Quel est le nombre maximum de montres produites en une journée ?
2. Quel est le coût de production, en euros, de 6 montres ? de 8 montres ?
3. Combien faut-il vendre de montres pour obtenir une recette de 6000 € ?
4. Combien de montres faut-il vendre par jour pour que l'usine fasse un bénéfice ? (ce bénéfice doit être strictement positif.)

Partie 2.
La semaine suivante, Vincent se demande s'il peut produire plus de montres à condition que l'usine reste bénéficiaire. Il convoque son collaborateur qui lui remet le document donné par le tableau 5.1 de la présente page, dressé à l'aide d'un tableur.

TABLE 5.1 – Tableau de l'exercice 3

	A	B	C
1	Nombre de montres	Coût de production (en milliers d'euros)	Recette (en milliers d'euros)
2	0	4,5	0
3	1	5,075	1
4	2	5,44	2
5	3	5,655	3
6	4	5,78	4
7	5	5,875	5
8	6	6	6
9	7	6,215	7
10	8	6,58	8
11	9	7,155	9
12	10	8	10
13	11	9,175	11
14	12	10,74	12
15	13	12,755	13
16	14	15,28	14
17	15	18,375	15
18	16	22,1	16
19	17		17

En utilisant le tableau, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le coût de production, en euros, pour 5 montres ? pour 14 montres ?
2. Quelle est la recette, en euros, pour 12 montres ?
3. Combien fabrique-t-on de montres avec 6215 € ?

4. On a entré dans la cellule B2 la formule : $\boxed{\text{= 0.01*A2\^{}3 - 0.135*A2\^{}2 +0.7*A2 +4.5}}$
   que l'on a recopiée jusqu'à la cellule B19.
   À quoi correspond la valeur dans la cellule B18 ?
   Quelle valeur sera dans la cellule B19 ? A quoi correspond-t-elle ?
5. Combien peut-on fabriquer de montres en sachant que l'entreprise doit être bénéficiaire ?
   Donner la réponse sous forme d'un intervalle.

Partie 3.

La troisième semaine, Vincent se préoccupe de savoir combien il faut vendre de montres par jour pour que le bénéfice soit maximum. Cette fois-ci, le collaborateur décide de traiter le problème de façon algébrique.
Il propose de désigner par x, le nombre de montres vendues dans la journée, par $C(x)$ le coût de production de x montres et par $R(x)$ la recette pour x montres vendues. De plus, on a :

$$C(x) = 0,01x^3 - 0,135x^2 + 0,7x + 4,5 \quad \text{et} \quad R(x) = x.$$

Dans cette partie, il s'agit de répondre aux questions suivantes de façon algébrique.

1. On désigne par $B(x)$, le bénéfice réalisé par l'entreprise dans une journée.
   Montrer que $B(x) = -0,01x^3 + 0,135x^2 + 0,3x - 4,5$.
2. Calculer $B'(x)$ et montrer que $B'(x) = -0,03(x-10)(x+1)$.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,17]$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,17]$.
5. Déduire de ce qui précède, le nombre de montres qu'il faut vendre pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximum.
   Quel est ce bénéfice maximum ?

Exercice 4 (5 points).

Partie A

Sur la figure 5.3 page 58 donnée en annexe (**à rendre avec la copie**), on a tracé les droites :

- d_1 d'équation $y = 5$;
- d_2 d'équation $y = -\frac{3x}{7} + \frac{250}{21}$;
- d_3 d'équation $y = -x + 17$;
- d_4 d'équation $x = 4$.

Déterminer graphiquement, en hachurant la partie du plan qui ne convient pas, l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x & \geqslant & 4 \\ y & \geqslant & 5 \\ y & \leqslant & -x+17 \\ y & \leqslant & \frac{-3x}{7} + \frac{250}{21} \end{cases}$$

Voir la figure. Tout doit être hachuré sauf le polygone grisé.

Partie B

Les propriétaires d'un magasin situé en bord de mer souhaitent acheter des planches à voile pour les proposer à la location. Ils doivent acheter deux types de planche à voile :

- des planches, au coût unitaire de 900 €, destinées aux débutants ;
- des planches, au coût unitaire de 2 100 €, destinées aux utilisateurs confirmés.

Les contraintes sont les suivantes :

- Ils doivent avoir au moins 4 planches pour débutants et 5 planches pour utilisateurs confirmés.
- Pour des raisons de difficulté de stockage, ils ne peuvent acheter au maximum que 17 planches.
- Le budget maximum pour l'achat de l'ensemble des planches est de 25 000 €.

On note x le nombre de planches pour débutants et y le nombre de planches pour utilisateurs confirmés achetées par les propriétaires.

1. Justifier que les contraintes d'achat sont caractérisées par le système de la partie A avec x et y entiers.

   - x et y doivent être des entiers naturels car il s'agit de nombre de planches ;
   - Ils doivent avoir au moins 4 planches pour débutants donc $x \geqslant 4$;
   - Ils doivent avoir au moins au moins 5 planches pour utilisateurs confirmés donc $y \geqslant 5$;
   - Ils ne peuvent acheter au maximum que 17 planches, or le nombre de planches est $x + y$, donc $x + y \leqslant 17 \Leftrightarrow y \leqslant -x + 17$;
   - Le budget maximum est de 25 000 €, or une planche pour débutant coûte 800 € et il y en a x, et une planche pour utilisateur confirmé coûte 2 100 € et il y en a y, donc :

   $$\begin{array}{rcrcl} 900x + 2\,100y \leqslant 25\,000 & \Leftrightarrow & 2\,100y & \leqslant & -900x + 25\,000 \\ & \Leftrightarrow & y & \leqslant & \frac{-900}{2\,100}x + \frac{25\,000}{2\,100} \\ & \Leftrightarrow & y & \leqslant & \frac{-3x}{7} + \frac{250}{21} \end{array}$$

2. Le magasin peut-il acheter 6 planches pour débutants et 10 planches pour utilisateurs confirmés ?
   Justifier la réponse.

   Le point $A\,(6\,;\,10)$ (voir figure) n'est pas dans la zone des contraintes, donc le magasin ne peut pas acheter 6 planches pour débutants et 10 planches pour utilisateurs confirmés.
   Ou bien $\frac{-3\times 6}{7} + \frac{250}{21} \approx 9{,}33 < 10$ donc la contrainte $y \leqslant \frac{-3x}{7} + \frac{250}{21}$ n'est pas respectée.

3. Les planches pour débutants seront louées 15 € l'heure ; les planches pour utilisateurs confirmés seront louées 20 € l'heure.
   On suppose que toutes les planches seront louées.

   (a) Exprimer, en fonction de x et y le chiffre d'affaire horaire R du magasin.

   $R = 15x + 20y$.

   (b) Représenter sur la figure 5.3 page 58 donnée en **annexe** (à rendre avec la copie) la droite correspondant à un chiffre d'affaire horaire de 100 €.

   On trace la droite $\mathscr{D}$ d'équation $15x + 20y = 100$.

   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Les propriétaires souhaitent déterminer le couple $(x\,;\,y)$ qui fournira le chiffre d'affaire horaire maximum.
   Indiquer comment procéder, donner ce couple $(x\,;\,y)$ et le chiffre d'affaire maximum.

   Toutes les droites d'équation $R = 15x + 20y$ sont parallèles.
   Pour obtenir le chiffre d'affaire maximum, on trace la parallèle à $\mathscr{D}$ la plus haute possible avec au moins un point dans la zone des contraintes et on obtient la droite $\mathscr{D}'$.
   Le couple $(x\,;\,y)$ qui réalise le chiffre d'affaire maximum correspond au point $B\,(9\,;\,8)$.
   Il faut donc acheter 9 planches pour débutants et 8 planches pour utilisateurs confirmés.
   Le chiffre d'affaire maximum est alors de $15 \times 9 + 20 \times 8 = 295$ €.

Annexes

À rendre avec la copie.

FIGURE 5.2 – Figure de l'exercice 2

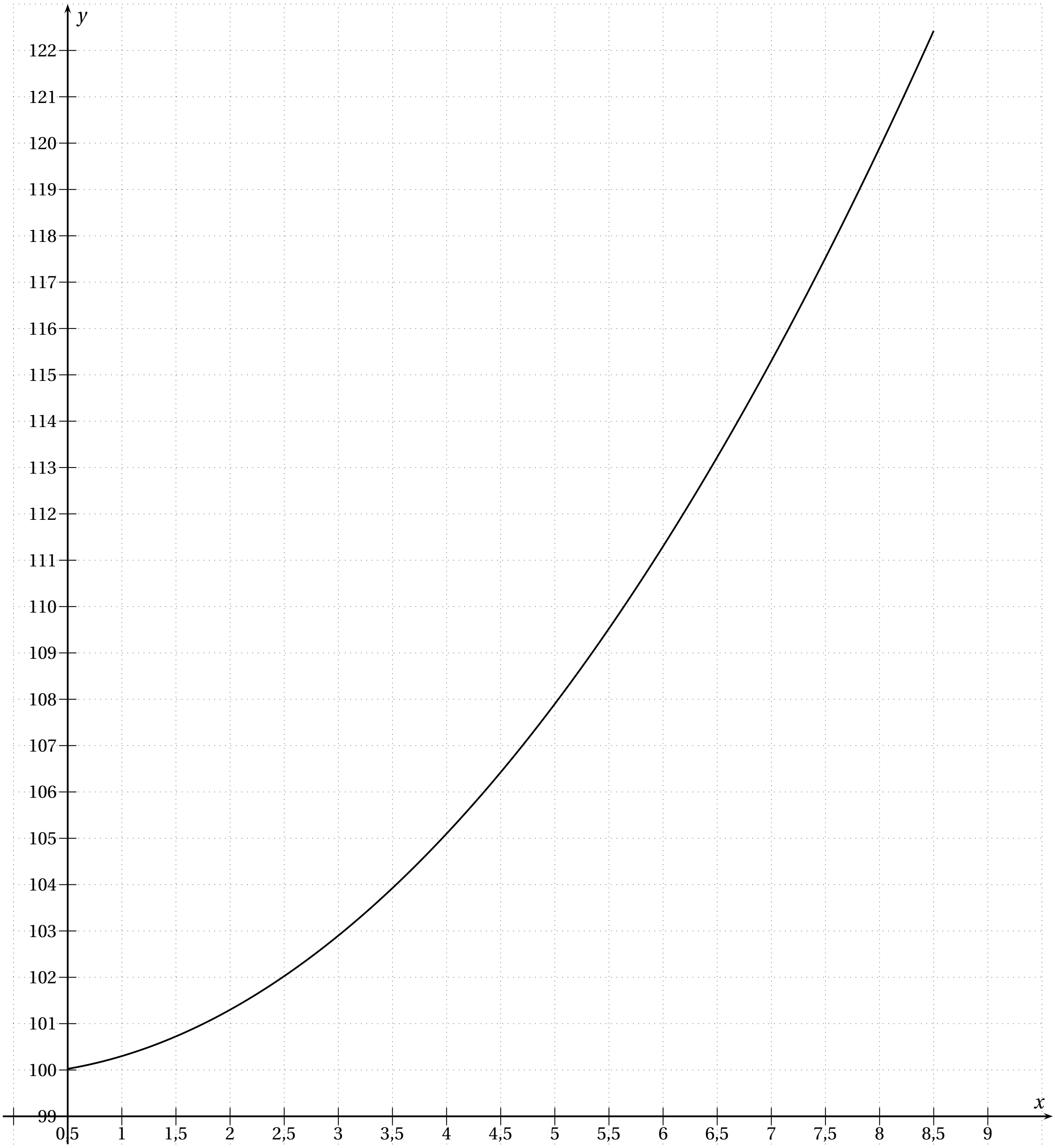
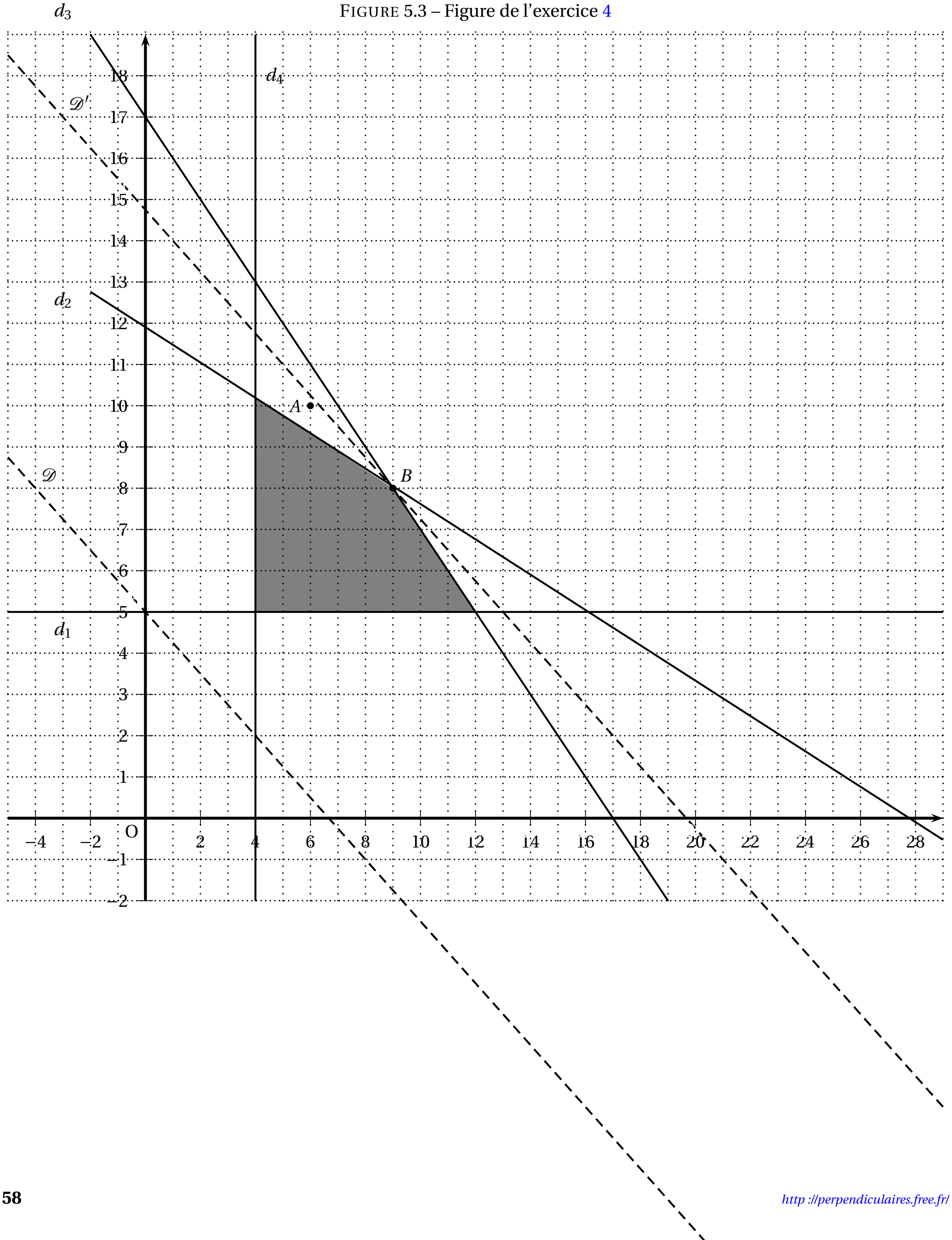


FIGURE 5.3 – Figure de l'exercice 4



Devoir surveillé n°6

Taux d'évolution

Exercice 6.1 (8 points).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte sachant qu'une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point et qu'une absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

1. Le nombre de clients de téléphonie mobile en France, le 30 septembre 2 005, était estimé à 45 000 000. 35 % d'entre eux étaient clients d'un opérateur A ; quelle est la meilleure approximation du nombre de clients de l'opérateur A ?
   ❒ 13 500 000 ❒ 16 000 000 ❒ 35 000 000 ❒ 22 500 000
2. Le prix d'une matière première a augmenté de 150 %. Il a été :
   ❒ multiplié par 1,5 ❒ multiplié par 2,5 ❒ multiplié par 1,15 ❒ multiplié par 0,85
3. Dans les cas suivants, quels sont les taux d'évolution réciproques l'un de l'autre ?
   ❒ 30 % et −30 % ❒ 25 % et −20 % ❒ 150 % et −50 % ❒ 60 % et −40 %
4. Le prix du gaz a subi deux évolutions successives : −9 % en novembre 2 003 ; +5,2 % en novembre 2 004. Globalement, le prix du gaz a évolué environ de :
   ❒ −3,8 % ❒ 4,1 % ❒ −4,3 % ❒ 4,3 %
5. Le prix d'un produit A augmente de 5,4 % la première année et augmente de 30 % la seconde année.
   (a) À l'issue de la première année, le prix du produit a été multiplié par :
   ❒ 0,946 ❒ 1,540 ❒ 1,054 ❒ 0,094
   (b) À l'issue des deux années, le prix a augmenté de :
   ❒ 16,2 % ❒ 37,02 % ❒ 24,6 % ❒ 35,4 %
   (c) Le taux d'évolution annuel moyen sur les deux années est de :
   ❒ 16,2 % ❒ 24,6 % ❒ 17,7 % ❒ 17, %
   (d) Si le produit avait augmenté de 5,4 % par an durant 6 ans, le taux d'évolution pour ces six années aurait été de :
   ❒ 32,4 % ❒ 37,1 % ❒ 38,3 % ❒ 35,4 %

Exercice 6.2 (5 points).

Un magasin de chaussures a fait 300 000 € de chiffre d'affaires pour l'année 2 001. Ce chiffre d'affaires a évolué les années suivantes selon le tableau ci-dessous. La deuxième ligne donne le taux d'évolution par rapport à l'année précédente, la troisième ligne donne le chiffre d'affaires pour l'année.

Année	2 001	2 002	2 003	2 004	2 005
Taux d'évolution		+25,0 %	+16,0 %	+12,2,%	+5,3 %
Chiffre d'affaires arrondi au millier d'euros (€)	300 000	375 000	435 000		514 000

Les résultats seront arrondis au millier d'euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires pour 2 004.
2. Quel est le taux d'évolution de l'année 2 001 à l'année 2 005 ?
3. (a) Calculer le taux d'évolution annuel moyen de l'année 2 001 à l'année 2 005 (donner la valeur arrondie à 0,1 %).
   (b) Si le taux d'évolution du chiffre d'affaires de l'année 2 006 par rapport à celui l'année 2 005 était égal à ce taux moyen, quel serait le chiffre d'affaires en 2 006 ?

Exercice 6.3 (7 points).

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du montant horaire brut du SMIC (Salaire minimum interprofessionnel de croissance) en France du 1er juillet 2 000 au 1er juillet 2 005.

	Smic horaire brut en euros
1er juillet 2 000	6,41
1er juillet 2 001	6,67
1er juillet 2 002	6,83
1er juillet 2 003	7,19
1er juillet 2 004	7,61
1er juillet 2 005	8,03

SOURCE : (INSEE : TEF 2005-2006)

1. Quel était le Smic horaire brut au 1er juillet 1 999 sachant qu'il a augmenté entre le 1er juillet 1 999 et le 1er juillet 2 000 de 3,2 % ?
2. On construit un tableau d'indices en prenant comme base 100 le 1er juillet 2 000.
   (a) Compléter l'extrait de feuille de calcul ci-dessous.
   Donner des valeurs décimales arrondies au dixième.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Date	1/07/00	1/07/01	1/07/02	1/07/03	1/07/04	1/07/05
2	Smic horaire brut	6,41	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03
3	Indices	100					125,3

   (b) Quelle formule, à recopier sur la plage D3 : G3, peut-on entrer dans la cellule C3 ?
   (c) Déterminer le taux d'évolution du Smic horaire brut entre le 1er juillet 2 000 et le 1er juillet 2 005.
3. Si la croissance relative du Smic horaire brut avait été constante entre le 1er juillet 2 000 et le 1er juillet 2 005, quel aurait été le taux d'évolution annuel moyen du Smic horaire brut pour obtenir le même niveau au 1er juillet 2 005 ?

Chapitre 6

Suites

Sommaire

6.1 Activités

Activité 6.1 (Définir une suite). 1. Compléter les listes de termes suivantes et expliquer comment on passe d'un terme au suivant :

(a) $1 ; 3 ; 5 ; 7 ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots$

(b) $0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots$

(c) $1 ; -3 ; 9 ; -27 ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots$

(d) $2 ; 3 ; 7 ; 11 ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots$

(e) $1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots$

(f) $1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11 ; 16 ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots$

2. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u(n) = 3 - 5n$.
   (a) Calculer $u(0)$; $u(1)$; $u(2)$ et $u(3)$.
   (b) Quand il s'agit d'une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$), on dit que u est une suite et on note $u(n)$ sous la forme u_n.
   Avec cette nouvelle notation, réécrire les résultats précédents.
3. Le terme général d'une suite se note souvent u_n et l'entier naturel n est appelé *indice*.
   (a) Quel est le terme qui précède u_1 ? u_{10} ? u_n ?
   (b) Quel est le terme qui suit u_1 ? u_{10} ? u_n ?
   (c) Quel est l'indice du terme situé trois rangs après u_n ? deux rangs avant u_{n+1} ?
4. A_n désigne le nombre d'habitants de la ville A en l'an $2000 + n$.
   (a) Que représente A_0 ?
   (b) Comment désigne-t-on le nombre d'habitants de la ville A en 2 010 ? en 2 017 ?
5. Le nombre d'habitants de la ville B a été recensé tous les 10 ans depuis 1 950.
   On désigne par B_n le nombre d'habitants de la ville B l'année du $n^{\text{ième}}$ recensement.
   (a) Que représente B_1 ? B_2 ?

   (b) Comment désigne-t-on le nombre d'habitants de la ville B en 2 010 ?

6. (a) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 3u_n - 4$ et $u_0 = 4$.
   Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (b) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ par : $u_n = 3u_{n-1} - 4$ et $u_0 = 4$.
   Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (c) Que remarque-t-on ?

Remarque. Vous avez pu constater qu'on retrouve la même suite dans plusieurs exemples. On pourra retenir qu'une suite peut s'écrire sous des formes différentes.

Activité 6.2 (Suite arithmétique).
On dit d'une suite qu'elle est *arithmétique*, si chaque terme est obtenu à partir du précédent en ajoutant toujours un même nombre que l'on appelle la *raison*.

1. On donne ci-dessous les premiers termes d'une suite arithmétique. Calculer les cinq suivants :
   (a) -2 ; -5 ; -8 ; (b) -10 ; -8 ; -6 ; (c) 2 ; 2,4 ; 2,8 ;

2. (a) Zoé possède un aquarium qui ne peut contenir plus de 500 poissons. Le 1er janvier, elle a trois poissons dans son aquarium. Elle ajoute cinq poissons tous les jours. Dans combien de jours son aquarium sera-t-il complet ?

   (b) Arthur a travaillé pendant les vacances. Il possède 1 000 € sur un compte en banque. Il n'ajoute plus d'argent sur son compte mais il retire 20 € toutes les semaines. Dans combien de semaines ne lui restera-t-il que 500 € ?

3. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 4$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (c) Compléter :
   $$\begin{array}{llll} & u_1 = 1 + \ldots & u_2 = \ldots + \ldots = 1 + \ldots & u_3 = \ldots + \ldots = 1 + \ldots \\ \text{donc} & u_1 = u_0 + \ldots & u_2 = u_0 + \ldots & u_3 = u_0 + \ldots \end{array}$$
   (d) En déduire : $u_{10} = u_0 + \ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$ $\quad u_n = u_0 + \ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

4. (a) On considère la suite définie par : $u_n = 2n + 5$.
      i. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
      ii. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
      iii. En déduire que la nature de la suite (u_n). On précisera le premier terme u_0 et la raison r de cette suite.

   (b) On considère la suite arithmétique définie par : $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 10$.
   Déterminer sa raison r et écrire u_n sous la forme : $u_n = u_0 + nr$.

5. Parmi les suites suivantes, indiquer celles qui sont arithmétiques et préciser leur raison.
   (a) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ (c) $u_n = 5 \times 2n$ (e) $u_n = n^2 - 1$
   (b) $u_n = 5n - 1$ (d) $u_n = 2n + 3$ (f) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

6. (a) On considère la suite (u_n) telle que : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = un + 3$.
      i. Expliquer pourquoi c'est une suite arithmétique.
      ii. Calculer :
         - u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6
         - $\frac{u_1+u_3}{2}$, $\frac{u_2+u_4}{2}$, $\frac{u_3+u_5}{2}$ et $\frac{u_4+u_6}{2}$.

   (b) Mêmes questions avec la suite (u_n) telle que $u_n = -2n + 5$

   (c) Que remarque-t-on dans les deux cas ?

Activité 6.3 (Suite géométrique).
On dit d'une suite qu'elle est *géométrique*, si chaque terme est obtenu à partir du précédent en multipliant toujours un même nombre que l'on appelle la *raison*.

1. On donne ci-dessous les premiers termes d'une suite géométrique. Calculer les cinq suivants :
   (a) 2 ; 12 ; 72 ; (b) 10 ; 5 ; $\frac{5}{2}$; (c) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$;

2. (a) Dans un jeu télévisé, un candidat répond à des questions. S'il répond correctement à la première question il gagne 10 €. S'il répond correctement à la deuxième, il gagne le double, et ainsi de suite. S'il ne répond pas correctement à une question, il perd tout.
   À combien de questions doit-il répondre juste pour gagner au moins 10 000 € ?

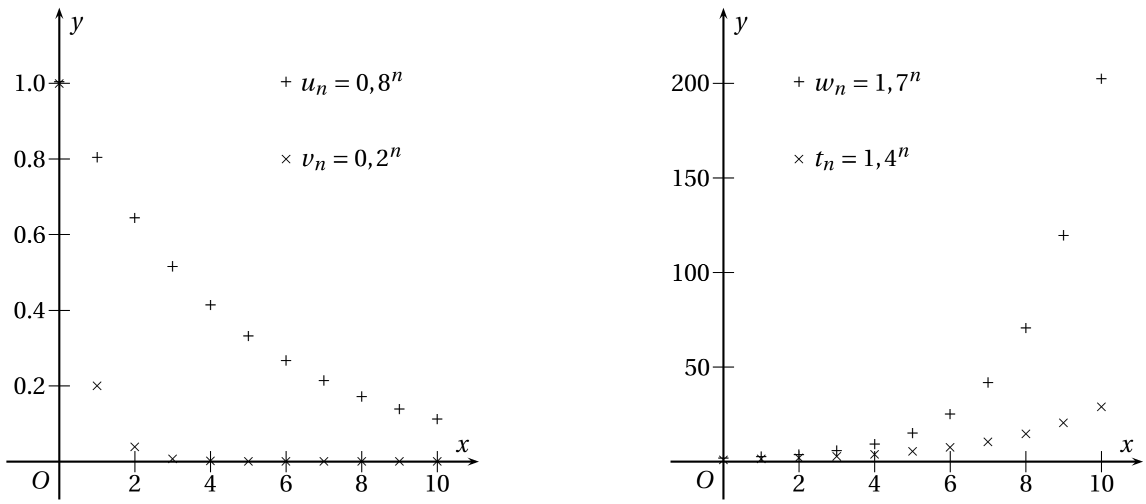
(b) Dans un laboratoire, on teste des insecticides qui détruisent tous les jours la moitié d'une population de mouches. On dispose de 1 024 mouches au départ.
Dans combien de jours restera-t-il une seule mouche ?

3. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 4$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) Calculer v_1, v_2 et v_3.
   (c) Compléter :
   $$\begin{array}{llll} & v_1 = 2\times\ldots & v_2 = \ldots\times\ldots = 2\times\ldots & v_3 = \ldots\times\ldots = 2\times\ldots \\ \text{donc} & v_1 = v_0\times\ldots & v_2 = v_0\times\ldots & v_3 = v_0\times\ldots \end{array}$$
   (d) En déduire : $v_{10} = v_0\times\ldots = \ldots\times\ldots = \ldots\ldots$ $\quad v_n = v_0\times\ldots = \ldots\ldots$
4. (a) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = 5\times 2^n$.
      i. Exprimer v_{n+1} en fonction de n.
      ii. Calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
      iii. En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison q.
   (b) On considère la suite géométrique définie par : $v_{n+1} = \frac{5}{2}v_n$ et $v_0 = 10$.
   Déterminer sa raison q et écrire v_n sous la forme : $v_n = v_0\times q^n$.
5. Parmi les suites suivantes, indiquer celles qui sont géométriques et préciser leur raison.
   (a) $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 5v_n$
   (b) $v_n = 5n$
   (c) $v_n = 5\times 2n$
   (d) $v_n = 5\times 2^n$
   (e) $v_n = 3\times 5^n - 1$
   (f) $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{5}$
6. (a) On considère la suite (v_n) telle que : $v_0 = 0{,}5$ et $v_{n+1} = 2v_n$;
      i. Expliquer pourquoi c'est une suite géométrique.
      ii. Calculer :
         - v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et v_6
         - $\sqrt{v_1v_3}$, $\sqrt{v_2v_4}$, $\sqrt{v_3v_5}$ et $\sqrt{v_4v_6}$.
   (b) Mêmes questions avec la suite (v_n) telle que $v_n = 0{,}25\times 3^n$.
   (c) Que remarque-t-on dans les deux cas ?

Activité 6.4.
On donne, sur la figure 6.1 de la présente page, la représentation graphique de quatre suites géométriques (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) dont le premier terme et la raison sont strictement positifs telles que :

- $u_n = 0{,}8^n$;
- $v_n = 0{,}2^n$;
- $w_n = 1{,}7^n$;
- $t_n = 1{,}4^n$.

FIGURE 6.1 – Figure de l'activité 6.4



En observant chacune de ces représentations graphiques :

1. Indiquer le sens de variation de ces suites.
2. Que peut-on dire des termes de chaque suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

Activité 6.5 (Somme de termes consécutifs).

Partie A : Suites arithmétiques

1. (a) Calculer : $1+2+3+4+5$ d'une part et $\frac{5\times 6}{2}$ d'autre part.
   (b) Calculer : $1+2+3+4+5+6+\ldots+12$ d'une part et $\frac{12\times 13}{2}$.
   (c) Proposer une formule permettant de calculer : $1+2+3+\ldots+(n-1)+n$.
2. On considère la suite arithmétique (u_n) telle que : $u_n = u_0 + nr$.
   (a) Exprimer en fonction de r et u_0 : u_0+u_1 ; $u_0+u_1+u_2$; $u_0+u_1+u_2+u_3$.
   (b) Vérifier que dans chacun des cas précédents, la somme obtenue est égale à :

$$\text{(nombre de termes)} \times \frac{\text{(premier terme + dernier terme)}}{2}$$

Partie B : Suites géométriques

1. (a) Calculer : $1+2+4+8+16$ d'une part et $\frac{1-2^5}{1-2}$ d'autre part.
   (b) Calculer : $1+3+9+27+81$ d'une part et $\frac{1-3^5}{1-3}$ d'autre part.
   (c) Proposer une formule permettant de calculer : $1+x^2+x^3+\ldots+x^n$.
2. On considère la suite géométrique (v_n) telle que : $v_n = v_0 + q^n$ avec $u_0 > 0$ et $q > 0$.
   (a) Exprimer en fonction de q et v_0 : v_0+v_1 ; $v_0+v_1+v_2$; $v_0+v_1+v_2+v_3$.
   (b) Vérifier que dans chacun des cas précédents, la somme obtenue est égale à :

$$\text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Partie C : Application

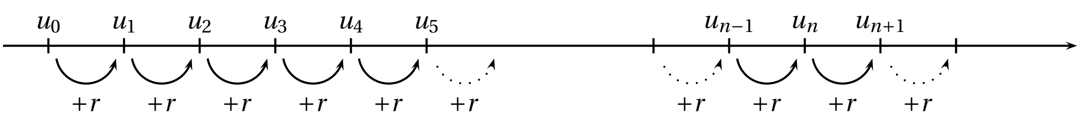
Un employé se voit proposer deux types de contrats d'embauche.
Dans le cas du contrat A, on lui propose un salaire mensuel de 1 400 € et une augmentation de annuelle de 50 €.
Dans le cas du contrat B, on lui propose un salaire mensuel de 1 350 € et une augmentation annuelle de 4 %.
Cet employé sait qu'il voudra abandonner ce travail dans quelques années, pour retrouver sa région natale.

1. S'il doit rester cinq ans dans l'entreprise, quelle somme percevra-t-il avec chacun des contrats ?
   Quel contrat doit-il choisir ?
2. Même question s'il doit rester quinze ans.

6.2 Suites arithmétiques

6.2.1 Définition

Définition 6.1. La suite (u_n) est *arithmétique*, si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un réel.
Le réel r s'appelle *raison* de la suite arithmétique.



Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de vérifier que $u_{n+1} - u_n$ est constant.
Cette constante est alors la raison r.

Exemple 6.1. La suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ est arithmétique de raison $r = \ldots$.

6.2.2 Terme général est fonction de n

Propriété 6.1. *Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 6.2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 9$ et de raison -5. Calculer u_{15}.

Remarque. Dans le cas d'une suite arithmétique (u_n), le terme u_n est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent : $u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$.

Propriété 6.2. *Si (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par le terme général $u_n = an+b$, avec a et b deux réels, alors (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = \ldots\ldots$ et de raison $r = \ldots\ldots$.*

Exemple 6.3. La suite (v_n) définie par : $v_n = 2n-5$ est arithmétique de premier terme $v_0 = \ldots\ldots$ et de raison $r = \ldots\ldots$.

6.2.3 Représentation graphique

Exemple 6.4. On considère la suite (u_n) arithmétique définie par : $u_0 = 0,5$ et $r = 0,7$.

1. Calculer les termes u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. (a) Placer dans un repère les points M_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
   (b) Que constate-t-on ?

Propriété 6.3. *La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés.*

6.2.4 Sens de variation

Propriété 6.4. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*
- *Si $r > 0$, alors (u_n) est ....*
- *Si $r < 0$, alors (u_n) est ....*
- *Si $r = 0$, alors (u_n) est ....*

Exemple 6.5. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = -5n+7$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ldots\ldots$.
Donc la suite (u_n) est ....

6.2.5 Limite

Propriété 6.5. *Soit la suite arithmétique (u_n) telle que : $u_n = u_0 + n \times r$.*
- *Si $r < 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$
- *Si $r > 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$

Exemple 6.6. On considère la suite (u_n) telle que : $u_n = 4n-7$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ldots\ldots$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$.

6.2.6 Somme des termes

Propriété 6.6. *Soit s_n la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r, alors on a :*

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}$$

Exemple 6.7. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2n-3$. $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

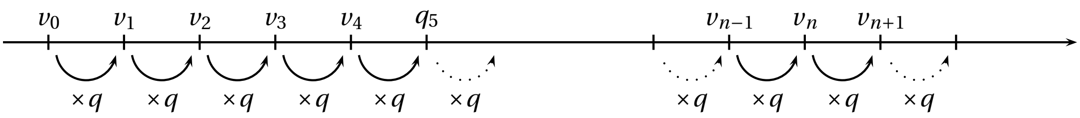
Remarque. La somme s des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

$$s = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

6.3 Suites géométriques

6.3.1 Définition

Définition 6.2. La suite (v_n) est *géométrique*, si pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = q \times v_n$, où q est un réel non nul.
Le réel q s'appelle *raison* de la suite géométrique.



Remarque. Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, il suffit de vérifier que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant. Cette constante est la raison q.

Exemple 6.8. Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison $q = \ldots\ldots.$

6.3.2 Terme général en fonction de n

Propriété 6.7. *Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors pour tout entier naturel n, on a :*

$$v_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 6.9. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 9$ et de raison 3. Calculer v_5.

Remarque. Dans le cas d'une suite géométrique (v_n), le terme v_n est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent : $v_n = \sqrt{v_{n-1} \times v_{n+1}}$.

Propriété 6.8. *Si (v_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par le terme général $v_n = a \times b^n$, avec a et b deux réels, alors (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \ldots\ldots$ et de raison $q = \ldots\ldots.$*

Exemple 6.10. La suite (v_n) définie par : $v_n = 5 \times 2^n$ est géométrique de raison $q = \ldots\ldots.$

6.3.3 Représentation graphique

Exemple 6.11. On considère la suite géométrique (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et la raison $q = 0,5$.

1. Calculer les termes v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.
2. (a) Placer dans un repère les points M_n de coordonnées $(n\,;\, v_n)$.
   Unités graphiques : 1 cm pour une unité en abscisses et 4 cm pour une unité en ordonnées.

   (b) Que constate-t-on ?

La représentation graphique d'une suite géométrique (v_n) est constituée de points situés sur une courbe qui n'a pas été étudiée en seconde ni en première.

6.3.4 Sens de variation

Propriété 6.9. *Soit la suite géométrique (v_n) telle que : $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 > 0$ et $q > 0$.*
- *Si $0 < q < 1$, alors la suite (v_n) ....*
- *Si $q = 1$, alors la suite (v_n) est ....*
- *Si $q > 1$, alors la suite (v_n) est ....*

Exemple 6.12. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 3 \times 0,8^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

6.3.5 Limite

Propriété 6.10. *Soit la suite géométrique (v_n) telle que : $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 > 0$ et $q > 0$.*
- *Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots\ldots$*
- *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots\ldots$*

Exemple 6.13. On considère la suite (v_n) telle que : $v_n = 4 \times 0,7^n$.
(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \ldots\ldots$ et de raison $q = \ldots\ldots.$
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots\ldots.$

6.3.6 Somme des termes

Propriété 6.11. *Soit s_n la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q $(\neq 1)$, alors on a :*

$$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \frac{v_0 - v_{n+1}}{1-q} = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple 6.14. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme 5 et de raison 3.

$$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. La somme s des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par la formule :

$$s = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Devoir surveillé n°7

Suites numériques

Exercice 7.1 (4 points).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte sachant qu'une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse ou une absence de réponse n'apportent ni n'enlèvent de point.

1. On place un capital de 1 000 euros à 3 % par an avec **intérêts simples**. Au bout de 10 ans le capital disponible est égal à :
   ❒ 1 030 € ❒ 1 344 € ❒ 1 300 € ❒ 3 000 €
2. La population d'une ville diminue de 2 % par an. Sa population aura diminué de moitié dans :
   ❒ 15 ans ❒ 20 ans ❒ 25 ans ❒ 35 ans
3. Un taux mensuel de 0,33 % avec **intérêts composés** est équivalent à un taux annuel de :
   ❒ 4,03 % ❒ 3,96 % ❒ 3,88 % ❒ 4,33 %
4. La valeur actuelle d'un capital de 2 500 euros dans 5 ans à **intérêts composés** au taux annuel de 4,5 % est :
   ❒ 1 938 € ❒ 2 006 € ❒ 2 150 € ❒ 3 115 €

Exercice 7.2 (7 points).

On s'intéresse à l'évolution de la population d'une ville V et on veut étudier plusieurs modèles d'évolution. En 2 005, la population de la ville V est estimée à 10 000 habitants.

1. Première hypothèse de croissance
   En analysant l'évolution récente, on fait d'abord comme hypothèse que la population de la ville va augmenter de 500 habitants par an. On note $u_0 = 10000$ la population en 2 005, et u_n la population en $(2005 + n)$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En quelle année la population atteindra-t-elle 20 000 habitants ?
2. Deuxième hypothèse de croissance
   On travaille avec l'hypothèse d'une augmentation de 4,5 % par an. On note v_n la population en $(2005 + n)$. Nous avons alors $v_0 = 10000$.
   (a) Quelle sera alors la population de la ville en 2 006 ? en 2 007 ?
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Calculer la population de la ville en 2 020.
   (d) En examinant l'évolution de villes comparables, des experts ont estimé que la population de la ville V considérée allait doubler en 15 ans. Le résultat trouvé en 2c vous paraît-il correspondre à ce que pensaient les experts ?

Exercice 7.3 (9 points).

Le 01/01/2 006, un nouvel employé dans une entreprise se voit proposer deux formules pour l'évolution de son **salaire mensuel** : dans la formule A, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 20 euros ; dans la formule B, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 1,5 %. Son salaire mensuel initial durant l'année 2 006 est de 1 300 euros.
On note u_n le **salaire annuel** selon la formule A durant l'année $2006+n$ et v_n le **salaire annuel** selon la formule B durant l'année $2006 + n$

1. Expliquer pourquoi, en 2 006, on a : $u_0 = v_0 = 15600$.
2. Expliquer pourquoi, en 2 007, on a : $u_1 = 15840$; $v_1 = 15834$.
3. Donner, en justifiant la réponse, la nature des deux suites étudiées. Préciser la raison pour chacune de ces deux suites.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
5. Calculer et comparer les deux formules en 2016 puis en 2026 (arrondir les résultats au centime d'euro).
6. Cet employé partira à la retraite au bout de 42 années complètes de travail dans cette entreprise. Il décide de calculer combien il aurait gagné d'argent dans toute sa carrière.
   On appelle S_n et T_n les sommes des termes des deux suites étudiées définies par :
   $$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$
   Calculer combien l'employé aurait gagné dans toute sa carrière selon chacune des formules A et B.

Chapitre 7

Exposants réels

Sommaire

7.1 Activités

Activité 7.1.
Donner à l'aide d'une calculatrice la valeur arrondie au millième des nombres suivants :

1. $2^{1,2} \approx \ldots\ldots$
2. $3^{6,4} \approx \ldots\ldots$
3. $1,05^{\frac{1}{12}} \approx \ldots\ldots$
4. $0,92^{\frac{5}{4}} \approx \ldots\ldots$
5. $5^{\sqrt{2}} \approx \ldots\ldots$
6. $8^{-1,5} \approx \ldots\ldots$

Activité 7.2. 1. Compléter à l'aide d'une calculatrice :

(a) $2^{1,3} \times 2^{0,7} = \ldots\ldots$ et $2^{1,3+0,7} = \ldots\ldots$

(b) $0,5^{0,2} \times 0,5^{0,8} = \ldots\ldots$ et $0,5^{0,2+0,8} = \ldots\ldots$

2. Proposer une formule permettant de calculer $a^x a^y$ avec x et y réels.

Activité 7.3. 1. Compléter à l'aide d'une calculatrice :

(a) $1,02^{-1,5} \approx \ldots\ldots$ et $\frac{1}{1,02^{1,5}} \approx \ldots\ldots$

(b) $0,5^{-2,3} \approx \ldots\ldots$ et $\frac{1}{0,5^{2,3}} \approx \ldots\ldots$

2. Proposer une formule permettant de calculer a^{-x} avec x réel.

Activité 7.4. 1. Compléter à l'aide d'une calculatrice :

(a) $(1,02^{1,5})^4 \approx \ldots\ldots$ et $1,02^6 \approx \ldots\ldots$

(b) $(12,54^{0,5})^{1,2} \approx \ldots\ldots$ et $12,54^{0,6} \approx \ldots\ldots$

2. Proposer une formule proposant de calculer $(a^x)^y$ avec x et y réels puis simplifier $(a^x)^{\frac{1}{x}}$.

Activité 7.5.
On cherche a tel que $a^{1,3} = 1,25$.
Compléter à l'aide d'une calculatrice : $(a^{1,3})^{\frac{1}{1,3}} = 1,25^{\ldots\ldots}$ donc $a = 1,25^{\ldots\ldots}$ ce qui donne $a \approx \ldots\ldots$.

7.2 Calculs sur les puissances

7.2.1 Règles de calcul

Propriété 7.1. *Pour tous nombres réels strictement positifs a, b et pour tous réels x et y, on a :*

- $a^x \times a^y = \dots\dots\dots$
- $\frac{a^x}{a^y} = \dots\dots\dots$
- $(a^x)^y = \dots\dots\dots$
- $(a \times b)^x = \dots\dots\dots$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \dots\dots\dots$

Exemples 7.1. Simplifier au maximum en utilisant les règles de calculs sur les puissances :

- $3^{0,2} \times 3^5 = \dots\dots\dots$
- $10^4 \times 10^{-1,2} = \dots\dots\dots$
- $x^{0,5} \times x^{-3} = \dots\dots\dots$
- $\frac{2^4}{2^5} = \dots\dots\dots$
- $\frac{y^4}{y^{-0,1}} = \dots\dots\dots$
- $(5^2)^{1,3} = \dots\dots\dots$
- $(z^2)^{-3} = \dots\dots\dots$
- $(5a)^2 = \dots\dots\dots$
- $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \dots\dots\dots$
- $\left(\frac{t}{8}\right)^4 = \dots\dots\dots$

Propriété 7.2. *Pour tout réel strictement positif a et tout réel x, on a :* $(a^x)^{\frac{1}{x}} = \dots\dots\dots$

Exemple 7.2. $\left(2^{\frac{1}{0,2}}\right)^{0,2} = \dots\dots\dots$

7.2.2 Résoudre une équation

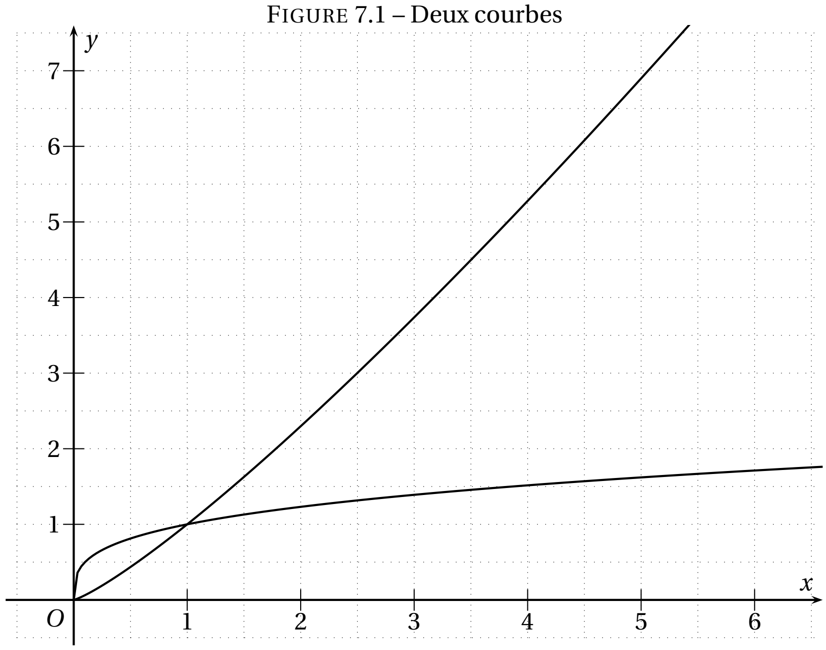
Propriété 7.3. *Pour tout réel x positif et tout réel y, on a :*

- *Si* $x^y = a$, *alors* $x = \dots\dots\dots$
- *Si* $x = a^{\frac{1}{y}}$, *alors* $x^y = \dots\dots\dots$

Exemple 7.3. On donne sur la figure 7.1 de la présente page les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^{1,2}$ et $g(x) = x^{0,3}$.

1. Reconnaître les courbes représentant la fonction f et la fonction g. et donner leur équation.
2. (a) Résoudre graphiquement l'équation : $x^{1,2} = 5$.
   (b) Retrouver le résultat par le calcul et donner la valeur arrondie de la solution à 0,01 près.
3. (a) Résoudre graphiquement l'équation : $g(x) = 1,5$.
   (b) Trouver la valeur exacte du réel x tel que : $g(x) = 1,5$, puis en donner la valeur arrondie au millième.

FIGURE 7.1 – Deux courbes



7.3 Applications

7.3.1 Taux de variations

Intérêts composés

On a placé un capital de 1 000 € à un taux annuel t à intérêts composés sur une période de 3,5 ans. A l'issue de cette période, le nouveau capital est 1 186,21 €. Déterminer le taux annuel.

Taux moyen

Un prix augmente de 4 % en janvier, de 2 % en février et de 3 % en mars. Calculer le taux moyen t d'augmentation mensuel sur cette période de trois mois (*donner la valeur arrondie à 0,001 près*).

Placement

Luc place 1 500 € le 1er janvier 2 006 à un taux annuel de 3 %. Il effectue le calcul suivant : $1500 \times 1,03^{\frac{1}{4}}$.

1. Quel résultat trouve-t-il ?
2. À quoi correspond ce calcul ?

7.3.2 Suites géométriques

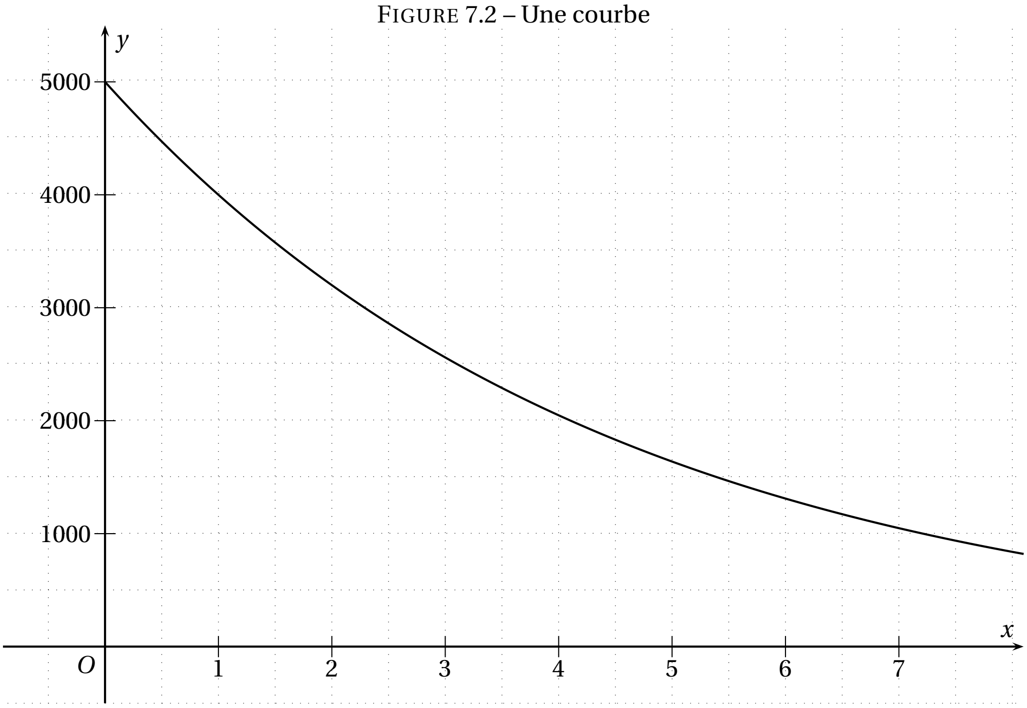
On considère la suite géométrique (u_n) de raison q, de premier terme $u_0 = 2$, telle que : $u_5 = 4$. Calculer la valeur arrondie à 0,001 près de q.

7.3.3 Modelisation

On donne sur la figure 7.2 de la présente page la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 5000 \times 0,8^x$.

1. (a) Expliquer pourquoi cette fonction modélise la valeur d'une machine dont le prix diminue de 20 % tous les ans.
   (b) Quel est le prix initial de cette machine ?
2. À l'aide du graphique, indiquer :
   (a) le moment où la machine ne vaut plus que 2 000 € ;
   (b) le moment où la valeur de la machine a diminué de 75 %.
   (c) Retrouver ces résultats avec la calculatrice.

FIGURE 7.2 – Une courbe



Annexe A

Statistiques : Rappels de Seconde et de Première

Sommaire

A.1 Vocabulaire

Définition A.1. Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :

- Population : C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique (même s'il s'agit d'objets), si elle est trop grande, on s'intéresse à un échantillon de cette population ;
- Individu : C'est un élément de la population ;
- Caractère : C'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- La série statistique est dite *quantitative* quand le caractère observé est mesurable (nombre de frères et soeurs, dimensions d'une pièce) et *qualitative* sinon (candidat pour lequel un individu à l'intention de voter) ;
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les valeurs pouvant être prises par le caractère sont limitées à un ensemble fini de valeurs (le nombre de frères et soeurs ne peut être qu'un élément de l'ensemble $\{0 ; 1 ; \dots ; 10\}$) et *continue* si le caractère étudié peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle (les dimensions d'une pièce).

Définition A.2 (effectif, fréquence, classe).

- Effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère revient dans la série ;
- Fréquence d'une valeur : C'est l'effectif de la valeur divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1. Elle est parfois exprimée en pourcentage.
- Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de données de la série appartenant à cet intervalle.

A.2 Mesures centrales

Les valeurs centrales visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série. Tout résumé met en évidence certaines caractéristiques de la série mais engendre une *perte d'information*, toutes les données n'étant plus accessibles.

A.2.1 Mode

Définition A.3. Le *mode* d'une série statistique est la donnée la plus fréquente de la série.

Remarques.
- S'il y a plusieurs données arrivant à égalité, il y a plusieurs modes.
- Si les données sont rangées en classe, on parle de *classe modale*.
- Le mode est défini aussi bien pour les séries quantitatives que qualitatives.

Le mode est un résumé sommaire d'une série qui fournit un type d'information assez limité. Il pourra intéresser un publicitaire.

A.2.2 Moyenne arithmétique

Définition A.4 (Moyenne arithmétique)**.** La *moyenne* arithmétique d'une série statistique quantitative est le nombre $\overline{x}$ tel que la somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$

Propriété A.1. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$. Alors la moyenne de S, notée $\overline{x}$, est $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$*

La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.

A.2.3 Médiane

Définition A.5 (Médiane)**.** On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre m tel que :
- la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à m
- la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à m

Remarques.
- On admettra qu'un tel nombre existe toujours.
- Plusieurs valeurs peuvent parfois convenir pour la médiane.
- La médiane partage la série en deux sous-séries ayant *quasiment* le même effectif ; *quasiment* car si plusieurs valeurs de la série sont égales à la médiane, les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane ne seront pas forcément en nombre égal.
- Il faut comprendre la médiane comme « la valeur du milieu ».

Propriété A.2. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Alors la donnée de rang $E(\frac{1}{2}n) + 1$ convient toujours comme médiane.*

Remarque. $E(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire, pour un nombre positif, le nombre sans sa partie décimale.

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

A.3 Mesures de dispersion

Les mesures de dispersion visent à donner des indications sur la manière dont sont réparties les données par rapport aux valeurs centrales.

A.3.1 Valeurs extrêmes et étendue

Définition A.6. Les valeurs extrêmes d'une série sont ses valeurs minimale et maximale et l'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.

A.3.2 Quartiles et déciles

La valeur centrale médiane est le plus souvent associée aux quartiles et aux déciles.

Définition A.7. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3

De la même manière qu'on a défini les quartiles, on peut définir les *déciles* : ce sont les 9 nombres qui partagent la série en dixièmes (comme les trois quartiles partagent la série en quarts).

On s'intéressera à deux d'entre eux :

Définition A.8. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier décile*, noté D_1, tout réel tel que
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_1
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_1
- On appelle *neuvième décile*, noté D_9, tout réel tel que
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_9
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_9

Définition A.9. Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. On appelle
- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1\,;\,Q_3]$.
- *écart interdécile* la différence $D_9 - D_1$;
- *intervalle interdécile* l'intervalle $[D_1\,;\,D_9]$.

Remarque. Toutes ces mesures statistiques sont dans la même unité que les valeurs de la série.

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.

Heureusement, une formule permet de trouver une valeur convenable dans tous les cas :

Théorème A.3. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.
- *La donnée de rang* $E\left(\frac{1}{10}n\right)+1$ *convient toujours comme premier décile.*
- *La donnée de rang* $E\left(\frac{1}{4}n\right)+1$ *convient toujours comme premier quartile.*
- *La donnée de rang* $E\left(\frac{3}{4}n\right)+1$ *convient toujours comme troisième quartile.*
- *La donnée de rang* $E\left(\frac{9}{10}n\right)+1$ *convient toujours comme neuvième décile.*

Exemple A.1. S'il y a $n = 29$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
- $E\left(\frac{1}{10}\times 29\right)+1 = E(2,9)+1 = 2+1 = 3$ donc la troisième donnée de la série convient comme premier décile ;
- $E\left(\frac{1}{4}\times 29\right)+1 = E(7,25)+1 = 7+1 = 8$ donc la huitième donnée de la série convient comme premier quartile ;
- $E\left(\frac{1}{2}\times 29\right)+1 = E(14,5)+1 = 14+1 = 15$ donc la quinzième donnée de la série convient comme médiane ;
- $E\left(\frac{3}{4}\times 29\right)+1 = E(21,75)+1 = 21+1 = 22$ donc la vingt-deuxième donnée de la série convient comme troisième quartile ;
- $E\left(\frac{9}{10}\times 29\right)+1 = E(26,1)+1 = 26+1 = 27$ donc la vingt-septième donnée de la série convient comme neuvième décile quartile.

A.3.3 Variance et écart-type

La valeur centrale moyenne est le plus souvent associée à l'écart-type.

Définition A.10. Soit S une série statistique quantitative comportant N données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$.
On appelle :
- *variance* de S, notée V, le nombre

$$V = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \dots + \left(x_N - \overline{x}\right)^2}{N}$$

- *écart-type* de S, noté s, le nombre $s = \sqrt{V}$.

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Elle n'est pas très parlante car elle s'exprime dans le carré de l'unité du caractère.

L'écart-type a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que le caractère.

L'écart-type permet de comparer la dispersion de deux séries, quand l'ordre de grandeur des données des deux séries est le même. Contrairement à l'écart interquartile, il tient compte de l'ensemble de la population.

On dispose d'une formule plus pratique pour calculer la variance :

Théorème A.4. *Soit S une série statistique quantitative comportant N données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$. *Alors on a :*

$$V = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N}\right) - \overline{x}^2$$