Les mathématiques à l'école :
pour une révolution épistémologique et didactique

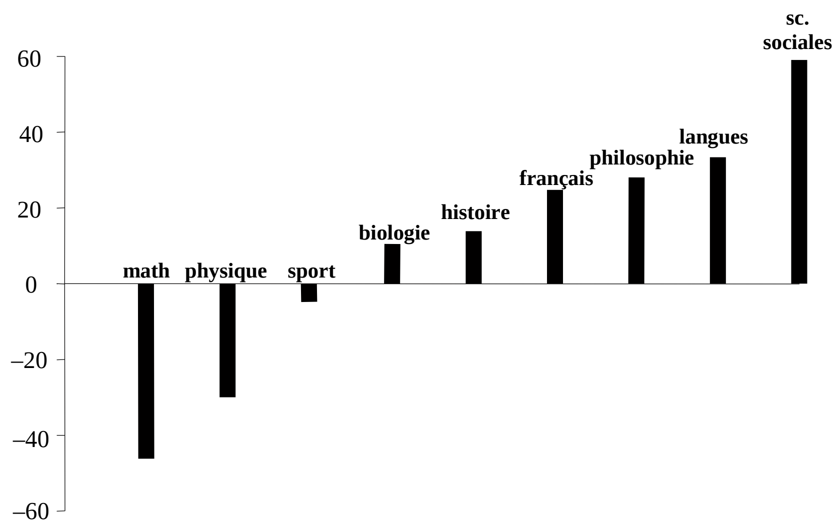
par Yves Chevallard

> Parce qu'il prend terriblement au sérieux l'utopie
> et sa réalisation, il n'est pas un utopiste,
> mais il regarde la réalité en face, telle qu'elle est,
> pour ne pas se laisser abêtir par elle.
>
> Theodor W. Adorno (1946)

1. Le discrédit des mathématiques

Il est deux manières au moins, pour les générations montantes, de recevoir les connaissances que l'école est chargée de leur transmettre : soit comme donnant une clé du monde précieuse entre toutes, soit comme un prix à payer pour entrer dans la société, avant peut-être de faire litière des savoirs que l'école aura prétendu leur apporter. Ces credo opposés sont de toujours sans doute ; mais l'un ou l'autre domine. Voici donc le problème que je souhaite aborder ici : sous quelles conditions les générations montantes peuvent-elles être amenées à croire non pas tant en l'école elle-même qu'en ces connaissances et savoirs qu'on souhaite y transmettre ?

Le crédit accordé aux savoirs enseignés varie, à un moment donné, selon les savoirs. En particulier, tous les savoirs inscrits au répertoire de l'école ne pâtissent pas en même temps du même discrédit. L'analyse effectuée par une équipe de sociologues coordonnée par Roger Establet sur les résultats de la consultation nationale sur le thème « Quels savoirs enseigner au lycée ? » est à cet égard instructive ; voici un graphique montrant les « différences entre les citations positives et les citations négatives » à propos des principales disciplines enseignées dans les voies générales et technologiques [1].



Là où les sciences sociales reçoivent 78 % de citations positives et 22 % de citations négatives (la différence est donc de + 56 points), les mathématiques sont citées positivement dans 27 % des cas, négativement dans 73 % : la différence est négative, égale à – 46 points. Plus

[1] Roger Establet, Jean-Luc Fauguet, Georges Felouzis, Sylviane Feuilladieu, Pierre Vergès, *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée* (ESF, Paris, 2005), p. 65.

largement, l'observation de la société porte à penser que tout se passe comme si, *culturellement* (mais non bien sûr *réellement*), *les savoirs mathématiques ne comptaient guère aujourd'hui !*

2. Concepts en déshérence : l'exemple de la proportionnalité

Le comte Pietro Verri (1728-1797), aristocrate milanais, homme des Lumières, épris d'action autant que de réflexion, fait paraître en 1771 un maître ouvrage d'économie politique qui en fait un précurseur de la révolution marginaliste. Lorsqu'il lit cet opus, Condorcet (1743-1794) prend sa plume et adresse à l'auteur l'observation que voici :

> Pardonnez, Monsieur, si un géomètre a osé vous faire une observation sur un endroit de votre livre où vous employez le langage de la géométrie. Vous dites que le prix est en raison inverse du nombre des vendeurs, et en raison directe de celui des acheteurs. Je sais bien que le prix augmente quand le nombre des acheteurs augmente, et qu'il diminue quand celui des vendeurs s'accroît ; mais est-ce le même rapport ? C'est ce que je ne crois pas. Ainsi le langage géométrique dans ce cas, et dans tous les autres de cette espèce, bien loin de conduire à des idées plus précises, me semble induire en erreur ; on se dit que l'auteur se serait contenté du langage ordinaire, s'il n'avait pas entendu parler d'une proposition rigoureusement exacte.

Je traduis : il n'existe pas que deux types de relation fonctionnelle entre deux grandeurs x et y, à savoir la *proportionnalité* (directe) et l'*inverse* proportionnalité. En vérité, pendant des siècles, pour qui n'a qu'une première teinture de mathématiques – celle que donne l'enseignement « primaire » –, toute relation fonctionnelle entre deux grandeurs x et y est censée être de proportionnalité directe ou inverse, en sorte qu'il suffit de distinguer un cas de l'autre en se demandant si, lorsque x croît, y croît ou, au contraire, décroît. Où en est-on aujourd'hui ? Au hasard de lectures personnelles, j'ouvre un livre récemment paru, au demeurant fort éclairant sur la triste exploitation politicienne du débat sur l'enseignement de la lecture à l'école, et je tombe sur ce passage [2] :

> « Même si l'on ne grignote que quelques points, en passant de 15 % à 11 % des élèves en difficulté à l'entrée en sixième, ce sera toujours ça de gagné », affirme sans l'ombre d'un complexe un conseiller ministériel qui donne l'impression qu'il s'agit de compter des mètres cubes dans un espace de stockage. Le gain espéré d'électeurs serait-il inversement proportionnel à la réduction du nombre d'élèves en difficulté ?

Bien entendu, ce que peut espérer ce conseiller du ministre, c'est que le gain d'électeurs soit *proportionnel* à la réduction du nombre d'élèves en difficulté ; que, lorsque cette réduction est de 4 %, ce gain soit deux fois supérieur à celui que vaudrait à son patron une réduction de 2 %, etc. Ici, « inversement proportionnel » n'est rien d'autre, semble-t-il, qu'un superlatif : introduire l'adverbe « inversement », c'est user d'une formulation *plus épicée*, davantage susceptible de frapper l'imagination du lecteur, faute de s'adresser à sa raison. *Les mathématiques ne comptent pas*. Elles fournissent de rares images frelatées, tel ce « plus grand dénominateur commun » qu'évoquent de loin en loin quelques journalistes. Il y a longtemps, il est vrai, que l'inverse proportionnalité n'est plus un objet d'étude officiel de la scolarité obligatoire à la française. Voici un autre exemple que, sous le titre *La cerise sur le ghetto*, un hebdomadaire satirique bien connu rapporte involontairement [3] :

> Comment en finir avec les collèges-ghettos, points noirs de la carte scolaire ? Sarkozy veut en raser une bonne partie, et Xavier Darcos (UMP) cite l'exemple d'un établissement, démoli à Bergerac, et dont les élèves ont réintégré avec succès les autres collèges de la ville. Moins radicale, la principale d'un

---

[2] Laure Dumont, *Globale ou b.a.-ba ? Que cache la guerre des méthodes d'apprentissage de la lecture ?* (Robert Laffont, Paris, 2006), p. 63.
[3] *Le Canard enchaîné*, mercredi 13 septembre 2006, p. 3.

> établissement du nord de la France a réclamé un nouveau découpage de son secteur, qui réduirait ses effectifs. *« Une solution rarement suggérée par mes collègues,* dit-elle en souriant, *car notre traitement est proportionnel au nombre d'élèves ! »*

Un traitement proportionnel au nombre d'élèves ? Ce que veut signifier cette principale, c'est sans doute que le traitement qu'elle perçoit est une fonction *croissante* du nombre d'élèves de l'établissement : nous voilà ramenés au comte Verri ! Penser que j'insiste ici sur un distinguo inessentiel, que tout cela « n'est pas si important », c'est, selon moi, accepter en douce que les professeurs de mathématiques s'échinent aujourd'hui – en classe de seconde – à faire entendre les principales notions concernant les fonctions sans que leur effort recommencé année après année ait le *moindre effet* sur l'appréhension *commune* du monde social ! À mes yeux, réagir ainsi montre simplement que ce mal qui, à bas bruit, étend son emprise sur l'école depuis tant d'années, je veux dire *l'incrédulité et l'indifférence épistémologiques*, ne touche pas que les élèves ! Et je ne peux voir en cette réaction que l'expression subtile d'un renoncement que nous n'avons pas fini de payer. Je m'y arrête un instant, toujours à propos de la proportionnalité.

Depuis des années, la proportionnalité fait l'objet, au collège, d'un enseignement *à outrance*, jusqu'à ce que mort scolaire s'ensuive, si l'on peut dire. Inutile de préciser à nouveau que la réception dans la culture générale française des contenus de savoir ainsi promus de façon obsédante n'est pas à la hauteur des efforts consentis par l'école. En vérité, il y a longtemps que ces efforts sont promis à un échec certain : car ce qui s'enseigne sous le nom de proportionnalité a été détaché de l'ensemble des usages qui en faisaient autrefois le sel en rendant la notion *socialement désirable*. Voici un tableau de valeurs relatif à deux grandeurs liées entre elles par une relation qu'on supposera fonctionnelle.

x	2	3,6	5,1	6,7	7,5
y	2,4	4,3	6,1	8	9

Au collège, dans la plupart des classes, la question qu'on va aujourd'hui se poser est : « Est-ce là un “tableau de proportionnalité” ? » Ayant observé qu'on a $\frac{2{,}4}{2} = 1{,}2$ mais que $\frac{4{,}3}{3{,}6} = 1{,}19444\ldots$, on conclura, impavides, que ce tableau « *n'est pas* de proportionnalité », avant de passer à un autre tableau, qui, à son tour, *sera* ou *ne sera pas* de proportionnalité. *Voilà comment on tue un savoir*. Car, bien entendu, la bonne question à poser est celle-ci : peut-on raisonnablement *modéliser* la relation entre x et y par une relation de proportionnalité, et si oui, laquelle ? La réponse à la première question est ici positive (et non pas négative), et l'on peut alors *choisir* d'écrire que l'on a $y \approx 1{,}2\,x$, du moins dans la zone que couvre le tableau. Si l'on voulait compléter ce tableau – qu'on peut supposer d'origine expérimentale – en essayant de prédire ce que vaudrait y si x valait 5,8, on calculerait $1{,}2 \times 5{,}8 = 6{,}96$ et on écrirait donc que, en ce cas, $y \approx 7$. L'ubiquité de la règle de trois dans la culture classique était évidemment liée à l'emploi de la proportionnalité pour construire de semblables modèles *approchés*, et cela, parfois, de façon un rien risquée. Un exemple d'aujourd'hui : si je sais que le record du monde masculin du 100 mètres plat est d'*environ* 10 secondes, tandis que celui du 200 mètres est d'*environ* 20 secondes, je peux tenter de me faire une idée de ce que peuvent être les records du monde du 60 mètres et du 400 mètres. *Selon le modèle proportionnel*, ils seront de 6 secondes pour le premier, de 40 secondes pour le deuxième. Et je compterai par exemple un peu plus – disons, 10 % de plus – pour l'un et pour l'autre si je « corrige » ce modèle en considérant le phénomène spécifique modélisé.

De tels usages de la proportionnalité étaient au cœur de l'enseignement classique. Un auteur prolifique, Théophile Moreux, écrivait avant-guerre ceci [4] :

> Les règles énoncées sont applicables toutes les fois qu'il y a proportionnalité entre des nombres ou des grandeurs. Les cas de ce genre sont nombreux surtout en Géométrie et en Physique. En voici quelques cas.
>
> • Deux rectangles de même base ont des surfaces proportionnelles à leurs hauteurs.
> • Deux circonférences sont proportionnelles à leurs diamètres et à leurs rayons.
> • Dans le mouvement régulier ou uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps, c'est-à-dire que si le temps est trois fois plus long l'espace parcouru sera trois fois plus grand.
>
> Tout ceci est exact et rigoureusement exact, mais il n'en est pas toujours de même dans la pratique. On admet en effet qu'un salaire doit être proportionnel au temps consacré par l'ouvrier à faire son travail ; et ceci est une pure convention. En fait, tout le monde sait qu'un ouvrier ne travaille pas toujours avec la même ardeur ; il y a des heures où son activité est plus grande ou plus ralentie. De même on admet que 3 ouvriers font 3 fois plus de travail qu'un seul, mais les entrepreneurs qui occupent des ouvriers n'ignorent pas cependant que pratiquement la valeur des hommes qu'ils emploient est toujours différente. On pourrait continuer longtemps sur ce thème ; ce que nous avons dit suffit pour la démonstration.

Dans les mêmes années, les auteurs d'une *Arithmétique* pour les écoles primaires supérieures, Marijon et Péquignot, soulignent ce fait qu'un modèle linéaire n'est souvent acceptable que dans une plage de valeurs déterminée des variables x et y [5] :

> Pour des charges qui ne dépassent pas 80 grammes, l'allongement du ressort est proportionnel à la charge. En désignant l'allongement par a, la charge par p, on a : $a = pk$, k étant un coefficient constant. Ce coefficient représente l'allongement correspondant à la charge de 1 gramme. Pour des charges supérieures à 80 grammes, l'allongement est plus grand que celui qui serait calculé par la formule $a = pk$. D'ailleurs pour des charges trop fortes le ressort subirait des déformations permanentes ou se briserait. Nous avons là un exemple de proportionnalité de deux grandeurs qui n'est réalisée que dans de certaines limites.

On comprend ainsi l'*utilité* de la règle de trois. On doit vider un bassin pour le nettoyer ; la hauteur de l'eau est d'environ 1,20 m. Ayant ouvert l'unique conduit qui permet de vider le bassin, on observe que, au bout d'un quart d'heure, l'eau a baissé d'à peu près 10 cm. En modélisant par un modèle linéaire la relation entre le temps t pendant lequel l'eau s'écoule et la quantité q d'eau écoulée, on peut conclure que l'on pourra revenir pour nettoyer le bassin dans environ $\frac{120-10}{10}$ quarts d'heures, soit 11 quarts d'heures ou 2 h 45 min. En décidant de ne revenir que 3 heures plus tard, on est sûr de trouver le bassin entièrement vidé.

3. Des mathématiques mixtes à la « purification épistémologique »

L'exemple précédent illustre en vérité un phénomène historique de grande ampleur et de longue durée. Partons du commencement. À partir de 1600 environ, deux ordres de savoirs mathématiques sont reconnus : d'un côté, des sciences mathématiques *pures* ; d'un autre côté, ce qu'on nommera longtemps des sciences mathématiques *mixtes*, expression qui sera supplantée au cours du XIX^e siècle par celle de mathématiques *appliquées*. Dans un article qu'il rédige pour l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751-1772), d'Alembert écrit :

> Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est

[4] *Pour comprendre l'Arithmétique*, Doin, Paris, 1931, p. 100-101.
[5] Hatier, Paris, 1928, p. 241-242.

> ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c.

L'idée à la base de la notion de mathématiques mixtes est précisée dans un autre article de l'*Encyclopédie*, où d'Alembert prend pour exemple la « catoptrique », soit l'optique des miroirs.

> Une seule observation ou expérience donne souvent toute une science. Supposez, comme on le sait par l'expérience, que les rayons de lumière se réfléchissent en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, vous aurez toute la Catoptrique [...]. Cette expérience une fois admise, la Catoptrique devient une science purement géométrique, puisqu'elle se réduit à comparer des angles et des lignes [...]. Il en est de même d'une infinité d'autres.

Le curriculum mathématique demeurera longtemps marqué par la tradition des mathématiques mixtes. Longtemps, ainsi, la *statique* a figuré au programme de mathématiques des classes terminales, avec, notamment, le thème des *machines simples* (levier, treuil, cabestan, bascule du commerce, poulies, palan, moufle, etc.), qui ne disparaîtra du programme qu'au début des années 1960. Cette tradition d'ouverture épistémologique est bien illustrée par le programme de mathématiques du 10 juillet 1925 pour les « classes de mathématiques » (c'est-à-dire pour les classes terminales scientifiques). Ce programme se divise alors en huit domaines. Les quatre premiers domaines (arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie) relèvent pour l'essentiel des mathématiques *pures*, tout en contenant certains thèmes appliqués traditionnels, relevant en particulier des mathématiques *financières* (intérêts composés, annuités, etc.). Les quatre autres domaines, « mixtes », seraient regardés aujourd'hui par nombre de professeurs de mathématiques comme étrangers à leur compétence « naturelle » : *géométrie descriptive et géométrie cotée, cinématique, statique, cosmographie*.

Ce menu très ouvert va peu à peu se réduire. Les auteurs d'un ouvrage de préparation au baccalauréat du début des années 1940 notent ainsi :

> Le programme relatif à la Géométrie Descriptive et à la Géométrie Cotée du Cours de Mathématiques Élémentaires est très restreint et prête peu aux problèmes. En fait, depuis 10 ans, le nombre de problèmes donnés sur ce sujet aux Examens est à peu près nul.

Certaines parties « mixtes » résisteront plus longuement : la cinématique survit ainsi jusqu'au milieu des années 1980. L'astronomie disparaît dans les années 1960 tout en se survivant dans les classes terminales littéraires, d'où elle ne sera chassée que par le programme de 1994. La part prise par les professeurs dans cette évolution n'est sans doute pas nulle. Car une certaine liberté de choix et de traitement des contenus leur est laissée. Dans un ancien manuel d'*Algèbre et géométrie* pour la classe de 5^{e}, Camille Lebossé et Corentin Hémery prennent ainsi soin de préciser que, aux termes du programme en vigueur, les notions d'astronomie figurant dans leur ouvrage « constituent un cadre très large et non un programme dont il s'agirait de fixer intégralement tous les chapitres ». Ils ajoutent que l'enseignement prodigué doit être adapté « au niveau des élèves, aux goûts qu'ils manifestent et aux moyens matériels dont on disposera ». Nous sommes en 1958. Hier comme aujourd'hui, ce libéralisme scolaire, qui prend la place d'un pacte d'instruction explicitement débattu, favorise les évolutions clandestines, jusqu'au jour où il faut se rendre à l'évidence : l'enseignement proposé se meurt, l'enseignement proposé est mort !

Le phénomène de purification épistémologique – c'est-à-dire l'exclusion du non-mathématique sans lequel pourtant le mathématique a tant de mal à vivre – n'est certes pas qu'un fait scolaire. Dans la sphère savante, le XIX^{e} siècle voit l'étiolement des sciences mathématiques mixtes. Les domaines que les mathématiques avaient « colonisés » depuis 1600 environ prennent peu à peu leur indépendance et deviennent des sciences autonomes, qui s'affranchissent de l'allégeance officielle aux mathématiciens. Les « mélanges » physico-mathématiques chers à d'Alembert semblent devenus instables, et leurs composants se séparent. Après 1970, non seulement le curriculum mathématique scolaire va perdre peu à peu tous ses « territoires » pour se réduire au pré carré des mathématiques « pures », mais une idéologie de la *pureté* mathématique s'installe qui traite le reste du monde et ses besoins mathématiques comme un univers d'opérette, qu'on évoque quelquefois, pour tromper l'austérité de mathématiques confinées, mais qu'on ne prend plus guère au sérieux.

4. L'immotivation des mathématiques enseignées ou la doctrine de l'art pour l'art

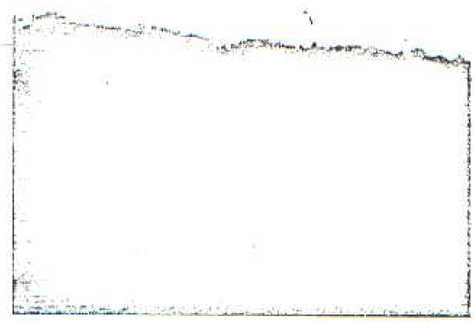
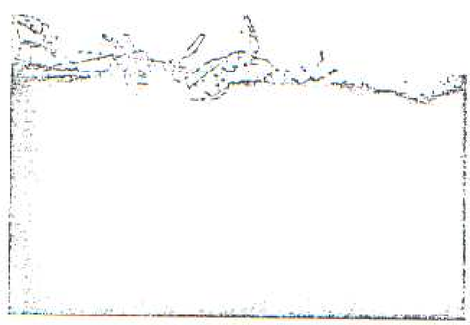
Il y a belle lurette qu'on n'étudie plus que par hasard, dans la classe de mathématiques, les usages extramathématiques autrefois les plus classiques des mathématiques étudiées. Mais un nouvel effondrement guette. Peu à peu, les usages *intramathématiques* eux-mêmes deviennent méconnus, en sorte que l'univers mathématique enseigné apparaît désormais largement *immotivé*. On touche ici au thème de l'*utilité* des savoirs, de leurs *raisons d'être*, de leur motivation, sur lequel je m'arrête maintenant. À la rentrée 1971, la réforme des mathématiques modernes touche la classe de 4^{e}. D'une façon générale, la commotion due à la réforme a fait voler en éclats l'évidence de la matière enseignée. Pourquoi ceci et non pas cela ? Pourquoi cela plutôt que *rien* ? Telles sont, je le note en passant, les questions génératrices de la théorie de la *transposition didactique*, qui va émerger dans les années suivantes [6]. Pourquoi, au collège, écrire $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ mais non, par exemple, lorsque $x \geq 0$, $x^2 - x = (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$? Pourquoi ces arrangements-là, et pas d'autres ? La réponse n'est pas évidente, même si elle est aujourd'hui relativement simple à énoncer. Pourquoi écrirait-on $x^2 - x = (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$, où $x \geq 0$? Deux réponses sont généralement possibles. Première réponse : parce que cette égalité est *utile*, dans sa spécificité même – il s'agit bien de cette égalité-là, non de l'égalité plus générale $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Parce que, donc, cette égalité *sert à quelque chose*, de l'ordre de la connaissance ou de l'action (ou des deux). Par exemple, parce qu'elle *montre* que, si $x^2 > x$, c'est-à-dire si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$, et que, si $0 < x < 1$, alors $\sqrt{x} > x$. Raison pour laquelle elle peut avoir été *produite*. Mais il est une deuxième réponse possible : parce que cette égalité serait un *vestige*, qui aurait eu autrefois une fonction, une utilité, *et qui aujourd'hui n'en a plus*.

Maintes fois, pourtant, un autre schéma encore apparaît, que l'on se doit de souligner ici : l'immotivation apparente, vécue comme telle par nombre d'élèves et même de professeurs, tient à la *séparation*, dans le temps scolaire, de la *structure* et de ses *fonctions* : séparation de *ce que c'est* et de *ce à quoi ça sert*. D'abord, on étudie abstraitement la « machine ». Plus tard, *bien trop tard* en général, on en découvrira certains usages, si on les rencontre jamais. On étudie aujourd'hui en 3^{e} l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; mais c'est en seconde qu'on aura *peut-être* à la mettre en œuvre pour établir le sens de variation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (où $x \in \mathbb{R}_+$), lequel se lit sur l'identité que voici : $x' - x'' = (\sqrt{x'} - \sqrt{x''})(\sqrt{x'} + \sqrt{x''})$. Le corpus mathématique enseigné tend ainsi à devenir une galerie d'art où les objets qui sont exposés, et

[6] Voir Yves Chevallard, *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble, 1re édition 1985 (2^{e} édition augmentée 1991).

qu'on visite sous la conduite du professeur, ressemblent fort aux « machines » de Jean Tinguely (1925-1991), lesquelles avaient le mérite d'avoir été *voulues*, ironiquement, comme des structures dénuées de fonctions. Dans l'enseignement des mathématiques contemporain, on suppose sans doute que ce qu'on étudie *a ou aura* des usages, qui en seraient des raisons d'être possibles. Mais, en bien des cas, on ne sait plus *dire* lesquels. Pourquoi par exemple la notion d'angle ? Pourquoi les triangles ? Pourquoi le concours des médianes (ou des hauteurs, etc.) ? Pourquoi les angles saillants et les angles rentrants ? Pourquoi les polynômes ? Pourquoi les fonctions continues ? Pourquoi les droites ? Pourquoi le parallélisme de droites ? À cela, nulle réponse explicite, claire, fondatrice d'un pacte d'étude républicain. Les savoirs mathématiques s'imposent aux élèves (et aux professeurs) sans que l'on rende jamais raison de leur présence dans le curriculum, ce qu'il appartiendrait pourtant à *la profession* de faire – en entendant ici par profession le vaste collectif des professeurs de mathématiques auxquels s'ajoutent formateurs, chercheurs, responsables associatifs, etc.

Pour justifier de ne pas répondre à ces questions et pour justifier – mais la chose n'est pas dite ainsi – de ne pas *savoir* y répondre, tout une idéologie s'est mise en place dans la profession, qui paraît aujourd'hui en être imprégnée profondément. Cette idéologie repose sur une très courte dogmatique. Le premier précepte en est le *dogme naturaliste* : les entités mathématiques seraient « naturelles ». Seule leur *étude* serait le fait de l'Homme ; et, si l'on enseigne les angles, ou les triangles, etc., ce serait tout simplement parce que, « dans la Nature », *il existerait* des angles, des triangles, etc. Il s'agit là, pour le dire sans détour, d'un leurre empiriste : la notion de droite, telle que nous sommes accoutumés à nous la représenter, *n'est pas* dans la Nature ; c'est nous qui l'y mettons, par un ajout souverain au « donné » naturel. Si l'on en doute, que l'on ait la curiosité d'observer au microscope le bord d'une feuille de papier du commerce, grossi par exemple 40 fois (ci-dessous, à gauche), puis 100 fois (ci-dessous à droite).

Alors que ce dogme naturaliste est présent dans l'épistémologie scolaire commune à la manière du sucre dans le café, le second précepte, le *dogme anti-utilitariste*, est souvent vociféré : on crie à l'envi haro sur l'utilité ; on dit haut et fort que les savoirs mathématiques ne sont pas des outils, ou ne sont pas *que* des outils. Qu'ils *sont*, tout court. Et que leur étude doit être dénuée de toute intention utilitaire ! Le débat serait fort long. Je l'abrège. Le mot d'utilité, le beau mot d'utilité renvoie, certes, à la doctrine de l'utilitarisme, dont il existe au demeurant des versions opposées [7], mais qui a mauvaise presse en France depuis au moins Durkheim, et que je ne fais nullement mienne. Je reprends toutefois ici une précision essentielle due à Jeremy Bentham – l'introducteur en anglais du mot *utilitarian* (1781) –, selon laquelle une action est *"conformable to the principle of utility… when the tendency it has to augment the happiness of the community is greater than any it has to diminish it"*. Le monde bâti par les humains est un monde d'*intentions*, où l'intentionnalité est le premier et le

[7] Voir par exemple l'article « Anti-utilitarisme » signé par Alain Caillé dans le *Dictionnaire de l'autre économie* sous la direction de Jean-Louis Laville et Antonio David Cattani (Desclée de Brouwer, Paris, 2006).

dernier moteur, et où l'intention vise la satisfaction d'un *besoin*, en général pour le bonheur du plus grand nombre – mais c'est là, il est vrai, une affaire d'organisation politique de la cité. Que certains parmi les professeurs aient repris la rhétorique aristocratique du désintéressement, de l'art pour l'art, du sublime, est à mes yeux le fruit amer d'une adaptation forcée à la dépossession épistémologique évoquée plus haut – une dépossession que cette impérieuse rhétorique a sans doute accélérée en la sanctifiant par avance. Du labeur utile, visant à augmenter le bonheur de chacun et de tous, on passe d'abord au plaisir qu'apporte le labeur lui-même. Sismographe hypersensible aux idéologies qui travaillent les couches populaires ayant réussi une certaine ascension sociale, le philosophe Alain restitue ce mouvement euphorique en une formule bien frappée : « … le travail utile, note-t-il dans un *Propos* du 6 novembre 1911, est par lui-même un plaisir ; par lui-même, et non par les avantages qu'on en retirera. » Notons donc qu'il s'agit là de *plaisir personnel*, non de bonheur partagé. Mais on doit remonter plus loin encore pour retrouver la racine du mal, jusqu'aux doctrines de « l'art pour l'art », où l'objet du travail n'est plus qu'alibi à l'exercice d'un art supposé transcendant à ses conditions de possibilité autant qu'à l'objet auquel il semble illusoirement s'appliquer. Cet objet, ses motivations à être, tout cela devient alors, littéralement, *obscène*. Doctrinaire de l'art pour l'art, Théophile Gautier – le futur auteur du *Capitaine Fracasse* (1863) – l'écrit sans ambages dans la préface à son roman *Mademoiselle de Maupin* (1835) : « Il n'y a de vraiment beau, souligne-t-il, que ce qui ne peut servir à rien ; tout ce qui est utile est laid, car c'est l'expression de quelque besoin, et ceux de l'homme sont ignobles et dégoûtants, comme sa pauvre et infirme nature. – L'endroit le plus utile d'une maison, ce sont les latrines. » Voilà le manifeste d'une idéologie qui, aujourd'hui, affaiblit la profession, et dont je prendrai résolument le contre-pied.

5. Commerce avec le sublime ou « plomberie mathématique » ?

En rupture avec le dogme naturaliste et anti-utilitariste, je pose trois principes. Tout d'abord, toute création humaine est un *ajout* au monde « naturel ». Ensuite, cet ajout a un motif, une raison d'être, une utilité. Enfin, du fait qu'il appartient au cercle des œuvres humaines, cet ajout peut légitimement être analysé, mis en débat, abandonné, remplacé, etc. Ce qu'un savoir permet de *comprendre* et ce qu'il permet de *faire* en le comprenant constitue son *utilité* : l'utilité d'un concept, ainsi, c'est sa capacité à *outiller* la pensée et l'action. On ne connaît pas véritablement un savoir si l'on n'en connaît pas l'utilité et les usages. Le principe de l'art pour l'art est pour cela incompatible avec la vie des savoirs. La doctrine de l'art pour l'art appliquée à la connaissance fabrique de *faux savants*. Voyons cela plus concrètement.

À la rentrée 2000, en classe de seconde, un nouveau programme entre en vigueur qui tente de réhabiliter l'une des victimes de la grande réforme des mathématiques modernes, les « cas d'égalité » des triangles (devenus entre-temps cas d'*isométrie*). Voici donc qu'un savoir mathématique alors inconnu d'une majorité de professeurs en exercice fait tout à coup résurgence. Un savoir dont les raisons d'être étaient évidentes pour les plus anciens, qui l'avaient étudié comme collégiens – car, dans la période pré-réformée, les cas d'égalité s'enseignaient en classe de 5^{e}. À l'IUFM d'Aix-Marseille, où j'exerce comme formateur, comme sans doute ailleurs, les professeurs stagiaires s'interrogent. « Comment, demande-t-on ainsi, aborder les triangles isométriques et semblables ? À quoi servent vraiment ces notions ? » « Quelles situations problèmes, questionne-t-on encore, peut-on donner pour introduire les triangles isométriques et les triangles semblables ? » Pour avoir une réponse, ouvrons donc des manuels d'avant la Réforme. L'atmosphère n'y est pas au sublime mais, plus sainement, à la pratique intelligente d'une « plomberie mathématique » de bon aloi.

Quelle est donc l'utilité des cas d'égalité des triangles ? Dans un vocabulaire daté, un *Traité de géométrie élémentaire* publié en 1885 précise sobrement la chose :

> *Utilité des théorèmes précédents.* Les cas d'égalité des triangles sont appliqués sans cesse, en géométrie, pour trouver que *deux droites* sont égales, ou que *deux angles* sont égaux.

L'auteur met, au reste, son lecteur en garde contre les embûches qui l'attendent :

> … ce qui fait la difficulté de la méthode, c'est que presque jamais les triangles ne sont tracés. Il faut alors commencer par les imaginer et, pour cela, mener une ou des droites auxiliaires.

Les cas d'isométrie sont des conditions suffisantes d'existence d'une isométrie (dont la nature importe peu) transformant tel triangle en tel autre. Plus humblement, un manuel de collège d'autrefois indique :

> … pour démontrer que deux segments rectilignes sont égaux, on cherche à les faire entrer dans deux triangles dont on établit ensuite l'égalité. On procède souvent de même pour démontrer que deux angles sont égaux.

Les cas d'isométrie n'ont *rien de sublime* : ce sont les outils d'une certaine « plomberie » mathématique, qui, sans eux, devrait faire appel à d'autres outils. Supposons que l'on ait établi le théorème de Pythagore ; comment établir sa réciproque ? Voici ce que proposait, dans les années 1950, un manuel de géométrie de collège en réponse à cette question – une réponse sans appel.

Réciproque du théorème de Pythagore. Si les trois côtés a, b, c d'un triangle vérifient la relation

$$\mathbf{a^2 = b^2+c^2}$$

ce triangle est rectangle.

Construisons un angle droit xOy. Portons sur Oy une longueur OM = b et sur Ox une longueur ON = c.

Traçons MN. On a :

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = b^2+c^2.$$

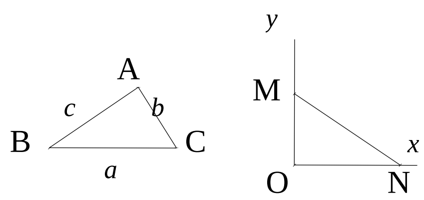
ou : $\overline{MN}^2 = a^2$

Ainsi : MN = a.

Dès lors, les triangles OMN et ABC sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux.

Par suite : ∠A = ∠O = 1 droit,

et le rectangle ABC est rectangle en A.

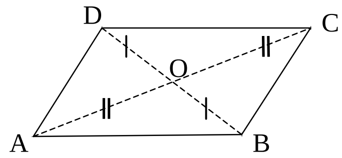


On ne connaît pas un savoir si l'on n'en connaît pas les raisons d'être, ou du moins quelques-unes d'entre elles, qui le rendent *socialement doué de sens*. Considérons encore, ici, la notion mathématique de *parallélogramme*. Pourquoi cette notion ? Pourquoi s'intéresse-t-on à elle au point de l'inscrire au programme du collège (en classe de 5[e] toujours) ? Ce qu'il importe de souligner, c'est que, aujourd'hui, ordinairement, une telle question *n'est pas posée* : il y a le parallélogramme, il a une définition, des propriétés, que l'on visite comme l'on ferait d'un monument ancien. (Un monument ancien n'a pas d'« utilité » ; ou plutôt, il n'en a *plus* d'autre que muséale ou opportuniste.) C'est là, bien entendu, un point de vue postmoderne, qui n'avait guère cours quand les manuels osaient encore poser la question de l'utilité, et y apportaient une réponse simple, fondamentale, sobrement mathématique (et non esthétisante ou moralisatrice, du genre : « Le parallélogramme, c'est une jolie figure, il est formateur d'en étudier les propriétés, etc. »). Je cite à nouveau le *Traité de géométrie élémentaire* ; au chapitre *Des parallèles et des parallélogrammes*, l'auteur consacre un bref paragraphe à indiquer l'*Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*. Le voici.

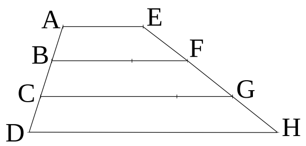
> *Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes*. Ces théorèmes servent à en démontrer d'autres qui ont pour objet de prouver :7

1° Que deux droites sont égales ;
2° Que deux angles sont égaux ;
3° Que deux droites sont parallèles.

Que dit pour son compte le manuel de collège des années 1950 déjà cité ? Son propos est des plus explicites ; le dernier de la classe même doit pouvoir comprendre !

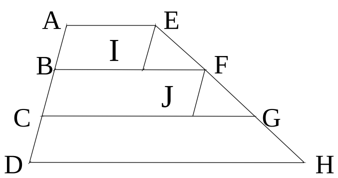
> **Application**. *Si un quadrilatère convexe possède* **l'une quelconque de ces propriétés** *nous pouvons affirmer*
>
> 1° *qu'il est un parallélogramme ;*
>
> 2° *qu'il possède par suite toutes les propriétés ci-dessus.*
>
> **Exemple.** Au cours d'un problème nous arrivons, par exemple, à prouver que le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.
>
> 
>
>
> Immédiatement nous tirons de ce fait les conséquences suivantes :
>
> 1° ABCD est un parallélogramme
>
> 2° Par suite : AD et BC sont égaux et parallèles ; AB et DC sont égaux et parallèles ; $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$.

L'approfondissement des raisons d'être d'un savoir mathématique donné conduit ainsi à mettre au jour des raisons d'être attachées à un certain type de *travail* mathématique, et pour cela *entièrement étrangères au dilettantisme culturel caractéristique de l'abord monumentaliste des savoirs*. Cette humble pratique artisanale des mathématiques n'est nulle part plus apparente que dans ce qui était, traditionnellement, la toute première utilisation des propriétés du parallélogramme, pour démontrer un théorème parmi les plus connus, comme on le verra ci-après.



Théorème 1. Si les droites (AE), (BF), (CG), (DH), …, sont parallèles, et si AB = BC = CD = …, alors on a aussi EF = FG = GH = …

Usuellement, la démonstration de cette propriété procédait de la façon suivante. On considère d'abord les points I et J, où (EI) et (FJ) sont parallèles à (AB). Les quadrilatères AEIB et BFJC sont donc des parallélogrammes ; il en résulte que l'on a d'une part EI = AB, d'autre part FJ = BC, en sorte que, puisque AB = BC, on a EI = FJ. On considère alors les triangles EIF et FJG. On a EI = FJ et, pour des raisons de parallélisme, $\hat{E} = \hat{F}$ et $\hat{I} = \hat{J}$; d'après le « 1^er^ cas d'égalité des triangles », EIF et FJG sont donc « égaux » (= isométriques), en sorte que EF = FG, CQFD.



La naturalisation des œuvres humaines, qui en fait des monuments à visiter, à honorer, à vénérer même (pour certains) ou au contraire à fuir (pour d'autres), est corrélative de *l'oubli* de leurs raisons d'être, et même de la *question* de leurs raisons d'être. L'absence de questionnement des œuvres – et en particulier des savoirs – sur leurs raisons d'être ne permet plus alors qu'une entrée *fictive* dans la culture, et fait des œuvres des *idoles* (du grec *eidos,* forme) que d'aucuns vénèrent, non sans agressivité à l'encontre de ceux qui se refusent à ce rite absurde. L'idolâtrie, le fétichisme des œuvres et des savoirs a, en quelques décennies, créé un paysage scolaire dégradé, où l'on étudie des œuvres qui ne seraient plus désirables qu'en elles-mêmes – en soi et pour soi – et non pour ce qu'elles permettraient de comprendre et de faire en le comprenant. Ne croyez pas pour autant que le rappel de l'ordre mathématique ancien que je viens d'esquisser soit une apologie déguisée d'un frileux retour au passé ! Les passéistes – ils sont aujourd'hui légion – butent presque à tout coup sur l'incompréhension postmoderne d'œuvres qu'ils regardent à tort comme des bibelots dont les formes surannées les ravissent, alors même que leur échappent les raisons d'être véritables qui donnaient hier à ces œuvres leur pleine vitalité. Ainsi en va-t-il notamment avec l'engouement actuel pour le calcul mental, cas exemplaire sur lequel je ne m'arrêterai pourtant pas davantage ici.

6. Rénover le curriculum : la notion de PER

Dans l'annexe au décret instituant le *socle commun des connaissances et des compétences* [8], à propos des « principaux éléments de mathématiques » qui composent ce « socle », on lit cette phrase : « Dans chacun des domaines que sont le calcul, la géométrie et la gestion des données, les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne. » Le but est louable ; mais l'idée qu'il concrétise a été perdue de vue depuis longtemps. En sorte qu'il convient aujourd'hui de revisiter le curriculum mathématique avec, pour chacun des savoirs mathématiques enseignés, ces questions vitales en tête : « Ce savoir, quelle est son utilité, quels sont ses emplois, quelle est sa pertinence pour le citoyen d'aujourd'hui ou de demain ? »

Considérons d'abord, à titre d'exemple, la « règle de trois » la plus simple, à propos de ce petit problème : « Trois objets d'une certaine sorte ont coûté 13,50 € ; combien coûteront cinq objets de cette sorte ? » Un curriculum *rénové* devra d'abord prendre acte d'une création essentielle au bonheur des hommes : celle du concept de *fraction*, qui généralise la notion de nombre *entier*. C'est là, certes, une invention ancienne, mais certains de ses emplois parmi les plus bénéfiques sont toujours inconnus tant de la culture scolaire que de la culture extrascolaire commune. Le concept de fraction, en effet, permet de passer de la notion de nombre entier de « fois » à la notion révolutionnaire de nombre *fractionnaire* de « fois ». En quoi est-ce utile ? En ceci qu'il devient alors possible de *dire* : « Si trois de ces objets ont coûté 13,50 €, cinq objets coûteront $\frac{5}{3}$ *fois plus*, soit $\frac{5}{3} \times 13{,}50$ € = … » La notion de nombre fractionnaire (combinée avec l'usage d'une calculatrice simple) donne une puissance de pensée et d'action bien supérieure à ce qu'elle était traditionnellement : si 98 exemplaires d'un certain article ont coûté 441 €, 135 exemplaires coûteront en principe $\frac{135}{98}$ *fois plus*, soit $\frac{135}{98} \times 441$ € $= \frac{135 \times 441}{98}$ € ; c'est-à-dire, d'après la calculatrice de mon téléphone mobile, 607,5 €.

Il est ainsi des savoirs utiles mais qui demandent à être rénovés. Mais voici un cas plus difficile. Un professeur stagiaire qui a la responsabilité d'une classe de 4^e s'interroge sur les raisons d'être d'un sujet d'étude qui, dans le programme de cette classe, vient se nicher dans le thème des *quotients de nombres décimaux* (relatifs) : la question de l'*inverse d'un nombre* (non nul). Pourquoi donc cette notion ? Rend-elle des services du style de ceux que rend la notion de nombre fractionnaire par exemple ? Pour y voir plus clair, remontons dans un passé

[8] JO n° 160 du 12 juillet 2006.

où cette raison d'être était *beaucoup plus explicite*. Le livre de Camille Lebossé et Corentin Hémery pour les classes de 5^e^ déjà cité présente par exemple les développements ci-après.

Quotient exact de deux nombres entiers ou fractionnaires

Pour calculer le quotient exact de deux nombres entiers ou fractionnaires *a* et *b*, on peut écrire *a* et *b* sous forme de fractions et se ramener ainsi au produit de *a* par l'inverse de *b*.

EXEMPLES :

$7 : 9 = \frac{7}{1} : \frac{9}{1} = 7 \times \frac{1}{9}$; $12 : \frac{3}{5} = \frac{12}{1} : \frac{3}{5} = \frac{12}{1} \times \frac{5}{3}$

$\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$; $3\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{11}{3} \times \frac{5}{4} = 3\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$

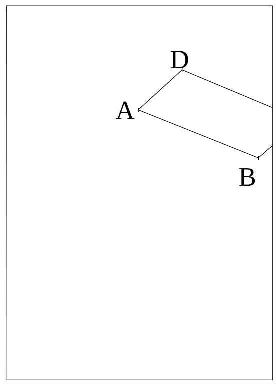
Pour diviser un nombre a par un nombre b, il suffit de multiplier a par l'inverse de b.

On remplace ainsi une division par une multiplication.

Conclusion : l'attention traditionnellement portée à la notion d'inverse d'un nombre est due au souhait de *remplacer une division par une multiplication*. Est-ce là *la* raison d'être de cette notion ? On pensera peut-être que, si la réponse à cette dernière question était positive, la chose serait bien décevante… Car ici, en effet, nulle prétention héroïque, chère aux fétichistes des savoirs ! Or la réponse *est bien celle-là* : elle est tout bonnement liée à un *besoin*, le besoin de remplacer un calcul « difficile » par un calcul plus facile, un calcul « long » par un calcul « rapide », notamment quand on travaille « de tête ». La consultation d'autres ouvrages inscrits dans la même tradition confirme cette réponse. Une *Algèbre* pour les concours administratifs, signée de R. Cluzel et H. Court et publiée chez Delagrave en 1951, ne dit pas autre chose. « Diviser par *b* revient à multiplier par son inverse $\frac{1}{b}$ » indiquent les auteurs, qui encadrent l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ avant d'ajouter : « Cette propriété est souvent utilisée dans les calculs. On remplace ainsi une division par une multiplication. » C'est ainsi que, précisent-ils, pour diviser par π, on multiplie par $\frac{1}{\pi}$, soit approximativement par 0,318 ; ainsi a-t-on : $\frac{38}{\pi} = 38 \times \frac{1}{\pi} \approx 38 \times 0{,}318 = 12{,}084$. À titre d'exercices, les auteurs proposent alors de calculer l'inverse de 0,375 avant de calculer 243 : 0,375, ou de calculer l'inverse de 0,625 et de calculer alors 168,32 : 0,625. La technique indiquée est liée à une organisation de travail qui suppose notamment l'existence de tables d'*inverses* (lesquelles apparaissent dès la civilisation mésopotamienne, il y a de cela quelque 4 000 ans : en base 60, 3 inverse 20, 4 inverse 15, 5 inverse 12, 6 inverse 10, 8 inverse 7.30, etc.). Tout cela est plus que digne d'être révéré, sans doute. Mais une période de plusieurs millénaires de disette numérique a désormais pris fin : une calculatrice simple donne d'un clic l'égalité $\frac{38}{\pi} = 12{,}09577567\ldots$, valeur qu'on pourra d'ailleurs comparer avec le résultat donné plus haut. Bien entendu, il existe toujours, pour faire se survivre une œuvre humaine dépassée, la tentation – *à laquelle il faut savoir résister* – de lui trouver des emplois *opportunistes* (on pourra ainsi demander aux élèves de retrouver la valeur d'un quotient dans le calcul duquel on a par erreur interverti le diviseur et le dividende). Le programme actuel de la 4^e^ est là-dessus ambigu : il demande que les élèves sachent que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ et enjoint qu'un travail soit « conduit sur la notion d'inverse d'un nombre non nul, les notations x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ et l'usage de calculatrices avec la touche correspondante », ajoutant alors *in fine* : « À cette occasion, on remarquera que diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse. » Or, quoique utile pour diviser *formellement* par une *fraction* (ce qui peut se faire en multipliant par l'inverse de la fraction), la manœuvre a perdu aujourd'hui son intérêt traditionnel, *autrefois bien réel*, en matière de *calcul numérique approché*. On a là, exemplairement, une organisation mathématique dont la niche écologique est devenue introuvable et qui, pour cela, est promise à disparaître – n'était la terrible hystérésis curriculaire à laquelle notre propre indécision accorde des droits exorbitants.

La rénovation du curriculum mathématique doit aujourd'hui partir d'un état du système d'enseignement dont le portrait a été brossé, mais en creux, par la théorie des situations didactiques à laquelle le nom de Guy Brousseau est attaché. Des « œuvres » mathématiques dont la liste est fixée par la tradition – même si celle-ci est périodiquement réinventée – sont présentées aux générations montantes de façon essentiellement *formelle*, et non pas *fonctionnelle*. De là un axe fondamental du travail rénovateur aujourd'hui indispensable : pour chaque « composant » du corpus que l'on prétend enseigner, *la profession* (et non bien sûr *chaque professeur*, agissant comme s'il était seul au monde) doit s'obliger à pouvoir exciper de *raisons d'être* qui soient à la fois authentiques au plan épistémologique et social, cohérentes au plan curriculaire, et susceptibles d'être rencontrées, reçues, vécues, intégrées par les élèves du niveau d'études visé à travers des *situations didactiques idoines*. Telle est la problématique évoquée plus haut, dont, entre mille autres, témoigne l'humble question sur les « situations problèmes pour introduire les triangles isométriques ». Lorsque, comme il est encore usuel aujourd'hui, les savoirs à étudier sont proposés par une puissance tutélaire insuffisamment soucieuse du triple critère que je viens d'énoncer, c'est à la *profession* qu'il appartient de soulever le problème dans toute sa rigueur, sans complaisance aucune. Dans un livre paru il y a maintenant plus d'un quart de siècle [9], je citais à cet égard une lumineuse formule d'un pédagogue britannique, selon lequel *the good teacher is known by the number of subjects that he declines to teach*. Appliquée à la *profession* tout entière (et non au professeur individuel), elle indique une exigence sur laquelle nous ne devrons pas céder.

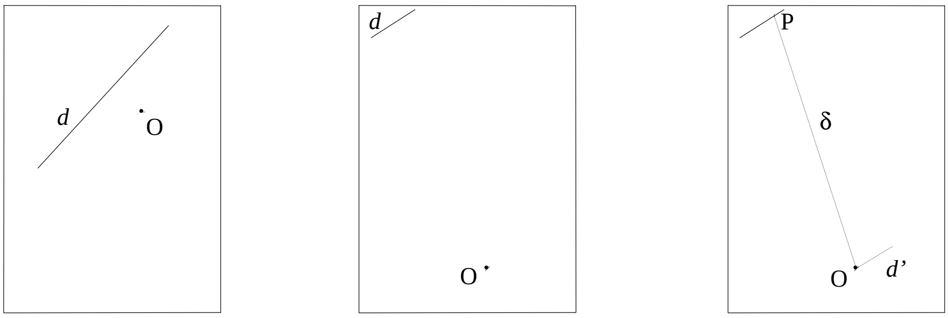
Pourtant, quand on tente de la mettre en œuvre, la solution ainsi avancée au problème du dépérissement curriculaire n'est qu'à moitié satisfaisante. En pratique, pour chaque savoir mathématique à enseigner, il convient de créer une ou plusieurs *activités d'étude et de recherche* (AER) qui « forcent » ce savoir, en ce sens que, étant donné la culture, le savoir-faire et les ressources mathématico-didactiques des élèves considérés, l'attaque du *problème générateur* de l'AER conduise la classe, avec une forte plausibilité, à rencontrer les éléments du savoir visé. Voici de cela un exemple. Dans une classe de 5e, la professeure impulse et dirige l'étude du parallélogramme ; au moment où nous l'observons, elle souhaite plus précisément faire rencontrer à ses élèves la propriété qu'ont les diagonales de se couper en leur milieu. Elle leur propose pour cela le problème suivant, dont l'énoncé se réfère à la figure ci-contre : « Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille. Tracer la partie visible de la droite (AC). »



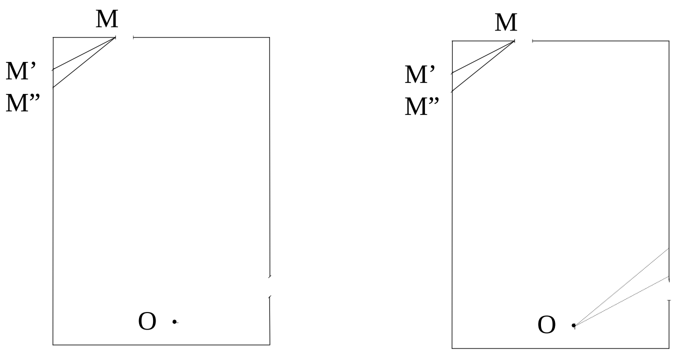
L'activité d'étude et de recherche ainsi lancée conduit la classe à dégager, dans la séance même, une solution complète appuyée sur la *conjecture* que la diagonale cherchée passerait par le milieu de l'autre, ainsi d'ailleurs qu'à ouvrir une autre voie de solution, non examinée dans la séance (mais sur laquelle la classe travaillera ultérieurement), consistant à opérer sur

[9] Voir Yves Chevallard, *op. cit.*

la figure donnée une symétrie bien choisie qui ramènerait le parallélogramme « tronqué » dans le cadre de la feuille. On aperçoit peut-être, alors, la difficulté que j'évoquais. Car outre le parallélogramme et ses diagonales, cette professeure aura aussi, en vertu du programme de 5^{e}, à faire reconnaître par la classe, par exemple, que l'égalité des angles alternes-internes formés par deux droites et une sécante commune implique le parallélisme des deux droites en question ; et elle devra pour cela disposer d'un *problème* autour duquel elle fera vivre une AER « forçant » la rencontre avec le « fait spatial » dont il s'agit de provoquer la reconnaissance. Pour cela, en l'espèce, les figures ci-après suggèrent une idée : pour tracer à l'aide d'une règle et d'un compas du commerce la parallèle à une droite *d* passant par un point O « proche » de *d* sur la feuille de travail (figure de gauche), les élèves ont été munis d'une ou plusieurs techniques ; mais comment faire pour tracer cette même parallèle *d'* lorsque O s'éloigne de *d* (figure du centre) ? La clé de la solution consiste à tracer une sécante δ à *d* passant par O et à reproduire convenablement en O l'angle de δ avec *d* (figure de droite).



Le problème épistémologico-didactique dont une solution est ainsi ébauchée (cette solution consiste ici en un problème de construction graphique), ce problème *se répète à l'infini*. Dans la technologie des AER, en outre, les choses ne s'arrêtent pas là : il convient en principe de faire voir d'où un tel problème graphique peut surgir, quel *projet de connaissance et d'action* peut conduire à l'affronter. Dans le cas que l'on vient d'évoquer, on peut par exemple penser à ceci. La figure ci-dessous à gauche représente une pièce munie de deux fenêtres, en haut (sur la figure) et en bas à droite. On a repéré que, au cours de la matinée, la direction du soleil varie au fil de l'heure, la direction « initiale » étant donnée par (MM'), la direction finale par (MM") ; un objet a été placé en O. La question que l'on se pose est alors la suivante : le point O aura-t-il été au cours de la matinée exposé au soleil ? La réponse, en l'espèce, apparaît sur la figure de droite.

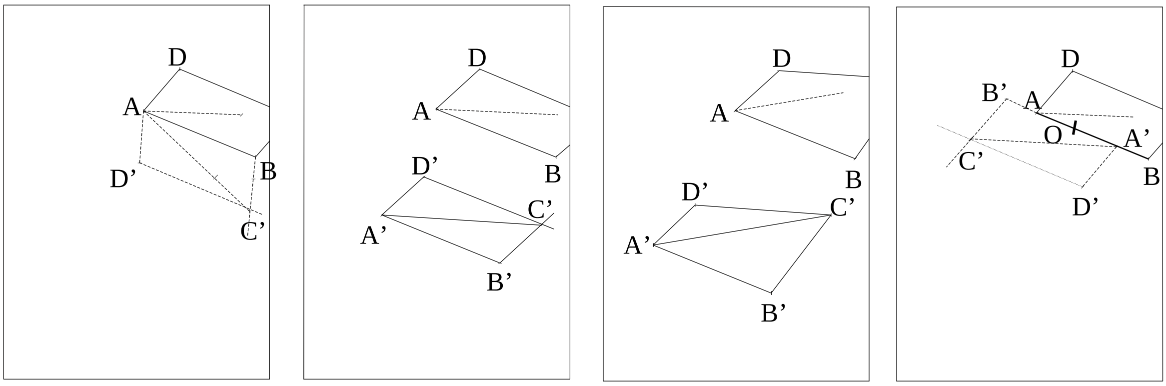


Je note ici, sur tout cela, une faiblesse grave de la profession aujourd'hui : on ne sait pas y indiquer – notamment aux « entrants » dans la profession –, pour chacun des savoirs à enseigner, un ensemble d'AER engendrant ce savoir sous des conditions didactiques voisines de celles prévalant (ou pouvant prévaloir) dans un type donné de classes. Il y a ainsi tout un patrimoine professionnel encore *à construire* (ou, partiellement, à reconstruire), ardente obligation dont le souci semble encore trop étranger à la profession – qui abandonne donc ses membres à leur « génie » personnel, signe éclatant que, sur ce point comme sur d'autres, *la profession n'existe que très insuffisamment encore*.

En quoi la mise en œuvre, non pas d'*une* AER, ou plutôt d'une suite d'AER isolées, mais au contraire d'une *succession organique* d'AER, ce qu'on appellera un PER, un *parcours* d'étude et de recherche, va-t-elle alors changer les choses ? L'atomisation de l'étude en AER successives, déconnectées les unes des autres, qui apparaissent souvent comme autant de points isolés dans la chronique mathématique de la classe, et dont tant la conception que la réalisation se font chaque fois à nouveaux frais est un facteur sévère de limitation de la diffusion du paradigme didactique fondé sur la notion d'AER. La dynamique de l'étude que le professeur doit nourrir, impulser, réguler doit être régulièrement relancée par l'introduction d'une AER nouvelle, souvent sans lien avec celles qui l'ont précédées, non plus d'ailleurs qu'avec celles qui suivront. Cette structure faiblement intégrée de la suite des AER organisant l'étude pose problème : l'ossature didactique est ici relativement fragile parce que l'introduction *ex abrupto* d'une AER nouvelle se fait alors, en règle générale, sans *motivation mathématique* suffisante, et en particulier sans véritable raison autre que la volonté du professeur – ou même de la classe, quand celle-ci a voix au chapitre en la matière – de lancer l'étude de tel ou tel bloc thématique.

Comment obvier à ce défaut constitutionnel du paradigme « néoclassique » qui conserve ainsi le défilé immotivé des œuvres mais s'efforce de fonctionnaliser – et donc de remotiver – l'étude de chacune d'elles ? Comme souvent, la solution peut être trouvée dans la genèse « naturelle » des connaissances, telle qu'elle peut s'observer dans les sciences et ailleurs, et telle aussi que d'aucuns ont tenté, au cours des décennies passées, de l'acclimater dans l'enseignement secondaire et supérieur au travers des dispositifs qui ont nom *projets* (en DEUG par exemple), *TER* (en maîtrise), *TIPE* (en CPGE), *TPE* (en Première et, fugacement, en Terminale), IDD (au cycle central du collège), etc. Alors que, dans une AER, on s'efforce d'étudier une question *ad hoc*, Q_j, censée engendrer un savoir mathématique S_j déterminé, extrait d'une suite préprogrammée de savoirs $(S_i)_{i\in I}$, dans la genèse « naturelle » des connaissances, et donc dans ce qu'on formalisera ici sous le nom de PER, les choses vont, si l'on peut dire, à l'envers. Au lieu de *partir* d'un savoir S_i, on part – très normalement – d'une *question inaugurale* Q, dont l'étude conduit à étudier des questions dérivées Q_k, en fonction des *besoins de connaissance engendrés par l'étude* de Q et en fonction aussi *des décisions prises par le collectif d'étude* (la classe, l'équipe de TPE en classe de première, etc.) sous l'autorité de son ou de ses « directeurs d'étude » (professeurs, etc.). Le *paramètre clé* est ici la question génératrice Q, qui détermine en grande partie les questions engendrées Q_k et, par voie de conséquence, les savoirs S_i sollicités et, *pour cela*, étudiés.

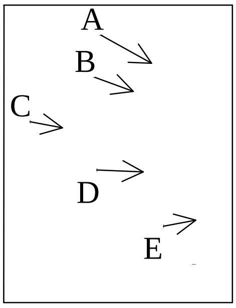
Avant d'aller plus loin, illustrons le schéma général qui précise la notion de PER. La question Q peut bien être, certes, une question particulière, telle celle relative aux diagonales d'un parallélogramme : rien en cela d'anti-naturel ! En vérité, le travail d'étude et de recherche que cette question *pourrait* engendrer est en fait souvent *beaucoup plus important*, beaucoup plus étendu que ce à quoi on se restreint ordinairement dans les classes. Dans le problème du parallélogramme tronqué, ainsi, il est possible d'envisager une symétrie axiale (ci-dessous, à gauche) ou centrale (en en choisissant adéquatement le centre), ou encore d'user (en 4^e^) d'une translation (ci-dessous, au centre gauche), techniques qui ont une *portée* plus large que celle fondée sur la seule propriété des diagonales du parallélogramme (ci-dessous, au centre droit). En outre, il est possible, voire nécessaire, d'étudier chaque fois les cas d'impossibilité. Comment faire, par exemple, si l'on a d'abord pensé user d'une symétrie centrale par rapport au point A, lorsque, en ce cas, la figure transformée se révèle elle-même tronquée ? Une réponse apparaît sur la figure de droite ci-dessous.



Pourquoi cette genèse « naturelle » des connaissances est-elle spontanément absente des classes ? Pour deux raisons principales, semble-t-il. Tout d'abord, il y a l'obsession d'œuvres mathématiques patinées et sanctifiées par le temps, qui ne sont plus regardées comme des moyens de produire des réponses à des questions, ce qui est pourtant le moteur de la vie des savoirs ! Cette obsession est très profondément ancrée dans le paradigme scolaire actuel. On y enseigne des œuvres *faites*, valorisées *pour elles-mêmes* (les diagonales qui se coupent en leur milieu, etc.), non les *problèmes* que ces savoirs permettraient de résoudre et dont ils pourraient naître à nouveau dans le travail de la classe. Pour cette raison, les questions étudiées – ici : comment tracer la diagonale dans le parallélogramme tronqué ? – *ne sont en général pas prises au sérieux*. Elles ne sont qu'un *alibi*, auquel du reste on ne croît guère, en sorte que les réponses qu'on leur apportera peut-être semblent, elles, tout à fait dénuées de valeur. Le problème du parallélogramme tronqué, dans cette tradition, sert au mieux à faire rencontrer la propriété des diagonales, qui seule importe, qui sera seule répertoriée. À la limite, l'activité d'étude et de recherche que ce problème engendre, et que j'ai évoquée plus haut, pourrait s'arrêter dès lors que la conjecture visée aura émergé : le problème lui-même n'est qu'un échafaudage provisoire, qui permet de construire la seule chose qui compte, et qu'on regarde comme se légitimant d'elle-même !

Il est pourtant une *seconde raison* au dépérissement actuel de l'enseignement des mathématiques. Le catalogue des œuvres enseignées, sortes de trous noirs qui ne tolèrent quasiment rien autour d'eux, est étrangement sélectif dans sa composition. Comment expliquer la chose ? Dans l'organisation des mathématiques à enseigner, il y a plusieurs niveaux. Tout d'abord, tout en bas de l'échelle, il y a le niveau des *sujets d'étude* : comment, par exemple, calculer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on connaît les mesures des côtés de l'angle droit ? Puis, juste au-dessus, il y a les *thèmes d'études*, désignés en général par l'un de leurs éléments « actifs », réputé emblématique : ici, ce sera le théorème de Pythagore. Ensuite, il y a les *secteurs études*, par exemple le secteur des figures planes élémentaires. Enfin, il y a les grands *domaines d'études*, celui de la géométrie par exemple. Or le choix des œuvres à enseigner se limite presque exclusivement au répertoire classique des thèmes « bien connus » (le parallélogramme, le triangle rectangle, etc.). Et un professeur serait en général bien en peine aujourd'hui de faire travailler sa classe sur un *secteur* (par exemple celui des figures planes élémentaires) sans décomposer *a priori* celui-ci en une succession de thèmes prédécoupés (le parallélogramme, le triangle rectangle, etc.).

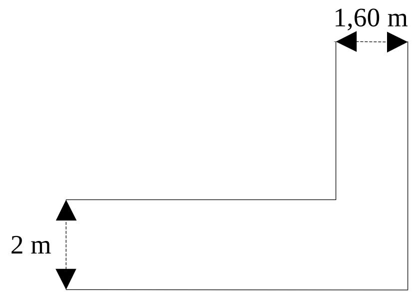
Or la notion de PER permet de se placer *à un autre niveau* dans l'étude d'un corpus mathématique donné. Les questions particulières évoquées jusqu'ici relèvent par exemple



toutes *d'une même grande question*, celle de la construction de certains éléments d'une figure que l'on sait être déterminée par les données graphiques fournies, mais dont certains des éléments classiquement utilisés pour la construire ne sont pas accessibles, situation dont la figure ci-contre propose encore un exemple : un illustrateur a dessiné deux personnages A et C, qui regardent un certain point P au loin ; il veut situer le regard d'autres personnages, B, D, E, qui doivent aussi regarder P. Comment peut-il faire, étant entendu que le point P se trouve hors de la feuille où il dessine ?

On imagine que le nombre de questions particulières qui peuvent relancer un parcours d'étude et de recherche amorcé par l'une de ces questions *est potentiellement immense*. Le bénéfice est double : la motivation mathématique du problème étudié, sans doute chaque fois spécifique, relève pourtant d'un *schéma commun* un grand nombre de fois mis en jeu, et qui devient vite familier ; l'investissement cognitif, qui peut être important lorsqu'il s'agit d'appréhender pour la première fois le genre de difficulté à étudier, est chaque fois plus réduit, ce qui permet dès lors de se centrer sur la *spécificité* du problème à résoudre. Cela noté, l'idée essentielle est alors celle de « saturer » un domaine ou même un ensemble de domaines mathématiques à l'aide d'un *petit nombre* de PER. Telle est l'une des clés de la rénovation curriculaire à laquelle je travaille de concert avec un certain nombre de gens de la profession, chercheurs compris. Dans le domaine numérique, par exemple, au collège, un PER autour de la question « Comment peut-on calculer avec des nombres qui s'écrivent avec beaucoup de chiffres ? » pourra ainsi couvrir, quoique de façon non systématique (il ne s'agit pas de reproduire le défilé formel des œuvres propre à la tradition ancienne), une large part des secteurs, thèmes et sujets du domaine numérique.

Ce qui a été évoqué jusqu'ici en matière de PER demeure *à l'intérieur* des mathématiques. La rénovation de l'enseignement des mathématiques suppose davantage : la reconquête de certains des usages *extramathématiques* des mathématiques. Pour cela, la profession doit redevenir attentive aux *besoins mathématiques* du monde autour de nous – attitude que les trente dernières années ont tendu à bouter hors de notre culture commune. Le déploiement de cette problématique ne bute pas que sur l'obstacle d'un désapprentissage collectif maintenant accompli. Car, corrélativement, nombre de disciplines enseignées ont appris à *minimiser* leur consommation de mathématiques, et même à satisfaire *par elles-mêmes* leurs besoins incompressibles en la matière, regardant en conséquence avec suspicion l'intrusion mathématicienne dans leur territoire – que, au reste, les professeurs de mathématiques d'aujourd'hui font souvent profession d'ignorer. La reconquête d'un régime épistémologique authentique, fondé sur la fonctionnalité des mathématiques, ne semble donc pouvoir être réalisée qu'à partir de deux principes fondamentaux. Le premier consiste à lancer *aussi* des PER qui ne s'enferment pas dans les mathématiques, comme il en allait dans l'étude autrefois classique de la question « Comment déterminer la distance entre deux points, accessibles ou non, de l'espace "topographique" ? », ou encore avec l'étude de la *statique des forces* – quelle force exercer pour vaincre telle résistance donnée ? De tels « PER », qui relevaient jadis pleinement de la classe de mathématiques, ont vu leur statut changer au fil des décennies, le point de vue dominant sur leur objet se modifiant de deux façons souvent concomitantes qui s'expriment par l'un ou l'autre de ces interdits : « On n'a pas à étudier ça en maths », ou : « Ça s'étudie ailleurs, dans d'autres disciplines. » D'une façon générale, on devra alors rechercher des PER dont la légitimité dans la classe de mathématiques soit *a priori* peu contestable (même si l'on sait que le passage du temps peut changer les choses) parce que leur objet apparaît d'emblée « mathématique » et qu'aucune autre discipline co-enseignée n'en revendique la jouissance exclusive. En géométrie, par exemple, on pourra lancer un PER visant à répondre à la question suivante : « Comment déterminer tel ou tel élément d'une figure tracée sur une feuille dont certains éléments utiles tombent hors de la feuille ? » Au croisement des travaux géométriques et des travaux numériques, on pourra de même envisager la question suivante : « Quelle est la taille maximale d'un objet que l'on peut transporter dans un édifice comportant couloirs, escalier, etc. ? » Par exemple, quelle est la longueur maximale d'une échelle que l'on veut transporter horizontalement dans le couloir schématisé ci-contre ?…



En pratique, des PER ont été aussi réalisés (et étudiés) qui s'insinuent dans les interstices du maillage disciplinaire de l'enseignement scolaire, c'est-à-dire qui opèrent une sortie hors du *terroir* mathématique sans toutefois empiéter sur le territoire de disciplines co-enseignées. Ainsi en va-t-il avec les questions suivantes, qui ont donné lieu à des recherches effectives : « Comment déterminer le coût de l'utilisation d'un téléphone mobile en fonction de l'usage qu'on en fait ? » ; « Comment établir un plan d'épargne en fonction des revenus disponibles et de l'épargne à constituer ? » D'une façon plus générale, il faudra bien que la rénovation du curriculum secondaire prenne en charge sincèrement, authentiquement, cette question essentielle, déjà mentionnée plus haut : pour chaque grand type de situations problématiques que peut vivre le citoyen d'aujourd'hui, *quels sont les éléments de savoir utiles* ? Et, parmi ces éléments de savoir, quels sont les éléments de *mathématiques* utiles ? C'est à sa capacité à prendre en charge cette interrogation essentielle pour chacun et vitale pour le futur de l'enseignement des mathématiques que la profession mesurera son rôle dans la révolution épistémologique et didactique aujourd'hui indispensable, à l'école comme ailleurs dans la société.

7. Pessimisme de l'intelligence, optimisme de la volonté

Le temps est venu de conclure. La formule qui donne son titre à cette conclusion – il faut allier le pessimisme de l'intelligence à l'optimisme de la volonté – est souvent attribuée à Antonio Gramsci, qui l'aurait empruntée à Romain Rolland. Elle n'est pas indigne, je crois, du grand dessein qui devrait mobiliser nos énergies et nos talents, et que je déclinerai maintenant en quelques points.

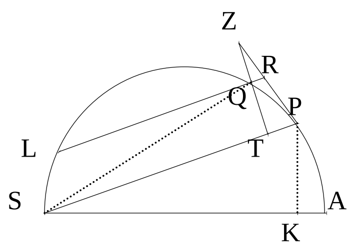
1. L'état de l'enseignement secondaire des mathématiques soulève aujourd'hui de fortes interrogations. Plusieurs symptômes résument cette situation : monumentalisme, formalisme, inauthenticité épistémologique, oubli du monde et péjoration de ses « besoins », illusion lyrique, fantasme d'insularité et recherche de la pureté, fuite dans l'insignifiance ludique et la puérilité, foi naïve en une rédemption logicielle « mutualisée », etc. Rien ne serait plus dangereux que de croire aux situations scolairement établies. L'enseignement du latin et du grec tenait, naguère encore, le haut du pavé. Son avenir était certain. Sa brutale déroute, sa débâcle presque complète *en quelques décennies* devaient paraître impensables aux lauréats de l'agrégation de lettres classiques de 1965. Elles sont aujourd'hui accomplies.

2. Contre ce funeste destin, *qui n'est pas improbable*, les forces vives au service de l'enseignement des mathématiques doivent se retrouver en une *profession* qu'il reste historiquement à constituer. Elles doivent le faire en refusant les tentations poujadistes ou

élitistes au mauvais sens du terme qui taraudent les différentes corporations à rassembler : professeurs, formateurs, chercheurs, responsables institutionnels de tout rang, etc. Comme il en va pour toute profession digne de ce nom, le devoir vital de cette profession sera alors d'identifier et de s'employer à résoudre, en dépassant l'individualisme traditionnel qui dissimule mal l'abandon de chacun à soi-même, les grands et les petits *problèmes de la profession*.

3. Le premier grand problème que doit affronter la profession aujourd'hui a pour symptôme principal l'effroi devant l'usage (mathématique et, plus encore, extramathématique) des connaissances mathématiques enseignées, possibilité que d'aucuns regardent parfois comme le signe d'un état ancillaire insupportable, comme une « instrumentalisation » dénaturante, à refuser avec horreur. Cette catatonie épistémologique doit céder à un travail de la profession sur le concept *d'utilité* et sur son articulation avec le principe républicain de l'instruction, où les savoirs se justifient et se construisent non tant comme des œuvres admirables en elles-mêmes que comme des *outils de connaissance et d'action*, permettant de *comprendre* les situations du monde mathématique *et* extramathématique et d'*agir* en leur sein de façon à la fois intelligente et intelligible.

4. La constitution d'une profession et la conversion *éthique, épistémologique et didactique* qui en est indissociable supposent le renoncement à l'illusion lyrique qui voudrait faire des mathématiques un savoir transcendant au monde social, consubstantiellement étranger à toute autre réalité que lui-même. Contre cette idéologie du sublime, il faut donc réapprendre collectivement les mathématiques comme humble artisanat, ordonné à des objectifs précis et socialement désirables, articulé à des situations du monde déterminées. L'expérience mathématique doit retrouver sa signification immanente, plus proche de l'art du plombier que des rodomontades du montreur d'ours. En doute-t-on encore ? Allons-y donc d'un dernier exemple : celui de Newton, orfèvre en matière de plomberie mathématique, qui, dans un travail intitulé *Du mouvement des corps* (1684), prodrome à ses *Principia*, exerce son art comme le lecteur, pour son bonheur, pourra le découvrir par lui-même en examinant à ses frais le bref échantillon que voici [10].



Un corps tourne sur la circonférence d'un cercle. Trouver la loi de la force centripète qui tend vers un point de la circonférence.

Soit SPQA la circonférence du cercle, et S le centre de la force centripète ; P le corps porté sur la circonférence, Q la position prochaine vers laquelle il se mouvra.

Sur le diamètre SA et sur SP abaissez les perpendiculaires PK, QT ; par le point Q tracez LR parallèle à SP et rencontrant le cercle en L et la tangente PR en R. Que TQ et PR se rejoignent en Z. À cause de la similitude des triangles ZQR, ZTP, SPA, on aura l'égalité des rapports de RP^q (c'est-à-dire QRL) à QT^q et de SA^q à SP^q. Donc $\frac{QRL \times SP^q}{SA^q} = QT^q$. Multiplions ces deux termes égaux par $\frac{SP^q}{QR}$; comme les points P et Q se rejoignent, écrivons SP au lieu de RL, on aura $\frac{SP^{qc}}{SA^q} = \frac{QT^q \times SP^q}{QR}$. Donc la force centripète est inversement comme $\frac{SP^{qc}}{SA^q}$, c'est-à-dire (puisque SA^q est donné) comme le quadrato-cube de la distance SP.

5. Les mathématiques enseignées doivent aujourd'hui réapprendre à se rendre socialement désirables et culturellement attractives. Autour de nous, les besoins mathématiques, qu'ils

[10] Isaac Newton, *De la gravitation*, Gallimard, 1995, p. 165.

soient modestes ou sophistiqués, sont en puissance innombrables. Mais devant l’état de guerre épistémologique qui ravage l’école, nombreux sont ceux qui ont appris à minimiser leurs besoins mathématiques, qu’ils tentent alors de satisfaire par leurs propres moyens, quand ils ne les ignorent pas au point de nuire à leurs plus chers desseins. Ce désenchantement mathématique qui empoisonne tout une culture, il nous revient de lui donner congé.