Devoir commun de Terminale ES

Généralités sur les fonctions – Statistiques – 3 heures

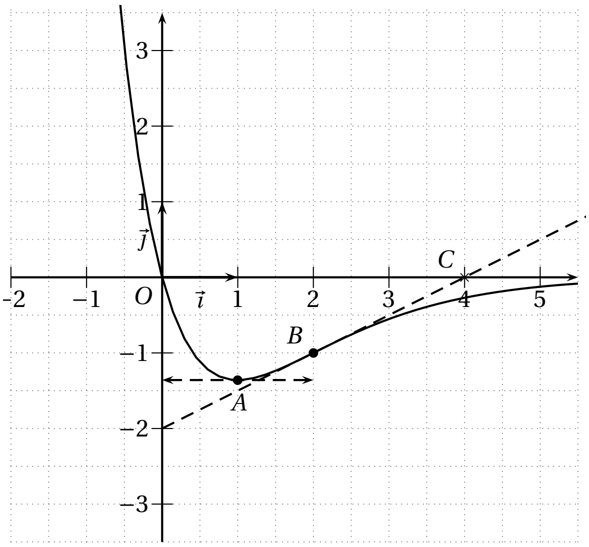
Ce sujet comporte 4 pages.

Du papier millimétré est mis à disposition des élèves.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
Le barème est provisoire.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 3.1 (5 points).

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne les renseignements suivants :



- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B\,(2\,;\,-1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C\,(4\,;\,0)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. **Recopier sur sa copie le tableau suivant et le compléter** sachant que *une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun et si le total est négatif, la note est ramenée à 0.*

Question	1	2	3	4a	4b
Réponse					

1. $f'(2)\ldots$
   (a) … vaut 2 (b) … vaut -1 (c) … vaut $\frac{1}{2}$
2. Une des représentations de la figure 3.1 page 46, représente la fonction dérivée f' de f, il s'agit de …
   (a) … $\mathscr{C}_1$ (b) … $\mathscr{C}_2$ (c) … $\mathscr{C}_3$
3. Une des représentations de la figure 3.1 page 46, représente une fonction h telle que $h' = f$, il s'agit de …
   (a) … $\mathscr{C}_1$ (b) … $\mathscr{C}_2$ (c) … $\mathscr{C}_3$
4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\ldots$
      i. … vaut 0 ii. … vaut $-\infty$ iii. … vaut $+\infty$
   (b) $g'(2)\ldots$
      i. … vaut 2 ii. … vaut 0 iii. … vaut $-\frac{1}{2}$

Exercice 3.2 (5 points).
Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1 951 à 2 001.

Année	1 951	1 961	1 971	1 981	1 991	2 001
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Population en millions y_i	360	439	548	683	846	1 018

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de la population de l'Inde entre 1 951 et 2 001 (*on arrondira le taux à* 10^{-2}).
2. Représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère ; unités graphiques : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 100 millions d'habitants en ordonnée.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et placer G sur le graphique.
4. On souhaite réaliser un ajustement affine de ce nuage afin de prévoir la population de l'Inde en 2 021.
   (a) Méthode de MAYER
      i. Déterminer les coordonnées du point moyen G_1 des trois premiers points du nuage puis celles du point G_2 des trois derniers points du nuage.
      ii. En déduire que l'équation de la droite (G_1G_2) est : $y = \frac{400}{3}x + \frac{547}{3}$
      iii. Déterminer à l'aide de cette équation une prévision pour la population de l'Inde en 2 021.
   (b) Méthode des moindres carrés
      i. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients à* 10^{-2} *près*).
      ii. Déterminer à l'aide de cette équation une prévision pour la population de l'Inde en 2 021, à 1 millions d'habitants près.
5. Déterminer en utilisant la méthode de votre choix l'année au cours de laquelle la population de l'Inde dépasserait 2 milliards d'habitants.

Exercice 3.3 (5 points).
Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$$

On appelle g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que $g'(x) = 6x(x-1)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de g en indiquant les valeurs des extremums locaux.
4. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 1 et 2.
   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
   (c) Dresser le tableau de signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude d'une fonction
La fonction f est définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1}$$

On appelle f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{2x^3-3x^2-3}{(x-1)^2}$.
3. À l'aide de la question précédente et de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
4. Dresser le tableau des variations de f en indiquant le signe de $f'(x)$ et les limites obtenues en 1.

Exercice 3.4 (5 points).

*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Une entreprise produit et commercialise des tee-shirts.
Le coût de production de x milliers de tee-shirts est donné en euros par la fonction C :

$$C(x) = 0,2x^3 - x^2 + 80x + 24\,000\,;\ x \in [0\,;\,60]$$

On note C' la fonction dérivée de C

1. (a) Déterminer $C'(x)$ et montrer que $C'(x)$ est positif.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction C.
   (c) On rappelle que le coût marginal est le coût de production d'une unité supplémentaire et qu'il peut être modélisé par la fonction dérivée.
   Calculer le coût marginal d'un tee-shirt lorsqu'on en produit 50 000.
2. On définit le coût moyen par : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$
   (a) Montrer que sa dérivée est définie par : $C'_M(x) = \frac{(x-40)(0,4x^2+15x+600)}{x^2}$.
   (b) Montrer que : $C'_M(x)$ a le même signe que : $x - 40$
   (c) Dresser le tableau de variations de C_M ; en déduire la quantité pour laquelle le coût moyen est minimal. Vérifier que pour cette production le coût moyen est égal au coût marginal.
3. Chaque tee-shirt étant vendu 2 €, calculer le bénéfice réalisé par la fabrication et la vente de 40 000 tee-shirts.

Exercice 3.5 (5 points).

*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité*

Partie A : Pistes cyclables

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. La ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G. Les stations reliées entre elles par une piste cyclable sont indiquées sur le graphe de la figure 3.2 page suivante.

1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables. A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.
2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3. Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier la réponse.
   (b) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, en trois étapes, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

Partie B : En voiture

Certaines de ces avenues sont à sens unique, d'autres à double sens pour la circulation des voitures ; d'autres sont réservées aux cyclistes ; l'ensemble est résumé sur le graphe de la figure 3.3 page suivante.

1. Écrire la matrice M' associée à ce graphe (*on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique*).
2. (a) Quel est le nombre de trajets de longueur 3 reliant E à F ? *On en donnera la liste.*
   (b) Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M' ?

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.1 – Courbes des questions 2 et 3

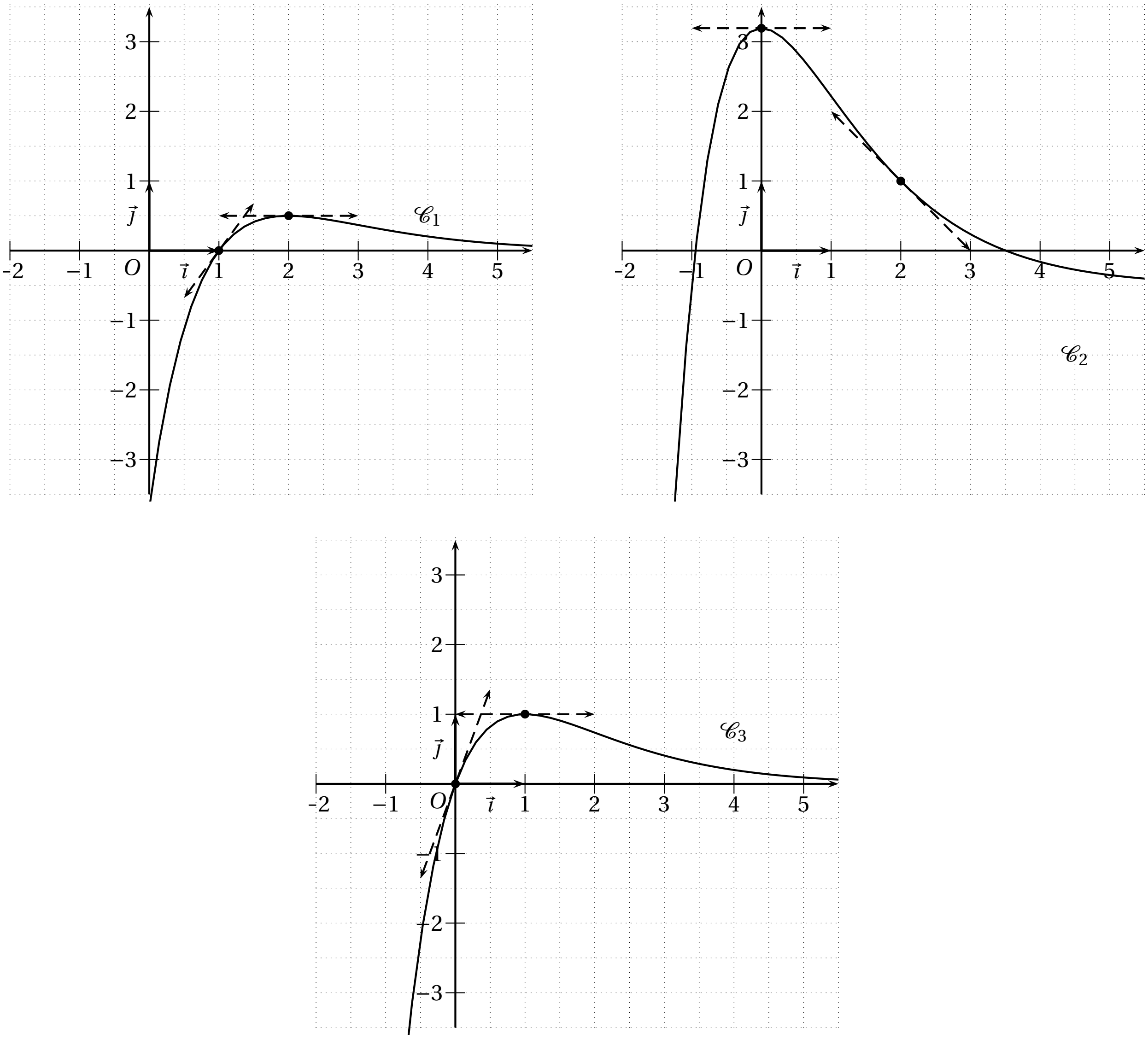


FIGURE 3.2 – Graphe des pistes cyclables de l'exercice 3.5

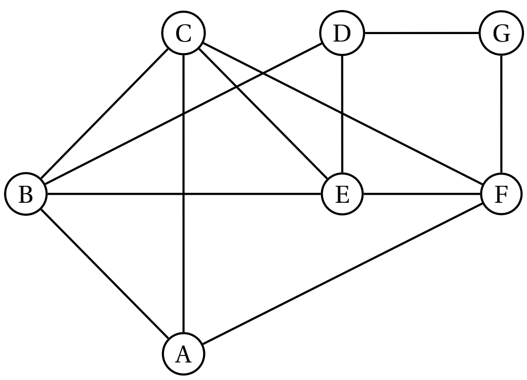


FIGURE 3.3 – Circulation des voitures de l'exercice 3.5