Devoir surveillé n°2 – TES3

Généralités sur les fonctions – Limites

Exercice 2.1 (4,5 points).

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

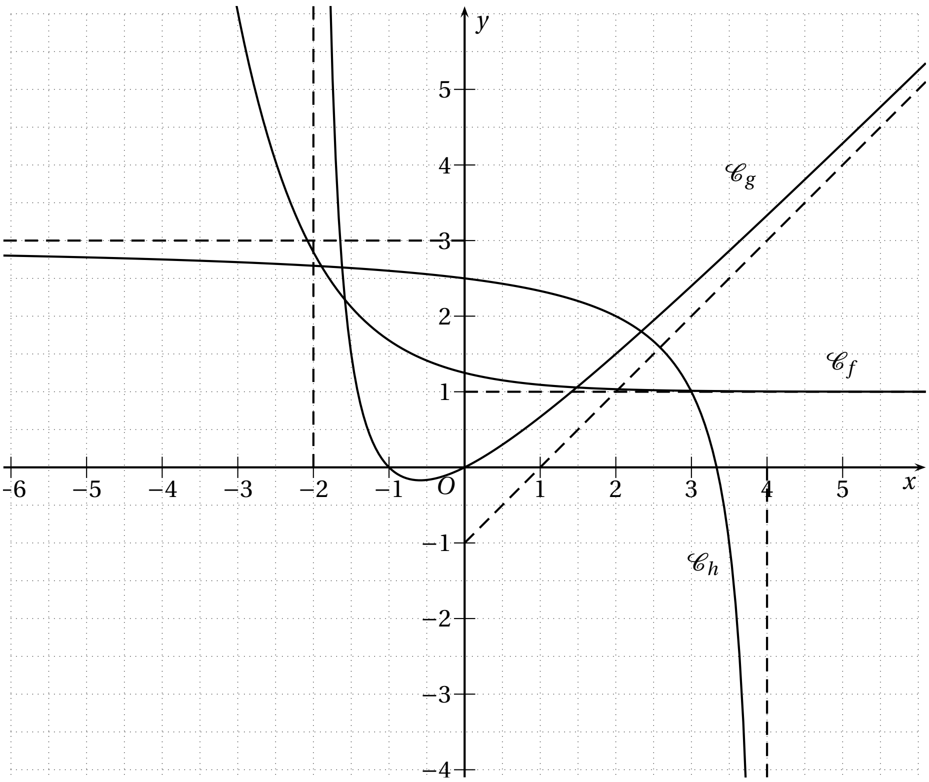
- $f(x) = (2x^3 + x + 1)^5$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
- $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^4}$

Exercice 2.2 (4,5 points).

La figure 2.1 de la présente page présente les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h.

1. Déterminer graphiquement D_f, D_g et D_h, les ensembles de définition respectifs de f, g et h.
2. Déterminer graphiquement les limites aux bornes de leurs ensembles de définition de ces trois fonctions.
3. Indiquer les éventuelles asymptotes à ces trois courbes (*on en précisera le type et l'équation*).

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.2



Exercice 2.3 (7 points).

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x+1}$$

On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x+1}$ pour tout réel $x \neq -1$.
2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) En déduire des éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
3. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$ pour tout réel $x \neq -1$.

   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
4. Dresser le tableau des variations de f en faisant apparaître le signe de la dérivée, en indiquant les extremums locaux et les limites aux bornes de son ensemble de définition.
5. En utilisant l'expression de $f(x)$ la plus adaptée, montrer que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 3$.

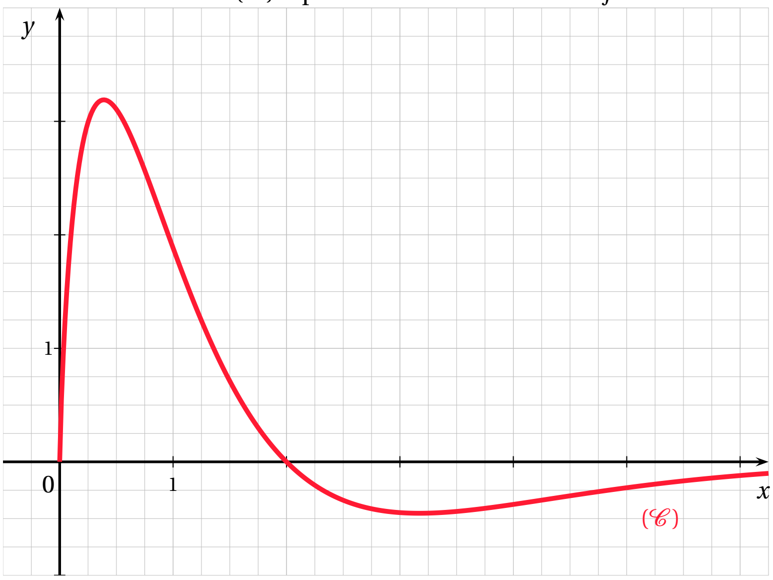
Exercice 2.4 (4 points).

Pour les élèves **ne suivant pas l'enseignement de spécialité**.

La courbe $(\mathscr{C})$ de la figure 2.2 de la présente page est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,; +\infty[$. On sait que :

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(2\,; 0)$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote l'axe des abscisses.

FIGURE 2.2 – Courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f de l'exercice 2.4



1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$? Justifier.
3. On définit une fonction g sur $J =]2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

   À l'aide des informations de l'énoncé, du graphique ou des réponses aux question précédentes :

   (a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

   (b) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$.

   (c) En déduire laquelle des trois courbes de la figure 2.3 de la présente page est la représentation graphique de la fonction g.

FIGURE 2.3 – Courbes de la question 3c de l'exercice 2.4