Devoir surveillé n°2 – TES1

Généralités sur les fonctions – Limites – Graphes eulériens

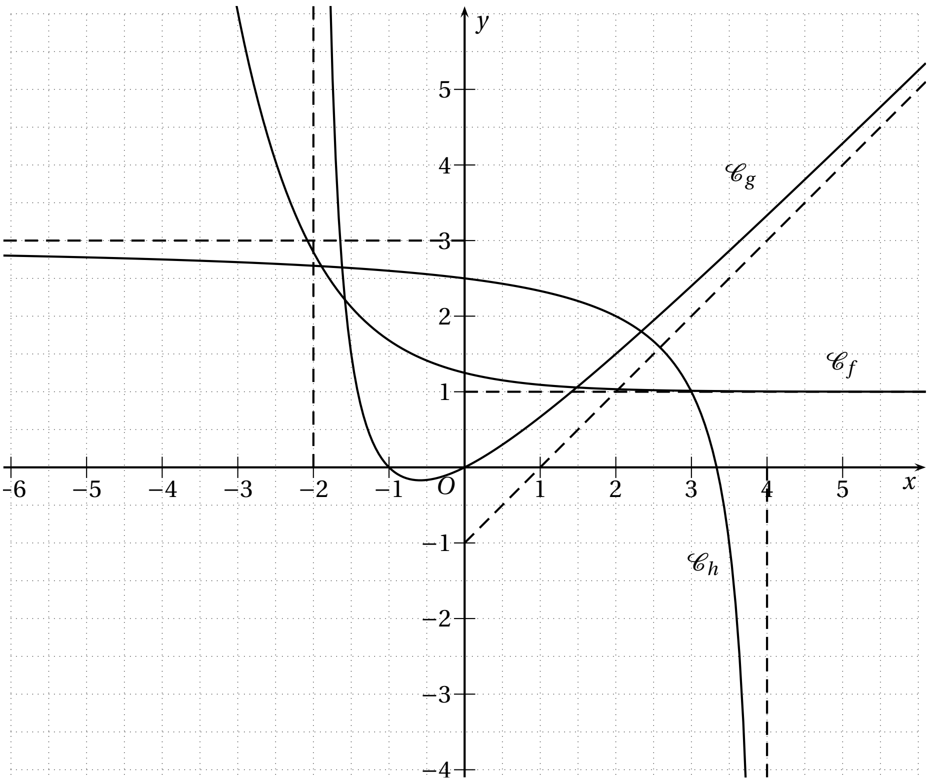
Exercice 2.1 (4,5 points).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (2x^3 + x + 1)^5$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
- $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^4}$

Exercice 2.2 (4,5 points).
La figure 2.1 page 33 présente les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h.

1. Déterminer graphiquement D_f, D_g et D_h, les ensembles de définition respectifs de f, g et h.
2. Déterminer graphiquement les limites aux bornes de leurs ensembles de définition de ces trois fonctions.
3. Indiquer les éventuelles asymptotes à ces trois courbes (*on en précisera le type et l'équation*).

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.2



Exercice 2.3 (7 points).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x+1}$$

On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x+1}$ pour tout réel $x \neq -1$.
2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En déduire des éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
3. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$ pour tout réel $x \neq -1$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
4. Dresser le tableau des variations de f en faisant apparaître le signe de la dérivée, en indiquant les extremums locaux et les limites aux bornes de son ensemble de définition.
5. En utilisant l'expression de $f(x)$ la plus adaptée, montrer que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 3$.

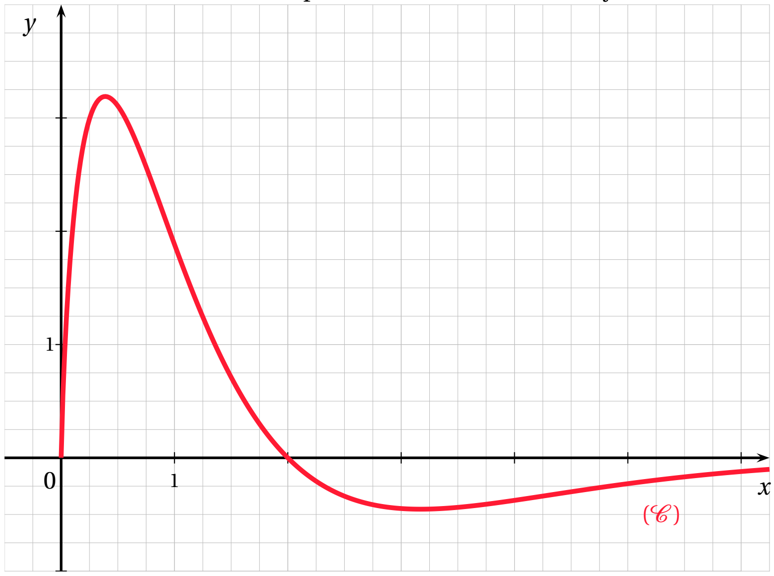
Exercice 2.4 (4 points).

Pour les élèves **ne suivant pas l'enseignement de spécialité**.

La courbe ($\mathscr{C}$) de la figure 2.2 page 34 est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$. On sait que :

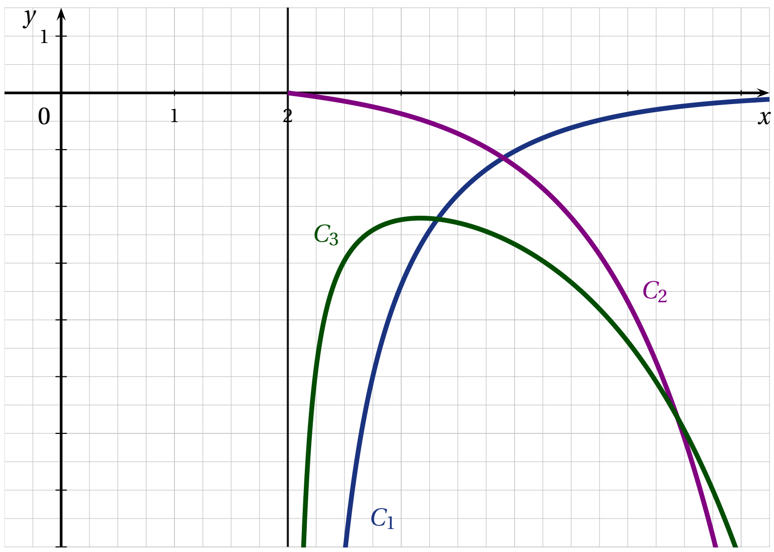
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;
- la courbe ($\mathscr{C}$) coupe l'axe des abscisses au point $(2\,;\,0)$;
- la courbe ($\mathscr{C}$) admet pour asymptote l'axe des abscisses.

FIGURE 2.2 – Courbe ($\mathscr{C}$) représentative de la fonction f de l'exercice 2.4



1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) ? Justifier.
3. On définit une fonction g sur $J =]2;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
   À l'aide des informations de l'énoncé, du graphique ou des réponses aux question précédentes :
   (a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.
   (c) En déduire laquelle des trois courbes de la figure 2.3 page 34 est la représentation graphique de la fonction g.

FIGURE 2.3 – Courbes de la question 3c de l'exercice 2.4



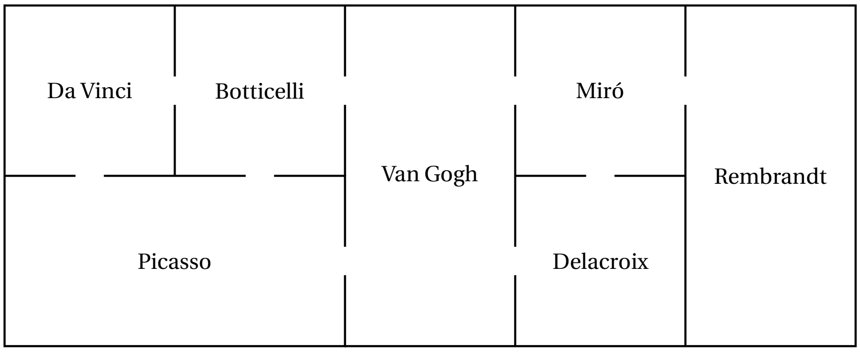
Exercice 2.5 (4 points).

Pour les élèves **suivant l'enseignement de spécialité**.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On construit un musée dont les pièces sont disposées comme indiqué sur la figure 2.4 de la présente page (les entrées et sorties du musée ne sont pas crées).
   (a) Montrer qu'il est impossible d'organiser un parcours dans ce musée qui emprunterait une et une seule fois chaque passage entre deux salles.
   (b) Quel passage doit-on condamner, ou quel passage doit-on créer pour qu'un tel trajet soit possible ? Dans quelle(s) pièce(s) doit-on alors créer l'entrée et la sortie du musée ?

FIGURE 2.4 – Figure de la question 1 de l'exercice 2.5



2. On donne la matrice d'adjacence M d'un graphe G et quelques unes de ses puissances. Répondre aux questions suivantes, en justifiant vos réponses soigneusement uniquement à l'aide des matrices données.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 9 & 4 & 13 & 8 & 8 \\ 9 & 23 & 9 & 15 & 4 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 7 & 7 & 3 \\ 4 & 15 & 8 & 15 & 2 & 6 & 2 \\ 13 & 4 & 7 & 2 & 11 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

   (a) Quel est l'ordre du graphe G ?
   (b) Ce graphe est-il orienté ?
   (c) Quel est l'ordre du sommet 3 ?
   (d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Une chaîne eulérienne ?
   (e) Quelle est la distance entre le sommet 2 et le sommet 7 ?
   (f) Quel est le diamètre de G ?
   (g) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 qui partent du sommet 6 et qui y reviennent ?