Mathématiques en Terminale STG

David ROBERT

2007–2008

Sommaire

Progression

Mois	Sem	Intitulé du chapitre
Sept	1	Optimisation à deux variables (3 sem)
	2	
	3	
	4	Nombre dérivé (3 sem)
Oct	5	
	6	
	7	Statistiques à 2 variables (2 sem)
	8	
Vacances d'automne du sam 27 oct au jeu 8 nov		
Nov	9 (3 j)	Fonction dérivée (3,5 sem)
	10	
	11	
	12	
Déc	13	Taux d'évolution (3 sem)
	14	
	15	
Vacances de Noël du sam 22 déc au lun 7 jan		
Jan	16	Logarithme népérien (3 sem)
	17	
	18	
	19	Probabilités (3 sem)
Fév	20	
	21	
Vacances d'hiver du sam 16 fév au lun 3 mar		
Mars	22	Exposants réels (3 sem)
	23	
	24	
	25	Suites numériques (3 sem)
Avr	26	
	27	
Vacances de printemps du sam 12 avr au lun 28 avr		
Mai	28	Fonction exponentielle (3 sem)
	29	
	30	
	31	
	32	
Juin	33	

Chapitre 1

Optimisation à deux variables

Sommaire

1.1 Équations de droites

1.1.1 Activités

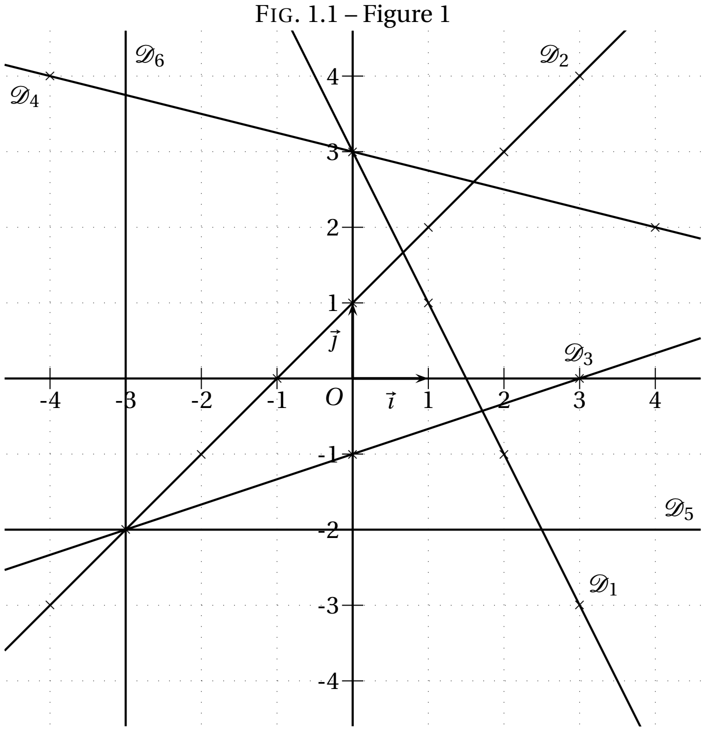
Activité 1.1 (Équations de droites (rappels)).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x + 0,5$, définie sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer si $A(150,5; -451)$ ou $B(-73,25; -219,5)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.
2. Dans chacun des cas suivants, dire si le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$:
   (a) $A\left(\frac{1}{3}; \frac{13}{6}\right)$ et $\mathscr{D}$: $y = 6x + \frac{1}{6}$;
   (b) $A(1; -7)$ et $\mathscr{D}$: $y = -\frac{3}{4}(x+2) - 5$;
   (c) $A(2; 5)$ et $\mathscr{D}$: $x = 5$;
   (d) $A\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ et $\mathscr{D}$: $y = \frac{1}{6}$;
3. La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite : $y = \frac{5}{2}x - 1$.
   (a) A est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
   (b) B est le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?
4. Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :
   - $\mathscr{D}_1 : y = -\frac{1}{2}x + 5$;
   - $\mathscr{D}_2 : y = 4x - 2$;
   - $\mathscr{D}_3 : y = -3$;
   - $\mathscr{D}_4 : y = \frac{3}{4}x - 4$;
   - $\mathscr{D}_5 : x = 6$;
5. Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :
   - $\mathscr{D}_1 : y = -5x + 10$;
   - $\mathscr{D}_2 : y = 6x - 14$;
   - $\mathscr{D}_3 : y = \frac{3x-1}{6}$;
   - $\mathscr{D}_4 : y = \frac{-2x+1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_5 : 2x - 5y = 3$;
6. Dans un même repère, tracer les droites suivantes :
   - $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3; 1)$ et de coefficient directeur -1 ;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3; 2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1; 0)$ et de coefficient directeur 3 ;
   - $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0; 2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
   - $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2; 2)$ et de coefficient directeur 0 ;
7. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :

(a) $A\,(1\,;\,2)$ et $B\,(3\,;\,-1)$;
(b) $A\,(4\,;\,4)$ et $B\,(-1\,;\,2)$;
(c) $A\,(0\,;\,-1)$ et $B\,(2\,;\,3)$;
(d) $A\,(-2\,;\,2)$ et $B\,(3\,;\,2)$;
(e) $A\,(1\,;\,3)$ et $B\,(1\,;\,4)$;
(f) $A\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ et $B\,(3\,;\,5)$.

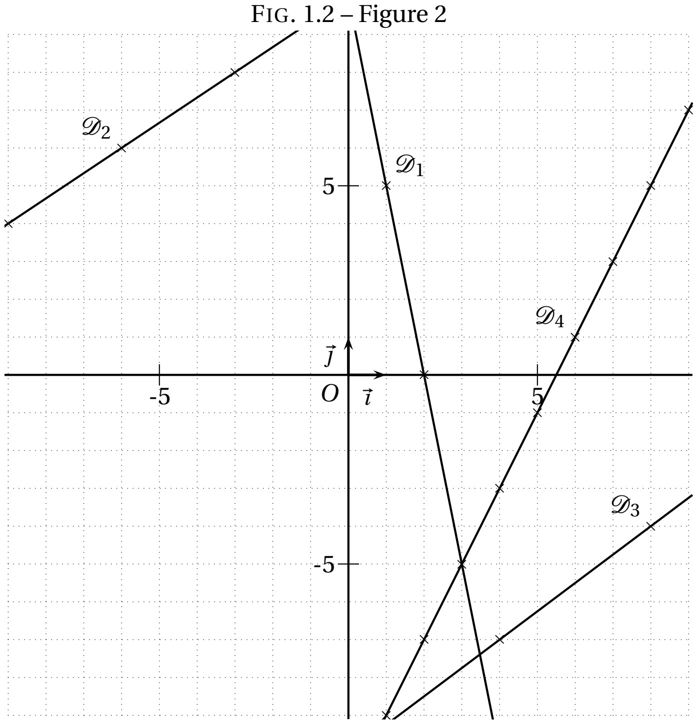
8. Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 1.1 de la présente page.

FIG. 1.1 – Figure 1



9. Même question pour les droites représentées sur la figure 1.2 de la présente page.

FIG. 1.2 – Figure 2



Activité 1.2 (Autres équations).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On cherche à identifier quel est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que x et y vérifient la relation : $2x+y=3$.

(a) Déterminer y lorsque $x = 1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera A.

(b) Déterminer y lorsque $x = 0$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera B.

(c) Déterminer x lorsque $y = -3$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera C.

(d) Déterminer x lorsque $y = -1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera D.

(e) Que constate-t-on concernant A, B, C et D ?

(f) Choisir un autre point ayant la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.

(g) Choisir un autre point n'ayant pas la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.

2. En vous inspirant de ce qui précède, représenter l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $3x - 2y = 4$.
3. Mêmes questions avec les relations suivantes :
   - $-x+3y=1$;
   - $-x-2y=3$;
   - $2x+0y=5$;
   - $0x+3y=2$.

   Que constate-t-on dans les deux derniers cas ?

Activité 1.3 (Droites parallèles, droites sécantes).
Activité 2 p169

1.1.2 Bilan et compléments

On admettra les propriétés suivantes :

Propriété 1.1. *Toute droite du plan admet une équation de la forme* $ax + by = c$ *où* $(a; b) \neq (0; 0)$.
Si $a = 0$ *la droite est parallèle à l'axe des abscisses.*
Si $b = 0$ *la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.*
Si $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$ *la droite est sécante aux deux axes.*

Propriété 1.2. *Soient* $\mathscr{D} : y = mx + p$ *et* $\mathscr{D}' : y = m'x + p'$ *deux droites.*
$\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur* ($m = m'$).

Propriété 1.3. *Soit* $\mathscr{D} : ax + by = c$.
Toute droite parallèle à $\mathscr{D}$ *admet une équation de la forme* $ax + by = c'$.
Toute droite d'équation $ax + by = c'$ *est parallèle à* $\mathscr{D}$.

Propriété 1.4. *Si les droites* $\mathscr{D} : ax + by = c$ *et* $\mathscr{D}' : a'x + b'y = c'$ *sont sécantes, les coordonnées* $(x; y)$ *de leur point d'intersection* I *vérifient le système* $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

1.1.3 Exercices

Exercices 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13 pages 170-171

1.2 Régions du plan

1.2.1 Activités

Activité 1.4.
1. (a) Dans un repère orthogonal tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x - 3y = 6$.

   (b) Choisir quatre points à coordonnées entières situés du même côté de $\mathscr{D}$ et calculer $2x - 3y$ pour chacun d'entre eux.

   (c) faire de même avec quatre autres points à coordonnées entières situés de l'autre côté de $\mathscr{D}$.

   (d) Que constate-t-on ?

   (e) Identifier la région du plan dont les points ont leurs coordonnées vérifiant $2x - 3y \geq 6$ (on hachurera le reste).
2. En vous inspirant de ce qui précède, faire de même pour la région caractérisée par l'inéquation $-3x - 4y \geq -12$ (on hachurera le reste).
3. Même question pour les inéquations $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
4. Quel système d'inéquations vérifie la région non hachurée ?

1.2.2 Bilan

On admettra la propriété suivante :

Propriété 1.5. *Toute droite d'équation $ax + by = c$ partage le plan en trois régions :*
- *un demi plan dont les coordonnées des points vérifient l'inéquation $ax + by > c$;*
- *un demi plan dont les coordonnées des points vérifient l'inéquation $ax + by < c$;*
- *la droite, elle-même (dont les coordonnées des points vérifient l'équation $ax + by = c$).*

1.2.3 Exercices

Exercices 15, 18 pages 174-175.

1.3 Programmation linéaire

1.3.1 Activités

Activités 5 et 6 pages 176-177.

1.3.2 Exercices

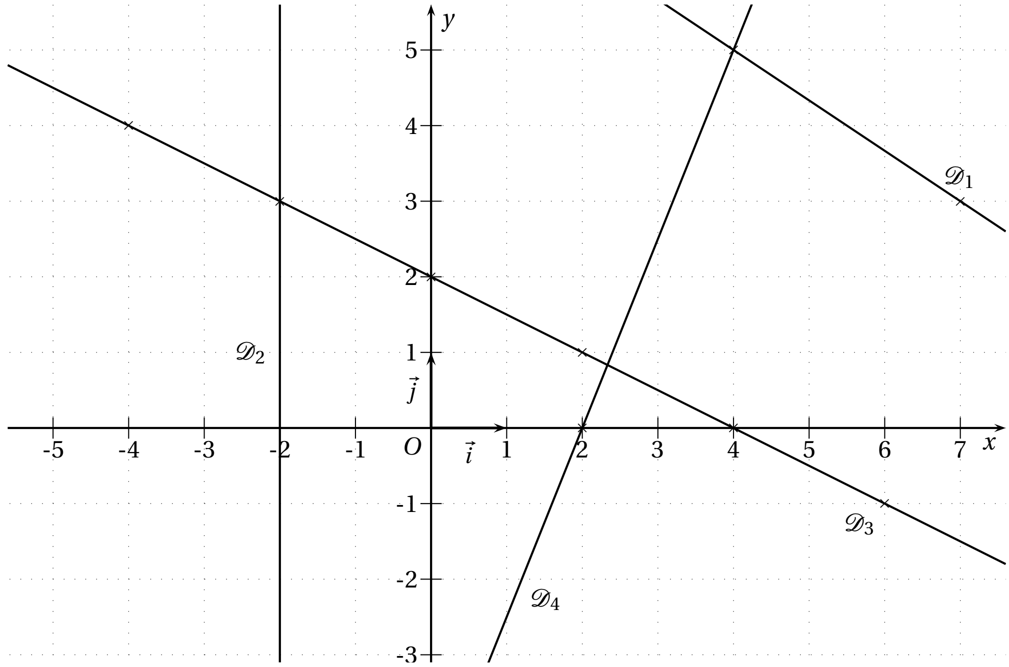
Exercices 20, 22 pages 178-179. Exercices 47 à 51 pages 186-188.

Devoir surveillé n°1

Équations de droites

EXERCICE 1 *4 points*

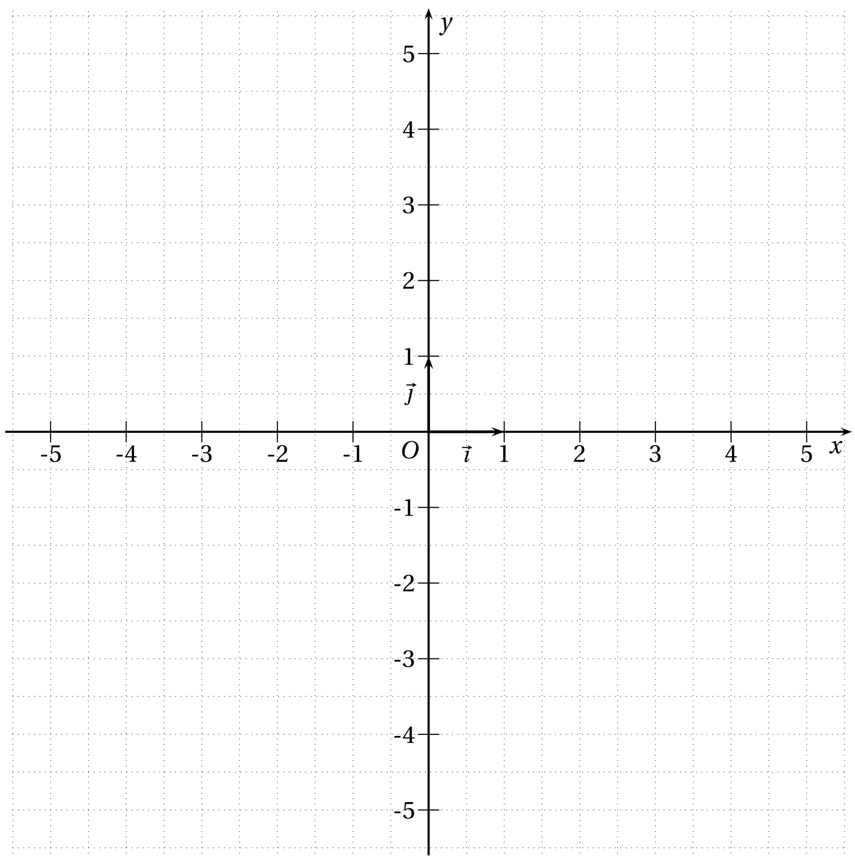
Déterminer une équation pour chacune des droites représentées dans le repère ci-dessous.



EXERCICE 2 *5 points*

Tracer dans le repère ci-dessous les droites suivantes :

- $d_1 : 2x - 3y = 6$
- $d_2 : 2y + 1 = 2$
- $d_3 : y - 5x = 10$
- $d_4 : 3x + 2y = 6$
- $d_5 : 3x + 2 = 5$
- $d_6 : -y + x = 2$



EXERCICE 3 *3 points*

Déterminer une équation des droites dans chacun des cas suivants :

- $\mathcal{D}_1$ est une droite passant par $A(2\,;\,3)$ et $B(3\,;\,0)$
- $\mathcal{D}_2$ est une droite passant par $C(0\,;\,1)$ et parallèle à $\mathcal{D}_1$.

EXERCICE 4 *6 points*

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2y - x = 3$.

1. Parmi les droites suivantes, indiquer, en justifiant, celles qui sont parallèles à $\mathcal{D}$:
   - $\mathcal{D}_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
   - $\mathcal{D}_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$
   - $\mathcal{D}_3 : 4y - 2x = 1$
   - $\mathcal{D}_4 : 3x - 6y = 2$
2. Déterminer une équation de chacune des droites suivantes :
   - $\mathcal{D}'$ qui est parallèle à $\mathcal{D}$ et qui passe par $A(2\,;\,3)$
   - $\mathcal{D}''$ qui est parallèle à $\mathcal{D}_2$ et qui passe par $A(2\,;\,3)$

EXERCICE 5 *2 points*

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites suivantes :

- $\mathcal{D}_1$ d'équation $2x - y = 1$
- $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 3x + 2$.

Chapitre 2

Fonction dérivée

Sommaire

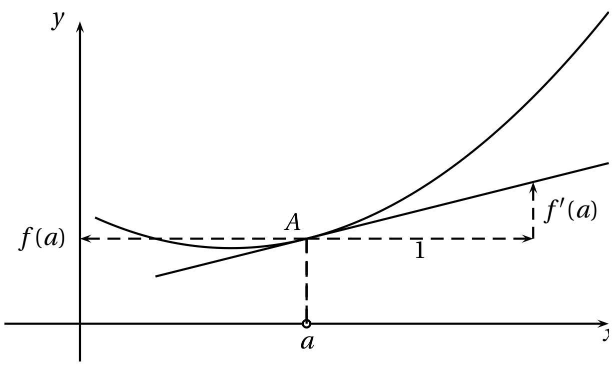
2.1 Nombre dérivé (rappels)

2.1.1 Activité

Activité 3 p 66 : tangente et nombre dérivé

2.1.2 Bilan

Définition 2.1. Le *nombre dérivé* d'une fonction f en a est le coeffcient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $\left(a; f(a)\right)$. Il se note $f'(a)$. On dit alors que f est dérivable en a.



Propriété 2.1. *Par définition, la tangente au point* $A\left(a; f(a)\right)$ *a une équation de la forme* $y = f'(a)x + p$.

Remarque. Pour trouver p on remplace x et y par les coordonnées de A.

2.1.3 Exercices

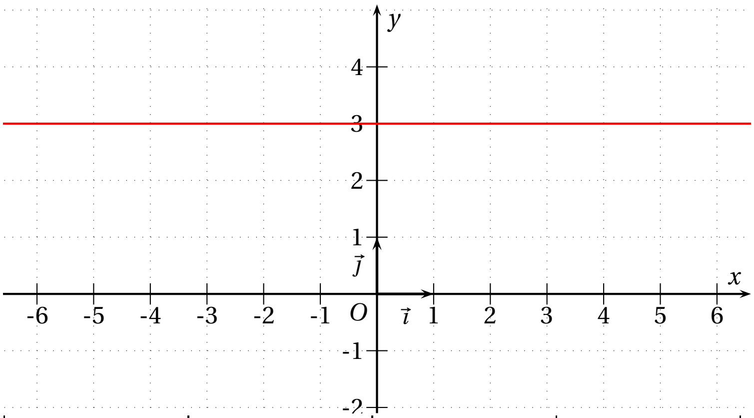
Exercices 10 à 14 p 67.

2.2 Fonction dérivée

2.2.1 Activités

Activité 2.1 (Fonctions dérivées des fonctions usuelles).
Dans chacun des cas suivants, compléter le tableau et conjecturer l'expression de $f'(x)$.

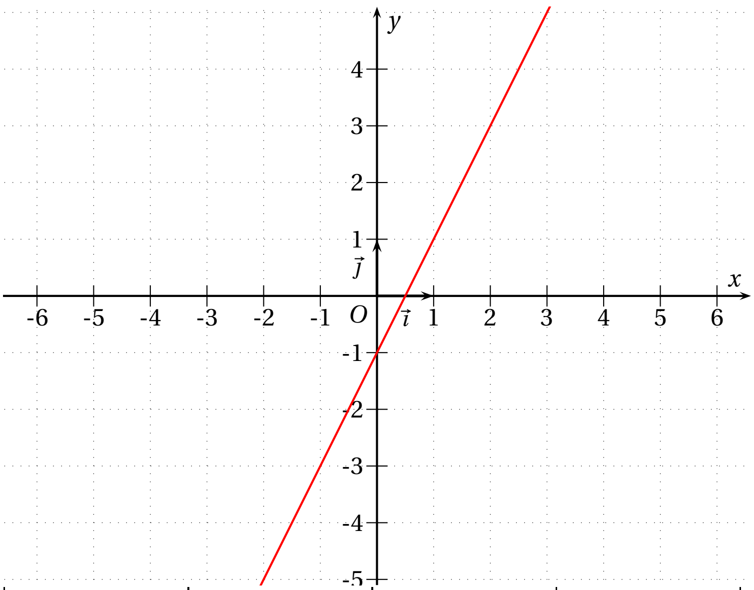
FIG. 2.1 – Fonction constante : $f(x) = 3$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$$f'(x) = \ldots\ldots$$

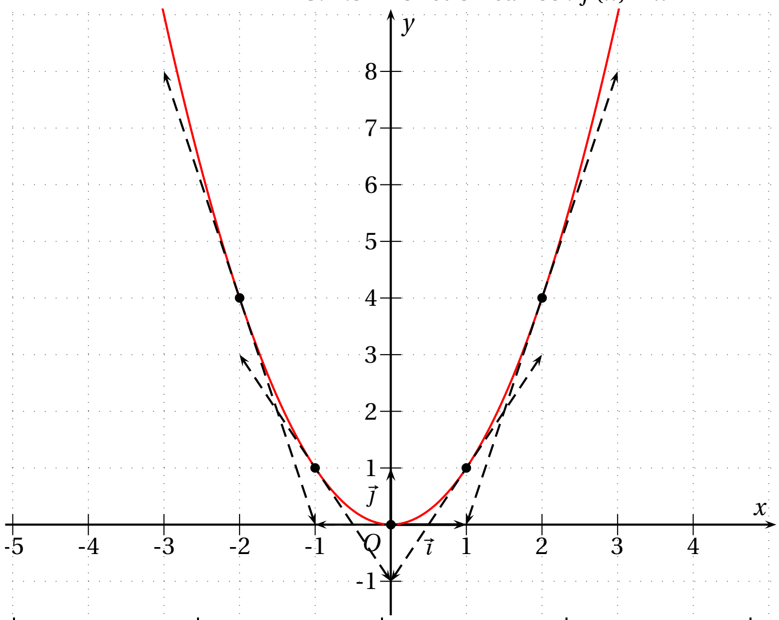
FIG. 2.2 – Fonction affine : $f(x) = 2x - 1$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$$f'(x) = \ldots\ldots$$

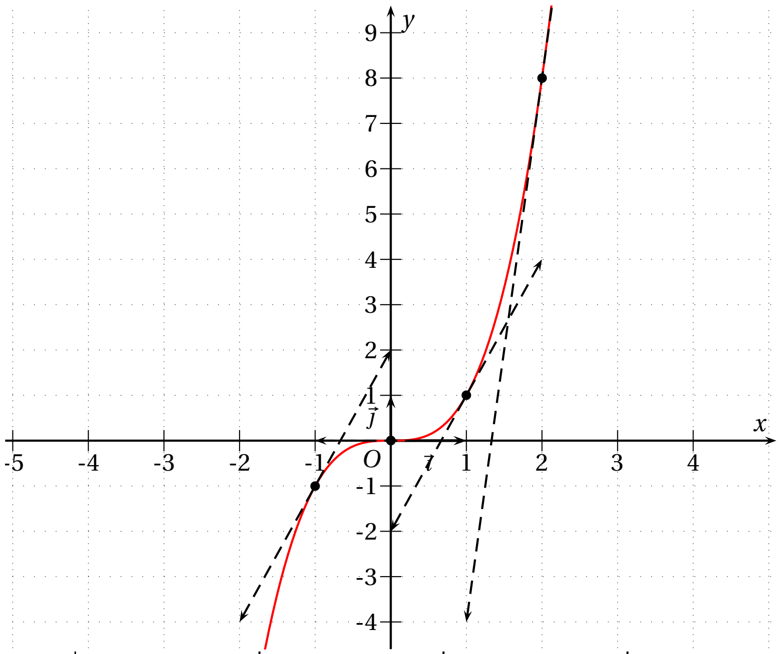
FIG. 2.3 – Fonction carrée : $f(x) = x^2$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

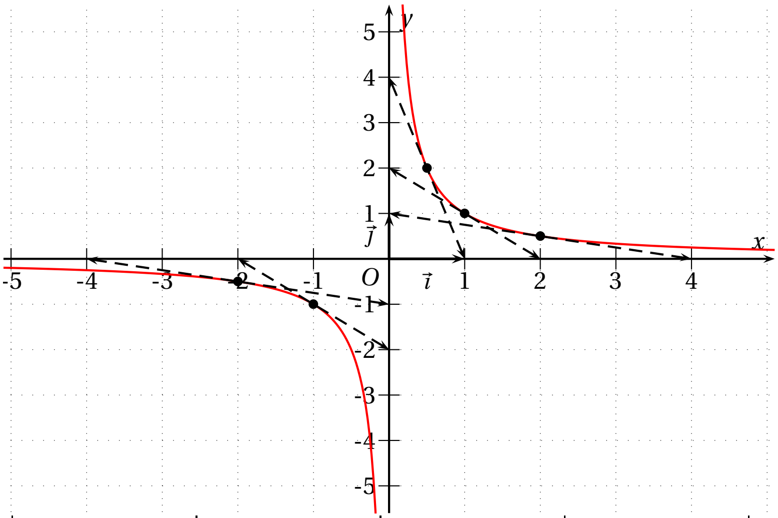
FIG. 2.4 – Fonction cube : $f(x) = x^3$



x	-1	0	1	2
$f'(x)$				

$f'(x) = \ldots\ldots$

FIG. 2.5 – Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$



x	-2	-1	$0,5$	1	2
$f'(x)$					

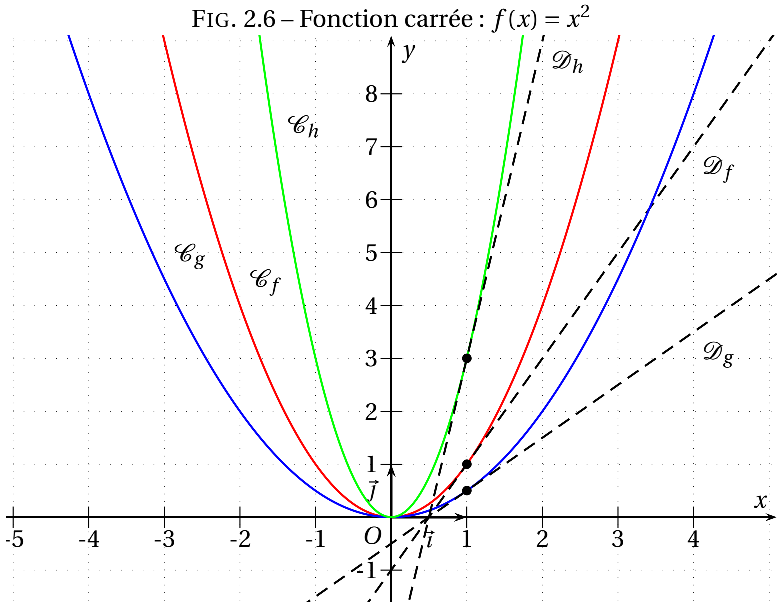
$$\boxed{f'(x) = \ldots\ldots}$$

Activité 2.2 (Fonction dérivée du produit d'une fonction par une constante).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{D}_f$ sa tangente au point d'abscisse 1.

Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{f(x)}{2}$ et $h(x) = 3f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On nomme $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_h$ leurs tangentes respectives au point d'abscisse 1.
On nomme enfin $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes respectives de f, g et h.

1. Déterminer par lecture graphique $f'(1)$, $g'(1)$ et $h'(1)$.
2. Conjecturer l'expression de $g'(x)$ et de $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$.

FIG. 2.6 – Fonction carrée : $f(x) = x^2$



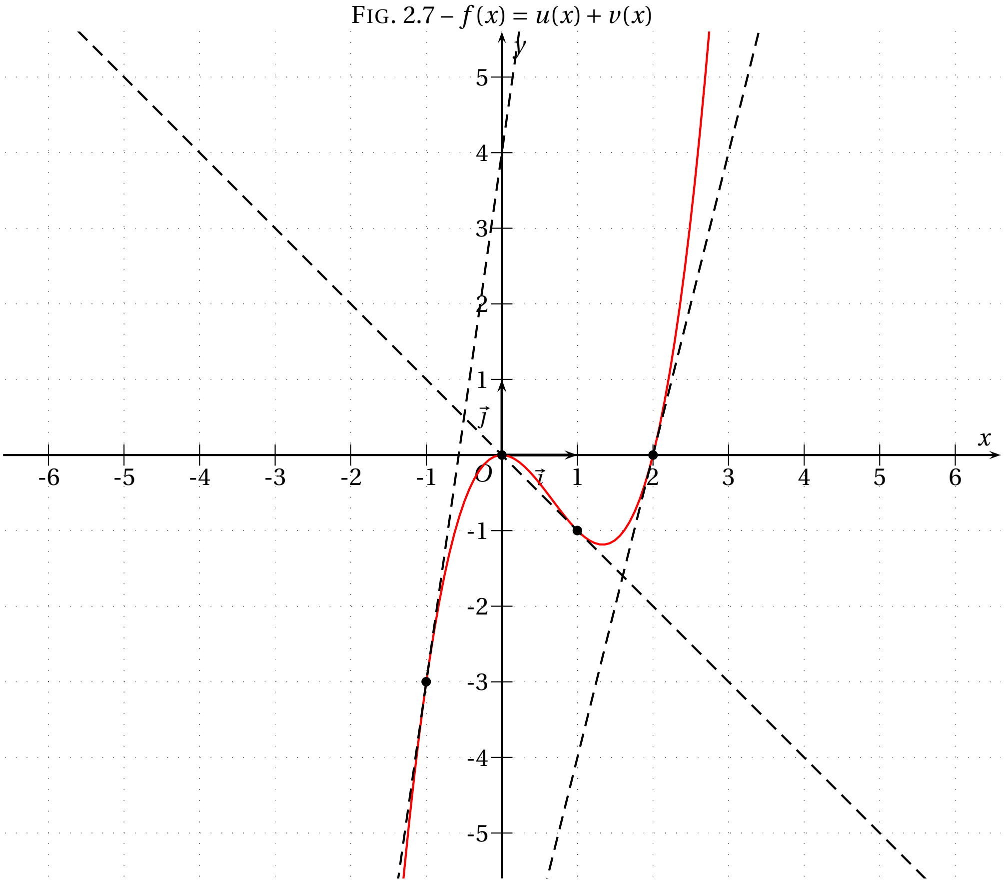
Activité 2.3 (Fonction dérivée d'une somme de fonction).
Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

1. Déterminer $u'(x)$ et $v'(x)$.
2. On donne sur la figure 2.7 de la présente page la courbe représentative de f ainsi que quelques tangentes.
   À l'aide de la question précédente et de la figure, compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1	2
$u'(x)$				
$v'(x)$				
$f'(x)$				

3. Conjecturer l'expression de $f'(x)$ en fonction de $u'(x)$ et de $v'(x)$.

FIG. 2.7 – $f(x) = u(x) + v(x)$



Devoir surveillé n°2

Dérivation

EXERCICE 1 *3 points*

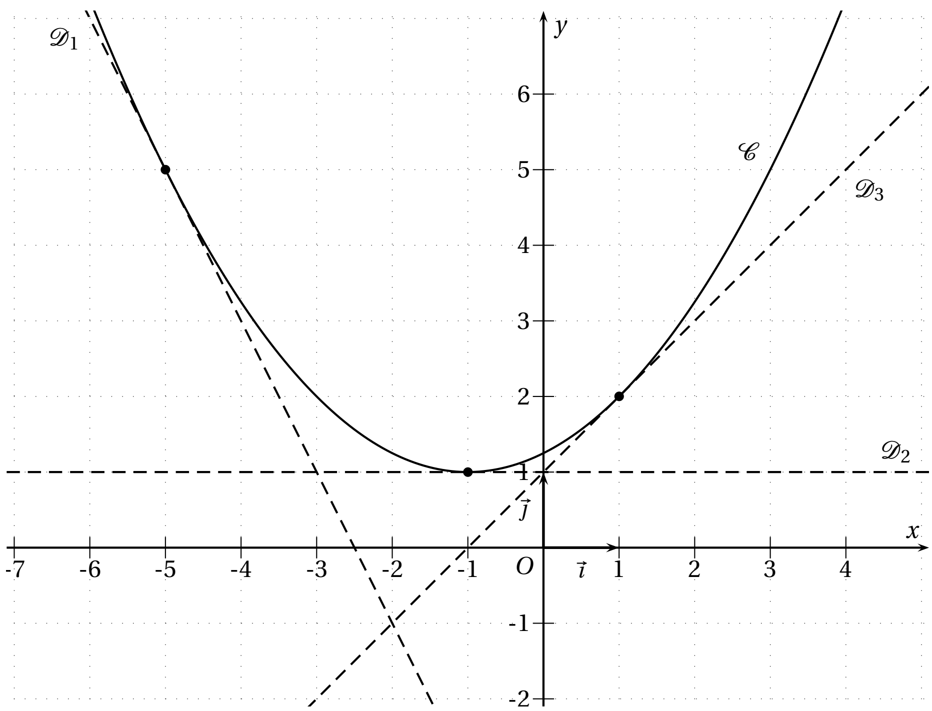
Cet exercice est à faire sur l'énoncé.
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f.
Les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont des tangentes à la courbe.

1. Associer à chaque tangente l'équation qui lui correspond :

Équation	$y=1$	$y=x+1$	$y=-2x-5$
Tangente			

2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	-1	1
$f(x)$			
$f'(x)$			



EXERCICE 2 *6 points*

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer sa fonction dérivée.

- f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
- g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-3x^4$.
- h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\left(x^3-1\right)\left(4x^2+x\right)$.
- C définie sur $\mathbb{R}$ par $C(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.
- D définie sur $\mathbb{R}$ par $D(x)=\left(x^2-1\right)^4$.
- F définie sur $]2\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{3x^2+x-1}{4x-5}$.

EXERCICE 3 *3 points*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-4x^2+2x-1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la dérivée f' de f.
2. (a) Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
   (b) Trouver une équation de T, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

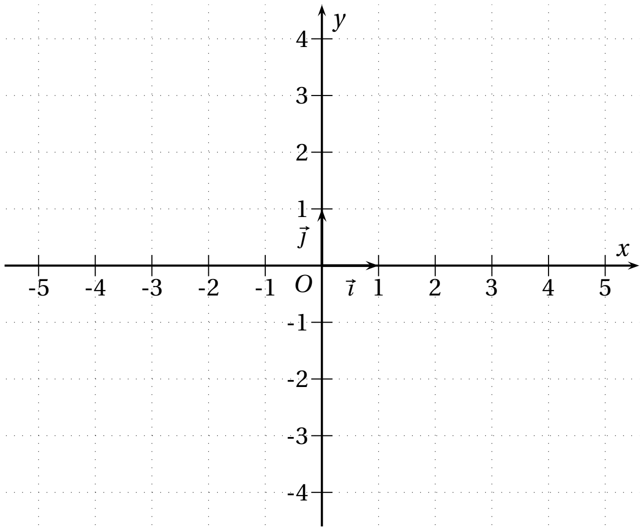
EXERCICE 4 *4 points*

Cet exercice est à faire sur l'énoncé.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On a les données suivantes :

x	-2	0	1	4
$f(x)$	0	1	-1	-3
$f'(x)$	2	$-\dfrac{1}{2}$	-3	0

1. Dans le repère ci-contre, à l'aide de ces valeurs, tracer les points et les tangentes à $\mathscr{C}$ quand il est possible de le faire.
2. Tracer alors une courbe susceptible de représenter f.



EXERCICE 5 *4 points*

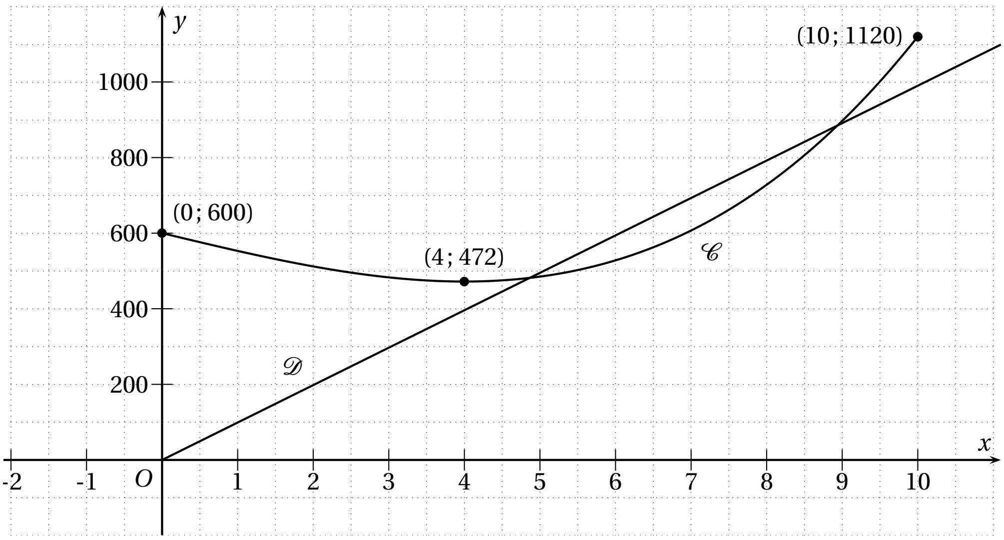
Cet exercice est à faire sur l'énoncé.

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = x^3 - 48x + 600$$

dans un repère orthogonal dont la graduation est précisée sur les axes.

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = 99x$.



Indiquer Vrai ou Faux en face de chacune des propositions suivantes (aucune justification n'est demandée) sachant que :

- une indication correcte rapporte 0,5 point ;
- une indication incorrecte enlève 0,25 point ;
- une absence d'indication ne rapporte ni n'enlève de point.

1. f est croissante sur $[0\,;10]$;
2. $f'(x) = 3x^2 - 48$;
3. $f'(4) = 0$;
4. pour tout $x \in [0\,;10]$, $f(x) \geqslant 472$;
5. l'équation $f(x) = 99x$ admet deux solutions dans l'intervalle $[4\,;10]$;
6. $f'(x) = 3(x-4)(x+4)$;
7. pour tout $x \in [0\,;10]$, $600 \leqslant f(x) \leqslant 1\,120$;
8. $f(x) < 99x$ pour $x \in [4\,;9[$.

Devoir surveillé n°3

Statistiques – Fonction dérivée

EXERCICE 1 *8 points*

Le tableau suivant donne l'évolution du montant du PIB (produit intérieur brut) par habitant de l'Union européenne, exprimé en milliers de dollars, entre 1 994 et 1 999 :

Année	Rang x_i	PIB par habitant y_i
1 994	1	18,3
1 995	2	19,4
1 996	3	20
1 997	4	20,6
1 998	5	21,5
1 999	6	22,5

1. Représenter, dans le repère ci-dessous, le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ pour $1 \leq i \leq 6$.
2. (a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage (arrondies au centième).

   (b) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ qui représente un ajustement affine de ce nuage par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millième).

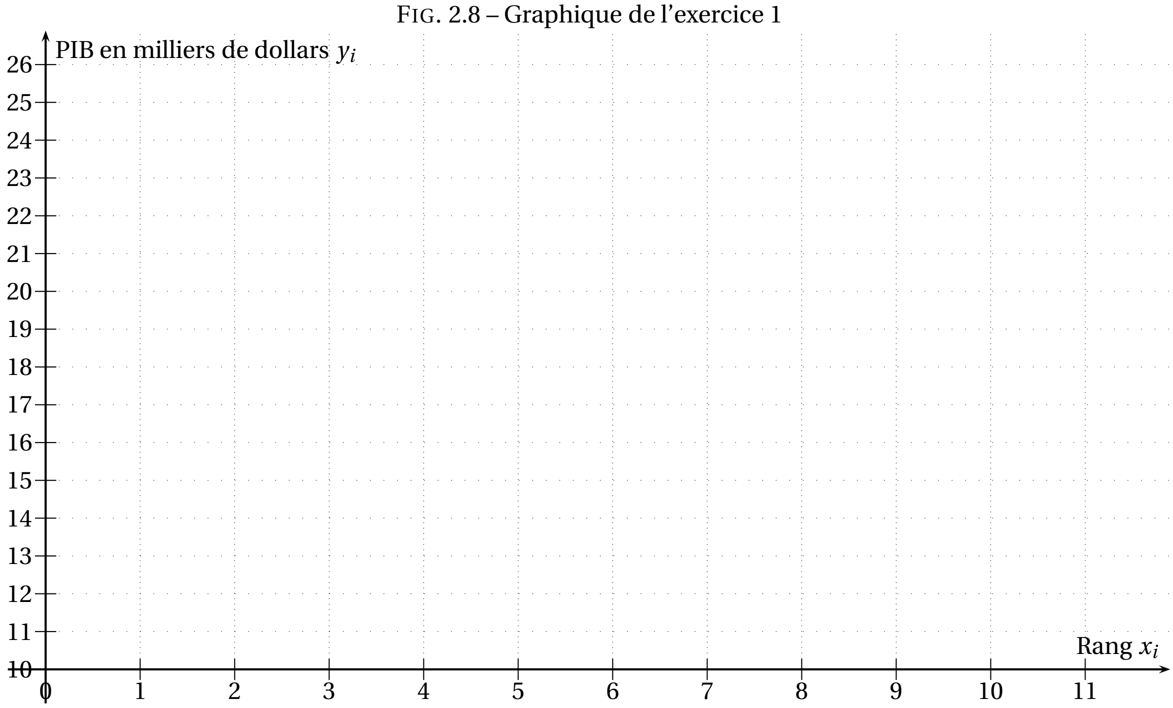
   (c) Tracer $\mathscr{D}$ dans le même repère.
3. (a) Lire graphiquement l'année à partir de laquelle le PIB par habitant de l'Union européenne dépassera 25 000 dollars.
   Justifier la réponse en faisant apparaître tous les tracés utiles sur le graphique.

   (b) En utilisant l'ajustement affine obtenu à la question 2b :

   i. calculer le PIB par habitant de l'Union européenne en 2 000, puis en 2 003 ;

   ii. déterminer en quelle année il devrait atteindre 30 000 dollars.
4. En 2 003, le PIB par habitant de l'Union européenne était de 23 052 dollars.
   Calculer, en pourcentage, l'erreur commise en adoptant l'estimation obtenue à la question 2b.

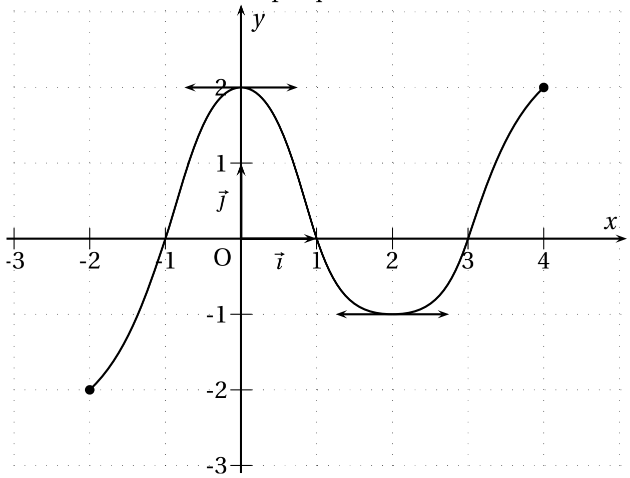
FIG. 2.8 – Graphique de l'exercice 1



EXERCICE 2 *4,5 points*

f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$.
Sur le graphique ci-dessous est tracée $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f.

FIG. 2.9 – Graphique de l'exercice 2



1. (a) Dresser le tableau de signes de f.
   (b) Dresser le tableau de signes de f', où f' est la fonction dérivée de f.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
2. Combien y a-t-il de solutions aux équations suivantes :
   (a) $f(x) = 1$? (b) $f(x) = -1,5$? (c) $f(x) = 2,5$?

EXERCICE 3 *3 points*

Soit f la fonction définie sur $[0\,;8]$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{6x+5}$

1. Déterminer f', la fonction dérivée de f.
2. Déterminer le signe de h' et dresser le tableau de varations de h.
   On indiquera les valeurs extrêmes.

EXERCICE 4 *4,5 points*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;2]$ par : $f(x) = 2x^3 - 1,5x^2 - 3x$

1. Déterminer f', la fonction dérivée de f.
2. Montrer que $f'(x) = 6(x-1)(x+0,5)$.
3. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   On pourra faire un tableau de signes.
4. En déduire le tableau de variations de f.
5. Quels sont les minimum et maximum de $f(x)$?

Devoir surveillé n°6

Taux d'évolution

EXERCICE 1 *QCM - 8 points*

Pour chaque question, une seule réponse est correcte (éventuellement arrondie). Indiquer sur l'énoncé celle qui convient sachant que :

- une bonne indication rapporte 1 point ;
- une mauvaise pénalise de 0,5 point ;
- l'absence d'indication rapporte 0 point ;
- si le total des points de cet exercice est négatif, il est ramené à 0.

1. Le prix d'un ordinateur baisse de 10 % la première année puis de 30 % la deuxième année. Sur les deux années, la baisse totale a été de :

   (a) 43 % (b) 37 % (c) 40 % (d) 31 %

2. Le prix d'un livre augmente de 7,3 % donc le prix a été multiplié par :

   (a) 0,073 (b) 1,730 (c) 0,927 (d) 1,073

3. Le prix d'un paquet de cigarette a augmenté de 20 % en 2 004, 10 % en 2 005 et 5 % en 2 006. Le taux moyen d'augmentation par an durant ces trois années a été de :

   (a) 38,6 % (b) 11,5 % (c) 35 % (d) 11,7 %

4. Le taux d'inflation annuel en France en 1 978 a été de 17 %. Le taux mensuel moyen était donc de :

   (a) 1,17 % (b) 1,32 % (c) 0,97 % (d) 1,41 %

5. Le prix du baril de pétrole a été multiplié par 3,5 en 10 ans, cela correspond à une augmentation de :

   (a) 350 % (b) 35 % (c) 450 % (d) 250 %

6. Le prix d'un vêtement a augmenté de 20 % en décembre, et il a diminué de 30 % en janvier. La variation totale est :

   (a) Une augmentation de 10 % (c) Une diminution de 16 %

   (b) Une diminution de 10 % (d) Une augmentation de 4 %

7. Si un prix passe d'un indice 700 à un indice 770, l'augmentation est de :

   (a) 70 % (b) 10 % (c) 15 % (d) 17 %

8. Le prix d'un composant électronique a baissé de 10 % par an depuis 10 ans. Cela correspond à une baisse totale de :

   (a) 100 % (b) 50 % (c) 65 % (d) 159 %

EXERCICE 2 *5 points*

Le tableau suivant donne la répartition des intemautes par continent pour les années 2 001, 2 002, 2 003 et 2 004 en millions d'individus.

Il est incomplet. Pour le remplir il faut utiliser les réponses aux différentes questions.

zone	2 001	2 002	2 003	2 004	Taux moyen annuel	Estimation 2 005
Amérique du Nord	166,7	182,6	196	243		
Amérique latine	24,8	33,3	40,6	47,3	24 %	
Afrique/Moyen orient	8,4	11,4	21,3	31,2		
Asie du Pacifique	125,9	187,2	298		44 %	
Europe	143,3		221,1	252,5	21 %	

1. Le taux d'évolution en Asie pacifique entre 2 003 et 2 004 vaut 26 %. Calculer le nombre d'intemautes en millions, à 10^{-1} près, en Asie pacifique en 2 004.
2. En prenant pour base 100, le nombre d'internautes en Europe en 2 001, on obtient un indice 133,2 pour l'année 2 002. Calculer le nombre d'internautes, â 10^{-1} près, en Europe en 2 002.
3. Calculer les taux annuels moyens, à 10^{-2} près, entre 2 001 et 2 004 pour l'Amérique du Nord et l'Afrique/Moyen-Orient. Classer les cinq zones par ordre croissant de taux moyens annuels d'évolution.
4. Un organisme utilise le taux moyen annuel pour estimer le nombre d'internautes dans les cinq zones en 2 005. Calculer ces cinq prévisions. Que pensez-vous de la méthode choisie ?

EXERCICE 3 *7 points*

Les résultats seront arrondis à 0,01 %.

Un gouvernement envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans entre 2 001 et 2 006.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année. Déterminer ce pourcentage de baisse annuel.
2. La première année, cet impôt baisse de 5 % ; la deuxième année, la baisse est de 1 % et, la troisième année elle est de 3 %.
   (a) Quelle est la baisse en pourcentage de cet impôt au terme de ces premières années.
   (b) Pour atteindre son objectif, quel pourcentage annuel de baisse doit décider le gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années.
3. M. Picsou a payé 2 600 € d'impôt en 2 006.
   (a) Quelle somme aurait-il dû payer en 2 001 (arrondir à l'euro) ?
   (b) M. Picsou estime que la somme payée en 2 006 représente 90 % de celle qu'il devra en 2 007. Déterminer cette somme (arrondir à l'euro) ?

Devoir surveillé n°5

Baccalauréat blanc – Spécialité : Communication et gestion des ressources humaines

Ce sujet comporte 3 pages.

Du papier millimétré est mis à disposition des candidats.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Relever sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse juste rapporte 1 *point ; une réponse fausse enlève* $0,25$ *point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

1. Le prix d'un article a augmenté de 2 % par mois chaque mois de l'année 2006.
   Le taux d'évolution global sur l'année 2006 est :
   a. inférieur à 24 % b. égal à 24 % c. supérieur à 24 %.

Les questions suivantes se rapportent au tableau ci-dessous. C'est un extrait du tableau de l'indice de référence des loyers en France, base 100 au deuxième trimestre 2004, publié par l'INSEE. Les indices sont calculés à la fin de chaque trimestre.

Période	Indice de référence
Premier trimestre 2003	97,10
Premier trimestre 2004	99,33
Premier trimestre 2005	
Premier trimestre 2006	104,61

Source : INSEE

2. Sur une année, du premier trimestre 2004 au premier trimestre 2005, les loyers ont augmenté de 2,79 %.
   Au premier trimestre 2005, l'indice de référence des loyers arrondi à 10^{-2} est égal à :
   a. $102,12$ b. $101,77$ c. $102,10$
3. Entre le premier trimestre 2003 (indice $97,10$) et le premier trimestre 2004 (indice $99,33$), le taux annuel d'évolution des loyers est :
   a. 2,23 % (arrondi à 0,01 %) b. 2,30 % (arrondi à 0,01 %) c. supérieur à 2,40 %.
4. Entre le premier trimestre 2004 (indice $99,33$) et le premier trimestre 2006 (indice 104,61) le taux moyen annuel d'évolution des loyers arrondi à 0,01 % est :
   a. 2,62 % b. 2,31 % c. 2,64 %.

EXERCICE 2

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.
Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \text{ où } x \text{ est compris entre 1 et 30.}$$

Chaque objet est vendu 110 €.

Partie A : Étude du coût

1. Recopier sur sa copie et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	10	15	16	24	25	30
$C(x)$						

2. Déterminer la fonction dérivée $C'(x)$.
3. Lorsqu'on fabrique x objets, le coût marginal à l'unité x est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire ; on le note $C_m(x)$.
   (a) Calculer à l'aide des résultats de la question 1 les nombres $C_m(15)$ et $C_m(24)$.
   (b) Calculer à l'aide des résultats de la question 2 les nombres $C'(15)$ et $C'(24)$.
   (c) Quelle remarque pouvez-vous faire en observant ces résultats ?

Partie B : Étude du bénéfice

1. Montrer que la fonction bénéfice est donnée par : $B(x) = -x^2 + 50x - 121$.
2. Recopier sur sa copie et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	10	15	16	24	25	30
$B(x)$						

3. Déterminer la fonction dérivée $B'(x)$.
4. Lorsqu'on fabrique x objets, le bénéfice marginal à l'unité x est le bénéfice obtenu par la fabrication et la vente d'une unité supplémentaire ; on le note $B_m(x)$.
   (a) Calculer à l'aide des résultats de la question 2 les nombres $B_m(15)$ et $B_m(24)$.
   (b) Calculer à l'aide des résultats de la question 3 les nombres $B'(15)$ et $B'(24)$.
   (c) Quelle remarque pouvez-vous faire en observant ces résultats ?

Partie C : Étude du coût moyen

Le coût moyen de production d'un objet est donné par : $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Montrer que : $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.
2. On admet que le coût moyen est minimal lorsque la dérivée s'annule.
   (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) Montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{(x+11)(x-11)}{x^2}$.
   (c) Déterminer la production qui rend minimal le coût moyen de production ; calculer ce coût moyen et le bénéfice correpondant.

EXERCICE 3

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
rang x_i	0	1	2	3	4
montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. *On donnera le résultat arrondi à l'unité.*
2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i ; y_i\right)$ dans un repère orthogonal :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une unité ;
   - sur l'axe des ordonnées, on placera 2 200 à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 euros.
3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
   Donner une équation de $\mathcal{D}$, la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.
4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?
5. En fait, le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.
   Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

Devoir surveillé n°5 – Corrigé

Baccalauréat blanc – Spécialité : Communication et gestion des ressources humaines

EXERCICE 1

1. Le prix d'un article a augmenté de 2 % par mois chaque mois de l'année 2006.
Le taux d'évolution global sur l'année 2006 est :
a. inférieur à 24 % b. égal à 24 % c. supérieur à 24 %.

Les questions suivantes se rapportent au tableau ci-dessous. C'est un extrait du tableau de l'indice de référence des loyers en France, base 100 au deuxième trimestre 2004, publié par l'INSEE. Les indices sont calculés à la fin de chaque trimestre.

Période	Indice de référence
Premier trimestre 2003	97,10
Premier trimestre 2004	99,33
Premier trimestre 2005	
Premier trimestre 2006	104,61

Source : INSEE

2. Sur une année, du premier trimestre 2004 au premier trimestre 2005, les loyers ont augmenté de 2,79 %.
Au premier trimestre 2005, l'indice de référence des loyers arrondi à 10^{-2} est égal à :
a. $102,12$ b. $101,77$ c. $102,10$
3. Entre le premier trimestre 2003 (indice $97,10$) et le premier trimestre 2004 (indice $99,33$), le taux annuel d'évolution des loyers est :
a. 2,23 % (arrondi à 0,01 %) b. 2,30 % (arrondi à 0,01 %) c. supérieur à 2,40 %.
4. Entre le premier trimestre 2004 (indice $99,33$) et le premier trimestre 2006 (indice 104,61) le taux moyen annuel d'évolution des loyers arrondi à 0,01 % est :
a. 2,62 % b. 2,31 % c. 2,64 %.

On rappelle que dans ce QCM, aucune justification n'est demandée.

Question	Réponse	Justification
1	c	$1,02^{12} \approx 1,268$; soit 26,8 % d'augmentation environ
2	c	$99,33 \times 1,0279 \approx 102,10$
3	b	$\dfrac{99,33}{97,10} \approx 1,0230$ soit 2,30 % d'augmentation environ
4	a	$\sqrt{\dfrac{104,61}{99,33}} \approx 1,0262$ soit 2,62 % d'augmentation environ

EXERCICE 2

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.
Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \text{ où } x \text{ est compris entre 1 et 30.}$$

Chaque objet est vendu 110 €.

Partie A : Étude du coût

1. Recopier sur sa copie et compléter le tableau de valeurs suivant :

Le tableur de la calculatrice donne

x	10	15	16	24	25	30
$C(x)$	821	1 246	1 337	2 137	2 246	2 821

2. Déterminer la fonction dérivée $C'(x)$.

$C(x) = x^2 + 60x + 121$ donc $C'(x) = 2x + 60$.

3. Lorsqu'on fabrique x objets, le coût marginal à l'unité x est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire ; on le note $C_m(x)$.

(a) Calculer à l'aide des résultats de la question 1 les nombres $C_m(15)$ et $C_m(24)$.

$C_m(x) = C(x+1) - C(x)$ donc :
$C_m(15) = C(16) - C(15) = 1337 - 1246 = 91$ soit 91 €.
$C_m(24) = C(25) - C(24) = 2246 - 2137 = 109$ soit 109 €.

(b) Calculer à l'aide des résultats de la question 2 les nombres $C'(15)$ et $C'(24)$.

$C'(x) = 2x + 60$ donc :
$C'(15) = 2 \times 15 + 60 = 90$ et $C'(24) = 2 \times 24 + 60 = 108$.

(c) Quelle remarque pouvez-vous faire en observant ces résultats ?

On remarque que, dans chaque cas, le nombre dérivé du coût total est très proche du coût marginal.

Partie B : Étude du bénéfice

1. Montrer que la fonction bénéfice est donnée par : $B(x) = -x^2 + 50x - 121$.

Chaque objet étant vendu 110 €, la fonction bénéfice est donnée par :
$B(x) = 110x - C(x) = 110x - (x^2 + 60x + 121) = 110x - x^2 - 60x - 121 = -x^2 + 50x - 121$.

2. Recopier sur sa copie et compléter le tableau de valeurs suivant :

Le tableur de la calculatrice donne :

x	10	15	16	24	25	30
$B(x)$	279	404	423	503	504	479

3. Déterminer la fonction dérivée $B'(x)$.

$B(x) = -x^2 + 50x - 121$ donc : $B'(x) = -2x + 50$.

4. Lorsqu'on fabrique x objets, le bénéfice marginal à l'unité x est le bénéfice obtenu par la fabrication et la vente d'une unité supplémentaire ; on le note $B_m(x)$.

(a) Calculer à l'aide des résultats de la question 2 les nombres $B_m(15)$ et $B_m(24)$.

Le bénéfice marginal est : $B_m(x) = B(x+1) - B(x)$ donc :
$B_m(15) = B(16) - B(15) = 423 - 404 = 19$ soit 19 €
$B_m(24) = B(25) - B(24) = 504 - 503 = 1$ soit 1 €

(b) Calculer à l'aide des résultats de la question 3 les nombres $B'(15)$ et $B'(24)$.

$B'(x) = -2x + 50$ donc :
$B'(15) = 20$ et $B'(24) = 2$.

(c) Quelle remarque pouvez-vous faire en observant ces résultats ?

On remarque que, dans chaque cas, le nombre dérivé du bénéfice total est très proche du bénéfice marginal.

Partie C : Étude du coût moyen

Le coût moyen de production d'un objet est donné par : $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Montrer que : $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.

On a : $f(x) = \dfrac{x^2 + 60x + 121}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{60x}{x} + \dfrac{121}{x} = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.

2. On admet que le coût moyen est minimal lorsque la dérivée s'annule.
   (a) Calculer la dérivée de f.

   $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$ donc $f'(x) = 1 + 0 + 121 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{x^2 - 121}{x^2}$.

   (b) Montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{(x+11)(x-11)}{x^2}$.

   $\dfrac{(x+11)(x-11)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 11^2}{x^2} = \dfrac{x^2 - 121}{x^2} = f'(x)$.
   On a utilisé l'identité remarquable : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

   (c) Déterminer la production qui rend minimal le coût moyen de production; calculer ce coût moyen et le bénéfice correspondant.

   $f'(x) = 0$ équivaut à : $(x+11)(x-11) = 0$ soit $x = -11$ ou $x = 11$; mais $x > 0$ donc :
   le coût moyen est minimal lorsque $x = 11$
   - le coût moyen est alors : $C(11) = 902$ soit 902 €
   - le bénéfice correspondant : $B(11) = 308$ soit 308 €.

EXERCICE 3

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
rang x_i	0	1	2	3	4
montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. *On donnera le résultat arrondi à l'unité.*

   $\dfrac{2\,249}{2\,229} \approx 1{,}0986$ soit 10 % d'augmentation environ.
   Ou bien $t = \dfrac{2\,449 - 2\,229}{2\,229} \times 100 \approx 9{,}869$ soit 10 % d'augmentation environ.

2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal.

   Voir figure 2.14 page 47.

3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
   Donner une équation de $\mathscr{D}$, la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter la droite $\mathscr{D}$ dans le repère précédent.

   La calculatrice donne : $a \approx 54{,}9$ et $b \approx 2229{,}6$.
   D'où l'équation de $\mathscr{D}$: $y = 54{,}9x + 2229{,}6$.
   La droite $\mathscr{D}$ passe par les points : $(0\,;\,2229{,}6)$ et $(4\,;\,2449{,}2)$.

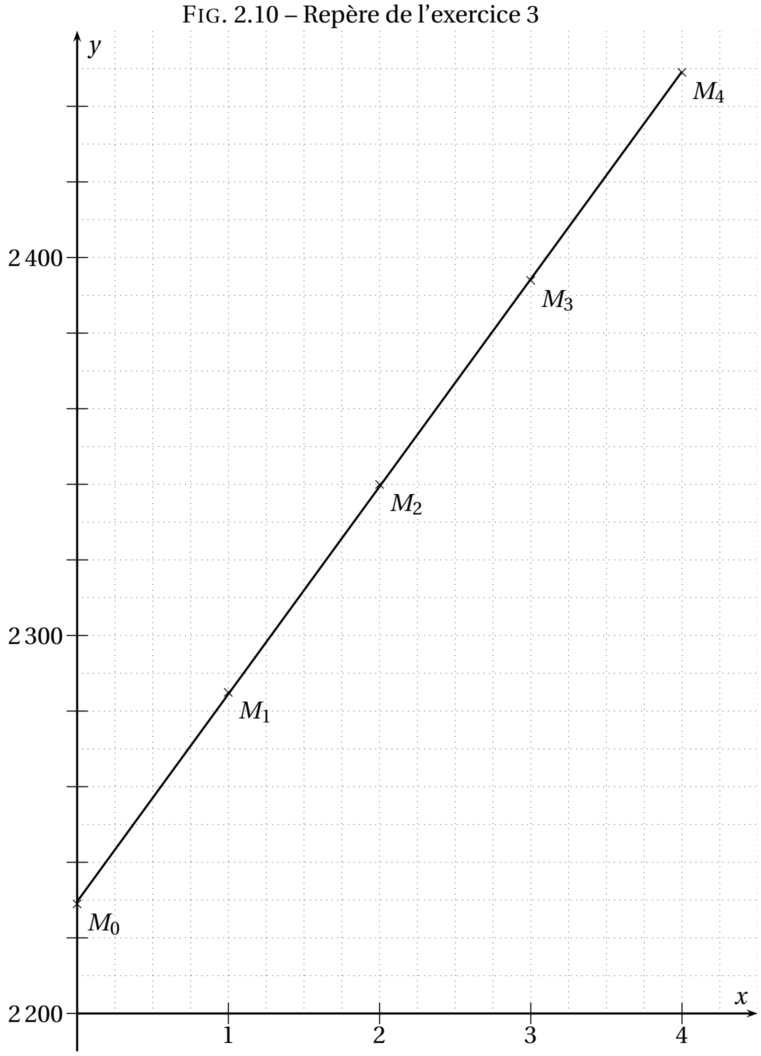
4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?

   L'âge de 60 ans correspond au rang $x = 6$; en remplaçant x par 6 dans l'équation de $\mathscr{D}$, on obtient : $y = 2559$ soit un coût de rachat d'un trimestre de 2 559 €.

5. En fait, le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.
   Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

   Une baisse de 3 % se traduit par le coefficient multiplicateur 0,97 ; on applique donc 5 fois ce coefficient multiplicateur : $2\,555 \times 0{,}97^5 \approx 2\,194$.
   Le coût de rachat d'un trimestre pour un salarié de 60 ans sera donc : 2 194 €.

FIG. 2.10 – Repère de l'exercice 3



Devoir surveillé n°5

Baccalauréat blanc – Spécialité : Mercatique

Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 3 pages.

Du papier millimétré est mis à disposition des candidats.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Relever sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse juste rapporte 1 *point ; une réponse fausse enlève* $0,25$ *point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

1. Le prix d'un article a augmenté de 2 % par mois chaque mois de l'année 2006.
   Le taux d'évolution global sur l'année 2006 est :
   a. inférieur à 24 % b. égal à 24 % c. supérieur à 24 %.

Les questions suivantes se rapportent au tableau ci-dessous. C'est un extrait du tableau de l'indice de référence des loyers en France, base 100 au deuxième trimestre 2004, publié par l'INSEE. Les indices sont calculés à la fin de chaque trimestre.

Période	Indice de référence
Premier trimestre 2003	97,10
Premier trimestre 2004	99,33
Premier trimestre 2005	
Premier trimestre 2006	104,61

Source : INSEE

2. Sur une année, du premier trimestre 2004 au premier trimestre 2005, les loyers ont augmenté de 2,79 %.
   Au premier trimestre 2005, l'indice de référence des loyers arrondi à 10^{-2} est égal à :
   a. $102,12$ b. $101,77$ c. $102,10$
3. Entre le premier trimestre 2003 (indice $97,10$) et le premier trimestre 2004 (indice $99,33$), le taux annuel d'évolution des loyers est :
   a. 2,23 % (arrondi à 0,01 %) b. 2,30 % (arrondi à 0,01 %) c. supérieur à 2,40 %.
4. Entre le premier trimestre 2004 (indice $99,33$) et le premier trimestre 2006 (indice 104,61) le taux moyen annuel d'évolution des loyers arrondi à 0,01 % est :
   a. 2,62 % b. 2,31 % c. 2,64 %.

Exercice 2

Partie A

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.
Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \text{ où } x \text{ est compris entre 1 et 30.}$$

Le coût moyen de production d'un objet est donné par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Montrer que $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1\,;30]$.
4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. *On arrondira à 10^{-1} les valeurs.*

x	1	2	4	8	11	15	20	25	30
$f(x)$						83,1		89,8	

5. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthogonal sur papier millimétré (unités graphiques : 1 cm = 2 objets en abscisses ; 1 cm = 10 € en ordonnées).

Partie B

L'artisan vend chaque objet 110 €.

1. Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121 \text{ où } x \text{ est pris dans } [1\,;30].$$

2. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction B et en déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
Donner ce bénéfice maximal.

Exercice 3

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
rang x_i	0	1	2	3	4
montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. *On donnera le résultat arrondi à l'unité.*
2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans un repère orthogonal :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une unité ;
   - sur l'axe des ordonnées, on placera 2 200 à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 euros.
3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
Donner une équation de $\mathcal{D}$, la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
Représenter la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.
4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?
5. En fait, le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.
Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

Exercice 4

Partie A

1. Dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm = 1 unité), sur papier millimétré, construire les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives :

$$\mathcal{D} : 2x + y = 24 \qquad \mathcal{D}' : 2x + 3y = 36$$

2. Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
3. Déterminer graphiquement (en hachurant ce qui ne convient pas) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 24 \\ 2x + 3y \leq 36 \end{cases}$$

Partie B

Un artisan fabrique des portes de placard, les unes en chêne, les autres en hêtre.
La fabrication d'une porte en hêtre dure 4 h et nécessite 2 m^2 de bois. Celle d'une porte en chêne dure 2 h et nécessite 3 m^2 de bois.
L'artisan ne travaille pas plus de 48 h par semaine et il ne peut entreposer plus de 36 m^2 de bois dans son atelier.
Soit x le nombre de portes en hêtre fabriquées et y le nombre de portes en chêne fabriquées par semaine (x et y sont des nombres entiers).

1. Déterminer, en justifiant les réponses, le système traduisant les contraintes de la production hebdomadaire de l'artisan (on pourra utiliser pour cela un tableau de contraintes.)
2. Utiliser le graphique réalisé dans la partie A pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Si l'artisan produit 3 portes en hêtre, combien de portes en chêne peut-il fabriquer ?
   (b) Si l'artisan produit 5 portes en chêne, combien de portes en hêtre peut-il fabriquer ?
3. L'artisan fait un bénéfice de 30 € sur une porte en hêtre et de 20 € sur une porte en chêne.
   (a) Exprimer en fonction de x et y le bénéfice total réalisé, lorsque x portes en hêtre et y portes en chêne sont vendues.
   (b) On admet que la droite Δ d'équation $3x + 2y = 18$ contient les points dont les coordonnées correspondent à un bénéfice de 180 €. Construire la droite Δ sur le graphique.
   (c) Déterminer graphiquement le nombre de portes de chaque sorte à fabriquer par semaine, pour que le bénéfice soit maximal. Expliquer la méthode utilisée. Quel est alors ce bénéfice maximal en euros ?

Devoir surveillé n°5 – Corrigé

Baccalauréat blanc – Spécialité : Mercatique

EXERCICE 1

1. Le prix d'un article a augmenté de 2 % par mois chaque mois de l'année 2006.
   Le taux d'évolution global sur l'année 2006 est :
   a. inférieur à 24 % b. égal à 24 % c. supérieur à 24 %.

Les questions suivantes se rapportent au tableau ci-dessous. C'est un extrait du tableau de l'indice de référence des loyers en France, base 100 au deuxième trimestre 2004, publié par l'INSEE. Les indices sont calculés à la fin de chaque trimestre.

Période	Indice de référence
Premier trimestre 2003	97,10
Premier trimestre 2004	99,33
Premier trimestre 2005	
Premier trimestre 2006	104,61

Source : INSEE

2. Sur une année, du premier trimestre 2004 au premier trimestre 2005, les loyers ont augmenté de 2,79 %.
   Au premier trimestre 2005, l'indice de référence des loyers arrondi à 10^{-2} est égal à :
   a. $102,12$ b. $101,77$ c. $102,10$
3. Entre le premier trimestre 2003 (indice $97,10$) et le premier trimestre 2004 (indice $99,33$), le taux annuel d'évolution des loyers est :
   a. 2,23 % (arrondi à 0,01 %) b. 2,30 % (arrondi à 0,01 %) c. supérieur à 2,40 %.
4. Entre le premier trimestre 2004 (indice $99,33$) et le premier trimestre 2006 (indice 104,61) le taux moyen annuel d'évolution des loyers arrondi à 0,01 % est :
   a. 2,62 % b. 2,31 % c. 2,64 %.

On rappelle que dans ce QCM, aucune justification n'est demandée.

Question	Réponse	Justification
1	c	$1,02^{12} \approx 1,268$; soit 26,8 % d'augmentation environ
2	c	$99,33 \times 1,0279 \approx 102,10$
3	b	$\dfrac{99,33}{97,10} \approx 1,0230$ soit 2,30 % d'augmentation environ
4	a	$\sqrt{\dfrac{104,61}{99,33}} \approx 1,0262$ soit 2,62 % d'augmentation environ

EXERCICE 2

Partie A

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.
Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \text{ où } x \text{ est compris entre 1 et 30.}$$

Le coût moyen de production d'un objet est donné par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Montrer que $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.

On a : $f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 60x + 121}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{60x}{x} + \dfrac{121}{x} = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.

Pour tout $x \in [1\,;30]$, $f(x) = x + 60 + 121 \times \dfrac{1}{x}$ donc :
$f'(x) = 1 + 0 + 121 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{121}{x^2} = \dfrac{x^2 - 121}{x^2} = \dfrac{x^2 - 11^2}{x^2} = \dfrac{(x+11)(x-11)}{x^2}$.
On a utilisé l'identité remarquable : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1\,;30]$.

x	1		11		30
Signe de $x - 11$		+	0	−	
Signe de $x + 11$		+		+	
Signe de x^2		+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	182	$\searrow$	82	$\nearrow$	94

4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. *On arrondira à* 10^{-1} *les valeurs.*

x	1	2	4	8	11	15	20	25	30
$f(x)$	182	122,5	94,3	83,1	82	83,1	86,1	89,8	94

5. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthogonal sur papier millimétré (unités graphiques : 1 cm = 2 objets en abscisses ; 1 cm = 10 € en ordonnées).

Voir la figure 2.14 page 47.

Partie B

L'artisan vend chaque objet 110 €.

1. Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121 \text{ où } x \text{ est pris dans } [1\,;30].$$

Pour $x \in [1\,;30]$, la recette pour x objets est : $R(x) = 110x$.
Le bénéfice $B(x)$ est donné par : $B(x) = R(x) - C(x) = 110x - \left(x^2 + 60x + 121\right) = -x^2 + 50x - 121$.

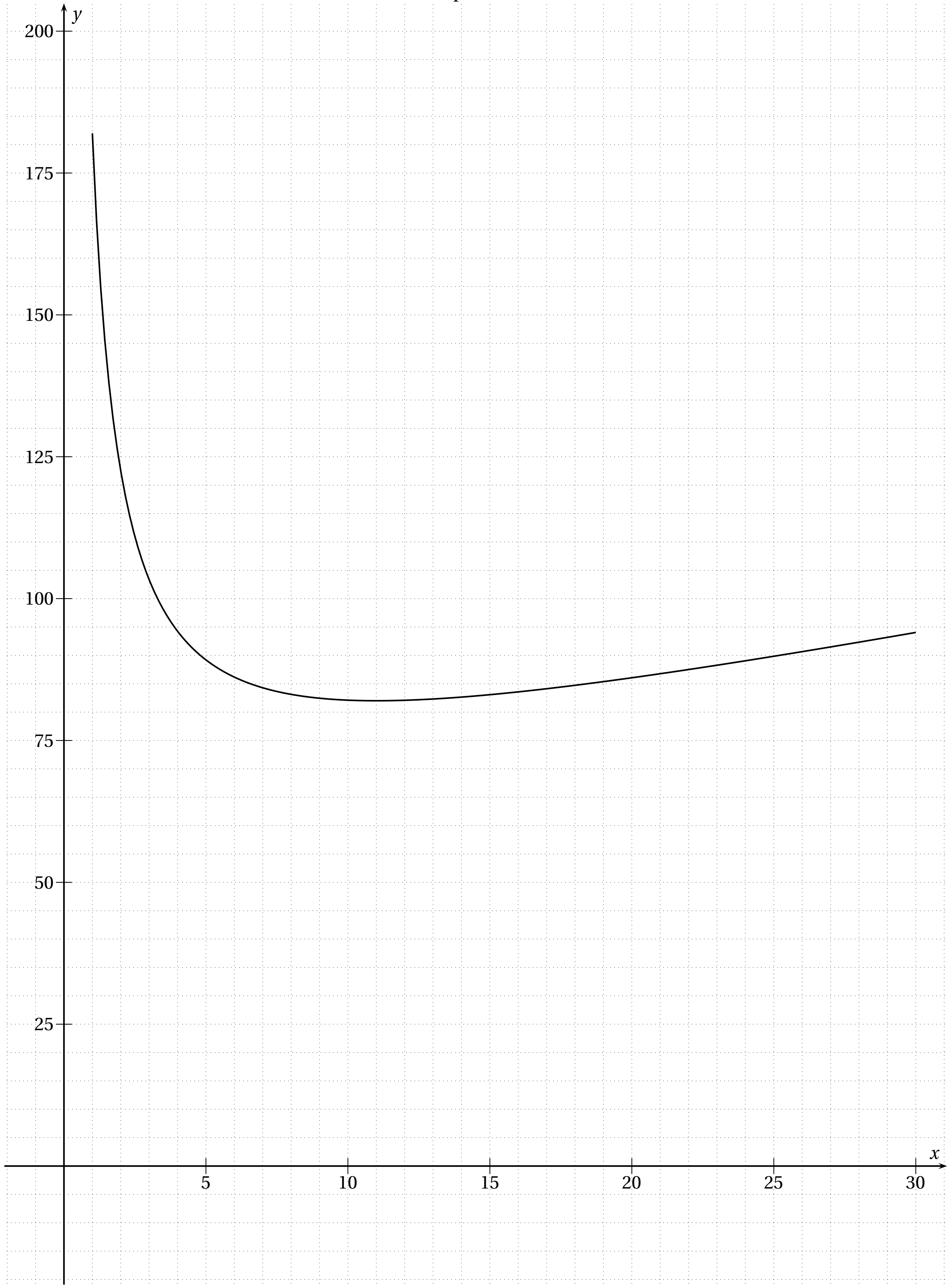
2. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.

$B(x) = -x^2 + 50x - 121$ donc $B'(x) = -2x + 50$.
$B'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 50 = 0 \Leftrightarrow 50 = 2x \Leftrightarrow 25 = x$ et le coefficient de x est négatif, d'où :

x	1		25		30
Signe de $B'(x)$		+	0	−	

3. Dresser le tableau de variations de la fonction B et en déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
Donner ce bénéfice maximal.

FIG. 2.11 – Repère de l'exercice 2



On en déduit le tableau de variations de la fonction B :

x	1		25		30
Signe de $B'(x)$		+	0	−	
Variations de B	-72	↗	504	↘	479

Pour réaliser un bénéfice maximal de 504 €, il faut fabriquer 25 objets.

Exercice 3

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
rang x_i	0	1	2	3	4
montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. *On donnera le résultat arrondi à l'unité.*

$\dfrac{2\,449}{2\,229} \approx 1,0986$ soit 10 % d'augmentation environ.
Ou bien $t = \dfrac{2\,449 - 2\,229}{2\,229} \times 100 \approx 9,869$ soit 10 % d'augmentation environ.

2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal.

Voir figure 2.15 page 49.

3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
Donner une équation de $\mathscr{D}$, la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
Représenter la droite $\mathscr{D}$ dans le repère précédent.

La calculatrice donne : $a \approx 54,9$ et $b \approx 2\,229,6$.
D'où l'équation de $\mathscr{D}$: $y = 54,9x + 2\,229,6$.
La droite $\mathscr{D}$ passe par les points : $(0\,;\,2\,229,6)$ et $(4\,;\,2\,449,2)$.

4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?

L'âge de 60 ans correspond au rang $x = 6$; en remplaçant x par 6 dans l'équation de $\mathscr{D}$, on obtient : $y = 2\,559$ soit un coût de rachat d'un trimestre de 2 559 €.

5. En fait, le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.
Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

Une baisse de 3 % se traduit par le coefficient multiplicateur 0,97 ; on applique donc 5 fois ce coefficient multiplicateur : $2\,555 \times 0,97^5 \approx 2\,194$.
Le coût de rachat d'un trimestre pour un salarié de 60 ans sera donc : 2 194 €.

Exercice 4

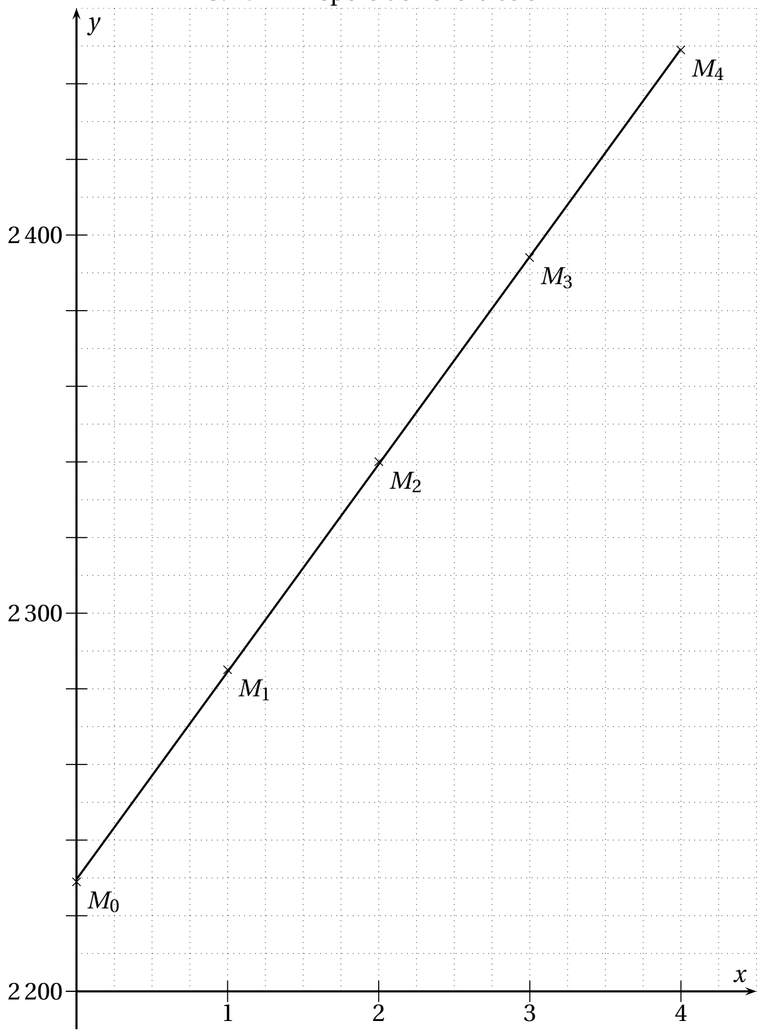
Partie A

1. Dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm = 1 unité), sur papier millimétré, construire les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives : $\mathscr{D} : 2x + y = 24$ $\qquad$ $\mathscr{D}' : 2x + 3y = 36$

Voir figure 2.13 page 38.

2. Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

FIG. 2.12 – Repère de l'exercice 3



On cherche le couple $(x; y)$ vérifiant les équations respectives de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{D}'$, cela revient donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 24 & L_1 \\ 2x + 3y = 36 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 24 & L_1 \\ 2y = 12 & L_2 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases}$$

Donc $I(9; 6)$.

3. Déterminer graphiquement (en hachurant ce qui ne convient pas) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 24 \\ 2x + 3y \leq 36 \end{cases}$$

Voir figure 2.13 page suivante.

Partie B

Un artisan fabrique des portes de placard, les unes en chêne, les autres en hêtre.

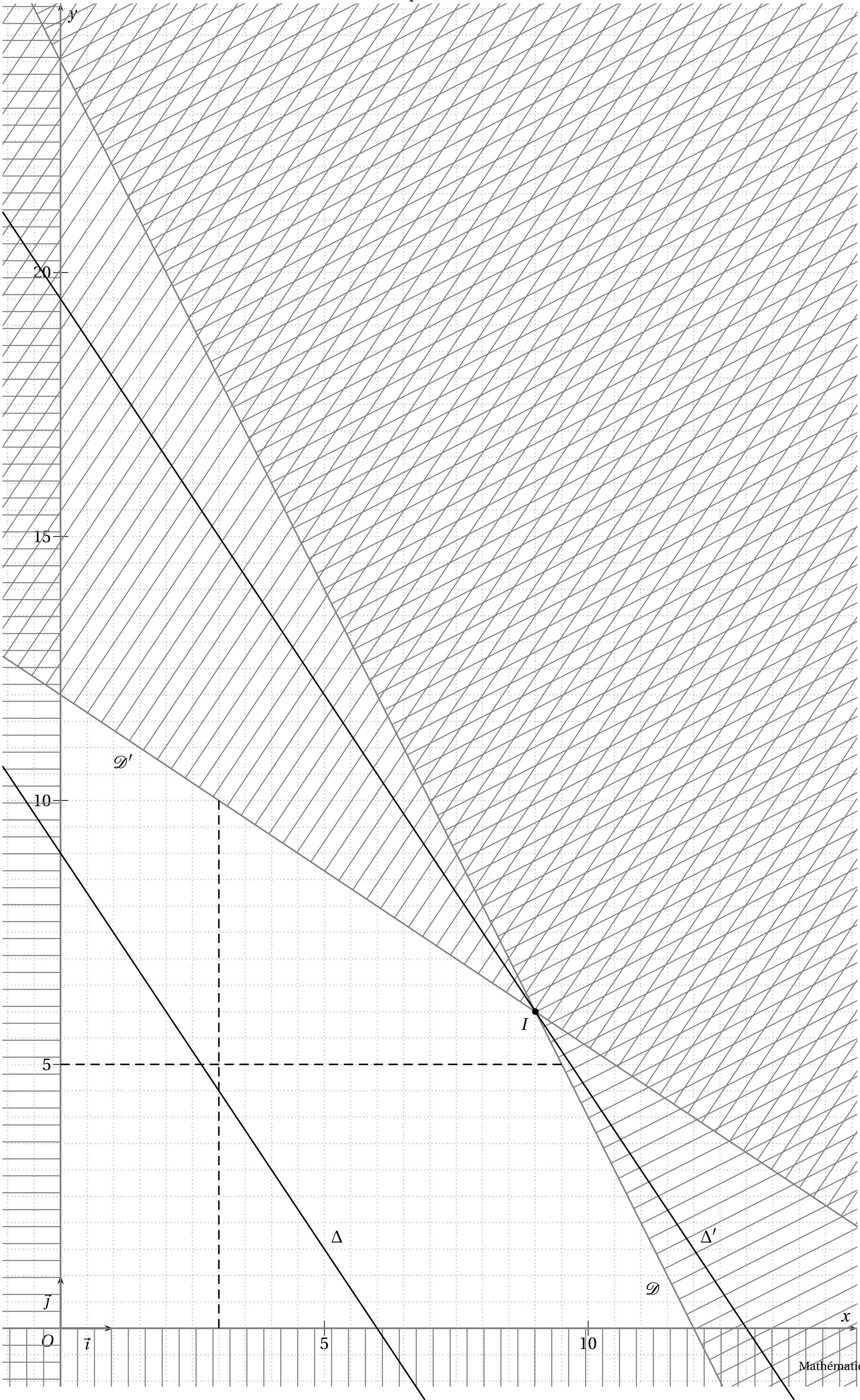
La fabrication d'une porte en hêtre dure 4 h et nécessite 2 m^2 de bois. Celle d'une porte en chêne dure 2 h et nécessite 3 m^2 de bois.

L'artisan ne travaille pas plus de 48 h par semaine et il ne peut entreposer plus de 36 m^2 de bois dans son atelier.

Soit x le nombre de portes en hêtre fabriquées et y le nombre de portes en chêne fabriquées par semaine (x et y sont des nombres entiers).

1. Déterminer, en justifiant les réponses, le système traduisant les contraintes de la production hebdomadaire de l'artisan (on pourra utiliser pour cela un tableau de contraintes.)

FIG. 2.13 – Repère de l'exercice 4



On a les contraintes suivantes :

Type de porte	nombre	heures	bois (en m^2)
Hêtre	x	$4x$	$2x$
Chêne	y	$2y$	$3y$
Maximum disponible		48	36

De plus, étant des nombres de portes, on a forcément x et y positifs.
D'où le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x+2y \leq 48 \\ 2x+3y \leq 36 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+y \leq 24 \\ 2x+3y \leq 36 \end{array}\right.$$

2. Utiliser le graphique réalisé dans la partie A pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Si l'artisan produit 3 portes en hêtre, combien de portes en chêne peut-il fabriquer ?

   Si $x = 3$ alors $0 \leq y \leq 10$ (voir segment vertical en pointillé sur la figure 2.13) donc, si l'artisan produit 3 portes en hêtre, il peut fabriquer jusqu'à 10 portes en chêne.

   (b) Si l'artisan produit 5 portes en chêne, combien de portes en hêtre peut-il fabriquer ?

   Si $y = 5$ alors $0 \leq x \leq 9,5$ (voir segment horizontal en pointillé sur la figure 2.13)) donc, si l'artisan produit 5 portes en chêne, il peut fabriquer jusqu'à 9 portes en hêtre (et une porte inachevée).

3. L'artisan fait un bénéfice de 30 € sur une porte en hêtre et de 20 € sur une porte en chêne.
   (a) Exprimer en fonction de x et y le bénéfice total réalisé, lorsque x portes en hêtre et y portes en chêne sont vendues.

   Le bénéfice B est donné par $B = 30x + 20y$.

   (b) On admet que la droite Δ d'équation $3x + 2y = 18$ contient les points dont les coordonnées correspondent à un bénéfice de 180 €. Construire la droite Δ sur le graphique.

   Voir figure 2.13 page ci-contre.

   (c) Déterminer graphiquement le nombre de portes de chaque sorte à fabriquer par semaine, pour que le bénéfice soit maximal. Expliquer la méthode utilisée. Quel est alors ce bénéfice maximal en euros ?

   Les droites d'équation $30x + 20y = c$ sont toutes parallèles donc les droites des bénéfices sont toutes parallèles.
   On cherche alors la parallèle la plus haute (pour le bénéfice maximal) ayant au moins un point dans la zone des contraintes.
   On obtient la droite Δ' qui passe par le point $I(9;6)$, seul point sur la droite Δ' et dans la zone des contraintes.
   Le bénéfice est donc maximal quand $x = 9$ et $y = 6$ et il vaut $B = 30 \times 9 + 20 \times 6 = 390$, soit 390 €.

Devoir surveillé n°5

Baccalauréat blanc – Spécialités : Comptabilité et finance d'entreprise – Gestion des systèmes d'information

Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 3 pages.

Du papier millimétré est mis à disposition des candidats.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Relever sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse juste rapporte 1 *point ; une réponse fausse enlève* 0,25 *point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

1. Le prix d'un article a augmenté de 2 % par mois chaque mois de l'année 2006.
   Le taux d'évolution global sur l'année 2006 est :
   a. inférieur à 24 % b. égal à 24 % c. supérieur à 24 %.

   Les questions suivantes se rapportent au tableau ci-dessous. C'est un extrait du tableau de l'indice de référence des loyers en France, base 100 au deuxième trimestre 2004, publié par l'INSEE. Les indices sont calculés à la fin de chaque trimestre.

Période	Indice de référence
Premier trimestre 2003	97,10
Premier trimestre 2004	99,33
Premier trimestre 2005	
Premier trimestre 2006	104,61

Source : INSEE

2. Sur une année, du premier trimestre 2004 au premier trimestre 2005, les loyers ont augmenté de 2,79 %.
   Au premier trimestre 2005, l'indice de référence des loyers arrondi à 10^{-2} est égal à :
   a. $102,12$ b. $101,77$ c. $102,10$
3. Entre le premier trimestre 2003 (indice $97,10$) et le premier trimestre 2004 (indice $99,33$), le taux annuel d'évolution des loyers est :
   a. 2,23 % (arrondi à 0,01 %) b. 2,30 % (arrondi à 0,01 %) c. supérieur à 2,40 %.
4. Entre le premier trimestre 2004 (indice $99,33$) et le premier trimestre 2006 (indice 104,61) le taux moyen annuel d'évolution des loyers arrondi à 0,01 % est :
   a. 2,62 % b. 2,31 % c. 2,64 %.

EXERCICE 2

Partie A

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.
Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \text{ où } x \text{ est compris entre 1 et 30.}$$

Le coût moyen de production d'un objet est donné par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Montrer que $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1\,;30]$.
4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. *On arrondira à* 10^{-1} *les valeurs.*

x	1	2	4	8	11	15	20	25	30
$f(x)$						83,1		89,8	

5. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthogonal sur papier millimétré (unités graphiques : 1 cm = 2 objets en abscisses ; 1 cm = 10 € en ordonnées).

Partie B

L'artisan vend chaque objet 110 €.

1. Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121 \text{ où } x \text{ est pris dans } [1\,;30].$$

2. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction B et en déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
   Donner ce bénéfice maximal.

EXERCICE 3

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
rang x_i	0	1	2	3	4
montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. *On donnera le résultat arrondi à l'unité.*
2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une unité ;
   - sur l'axe des ordonnées, on placera 2 200 à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 euros.
3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
   Donner une équation de $\mathcal{D}$, la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.
4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?
5. En fait, le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.
   Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

EXERCICE 4

Dans le cadre de leurs TPE (travaux personnels encadrés), deux lycéens de première souhaitent étudier l'évolution de la population de grenouilles dans l'étang de leur commune.
Selon le club des écologistes de cette commune, cette population serait en voie de disparition et les membres de ce club s'en inquiètent. Pour effectuer leur étude, les deux lycéens ne disposent d'abord que des deux relevés suivants effectués par le club :

Date de relevé	1^{er} novembre 2002	1^{er} novembre 2003
Population de grenouilles	1000	950
Rang n de l'année	0	1

Pour faire des prévisions, les deux lycéens modélisent l'évolution de la population de grenouilles à l'aide d'une suite.

Partie A

Les deux lycéens font l'hypothèse qu'une suite arithmétique permet de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. Ils notent cette suite (u_n) où u_0 est la population de grenouilles le 1^{er} novembre 2002. Plus généralement, u_n est la population de grenouille le 1^{er} novembre $(2002 + n)$.

1. Calculer la raison r de cette suite.
2. Selon ce modèle, quelle serait la population de grenouilles le 1^{er} novembre 2005 ? 1^{er} novembre 2012 ? 1^{er} novembre $(2002 + n)$?
3. Déterminer l'année où la population de grenouille aura totalement disparu selon ce modèle.
4. Les deux lycéens reçoivent le relevé effectué le 1^{er} novembre 2004 : 903 grenouilles. Est-ce que ce nouveau résultat confirme leur hypothèse ?

Partie B

Poursuivant leur réflexion, les deux lycéens se demandent si une suite géométrique (v_n) permettrait de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. v_0 serait alors la population de grenouilles le 1^{er} novembre 2002 et, plus généralement, v_n serait la population de grenouilles le 1^{er} novembre $(2002 + n)$.

1. (a) Calculer la raison q de la suite (v_n).
   (b) Expliquer pourquoi ce modèle semble mieux adapté.
2. (a) Quelle serait alors, à l'entier près, la population de grenouilles le 1^{er} novembre 2005 ?
   (b) Pour tout entier naturel n, écrire v_n en fonction de n.
   (c) En déduire, à l'entier près, quelle serait la population de grenouilles le 1^{er} novembre 2012.
3. Les deux lycéens se demandent aussi à partir de quelle date la population de grenouilles de l'étang serait réduite à moins de deux grenouilles. Répondre à cette question en s'aidant de la calculatrice et en donnant les résultats qui permettent de conclure.

Devoir surveillé n°5 – Corrigé

Baccalauréat blanc – Spécialités : Comptabilité et finance d'entreprise – Gestion des systèmes d'information

EXERCICE 1

1. Le prix d'un article a augmenté de 2 % par mois chaque mois de l'année 2006.
   Le taux d'évolution global sur l'année 2006 est :
   a. inférieur à 24 % b. égal à 24 % c. supérieur à 24 %.

Les questions suivantes se rapportent au tableau ci-dessous. C'est un extrait du tableau de l'indice de référence des loyers en France, base 100 au deuxième trimestre 2004, publié par l'INSEE. Les indices sont calculés à la fin de chaque trimestre.

Période	Indice de référence
Premier trimestre 2003	97,10
Premier trimestre 2004	99,33
Premier trimestre 2005	
Premier trimestre 2006	104,61

Source : INSEE

2. Sur une année, du premier trimestre 2004 au premier trimestre 2005, les loyers ont augmenté de 2,79 %.
   Au premier trimestre 2005, l'indice de référence des loyers arrondi à 10^{-2} est égal à :
   a. $102,12$ b. $101,77$ c. $102,10$
3. Entre le premier trimestre 2003 (indice $97,10$) et le premier trimestre 2004 (indice $99,33$), le taux annuel d'évolution des loyers est :
   a. 2,23 % (arrondi à 0,01 %) b. 2,30 % (arrondi à 0,01 %) c. supérieur à 2,40 %.
4. Entre le premier trimestre 2004 (indice $99,33$) et le premier trimestre 2006 (indice 104,61) le taux moyen annuel d'évolution des loyers arrondi à 0,01 % est :
   a. 2,62 % b. 2,31 % c. 2,64 %.

On rappelle que dans ce QCM, aucune justification n'est demandée.

Question	Réponse	Justification
1	c	$1,02^{12} \approx 1,268$; soit 26,8 % d'augmentation environ
2	c	$99,33 \times 1,0279 \approx 102,10$
3	b	$\dfrac{99,33}{97,10} \approx 1,0230$ soit 2,30 % d'augmentation environ
4	a	$\sqrt{\dfrac{104,61}{99,33}} \approx 1,0262$ soit 2,62 % d'augmentation environ

EXERCICE 2

Partie A

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.
Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \text{ où } x \text{ est compris entre 1 et 30.}$$

Le coût moyen de production d'un objet est donné par $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Montrer que $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.

On a : $f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2+60x+121}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{60x}{x} + \dfrac{121}{x} = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.

Pour tout $x \in [1\,;30]$, $f(x) = x + 60 + 121 \times \dfrac{1}{x}$ donc :
$f'(x) = 1 + 0 + 121 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{121}{x^2} = \dfrac{x^2-121}{x^2} = \dfrac{x^2-11^2}{x^2} = \dfrac{(x+11)(x-11)}{x^2}$.
On a utilisé l'identité remarquable : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1\,;30]$.

x	1		11		30
Signe de $x-11$		+	0	−	
Signe de $x+11$		+		+	
Signe de x^2		+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	182	↘	82	↗	94

4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. *On arrondira à* 10^{-1} *les valeurs.*

x	1	2	4	8	11	15	20	25	30
$f(x)$	182	122,5	94,3	83,1	82	83,1	86,1	89,8	94

5. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthogonal sur papier millimétré (unités graphiques : 1 cm = 2 objets en abscisses ; 1 cm = 10 € en ordonnées).

Voir la figure 2.14 page suivante.

Partie B

L'artisan vend chaque objet 110 €.

1. Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121 \text{ où } x \text{ est pris dans } [1\,;30].$$

Pour $x \in [1\,;30]$, la recette pour x objets est : $R(x) = 110x$.
Le bénéfice $B(x)$ est donné par : $B(x) = R(x) - C(x) = 110x - \left(x^2 + 60x + 121\right) = -x^2 + 50x - 121$.

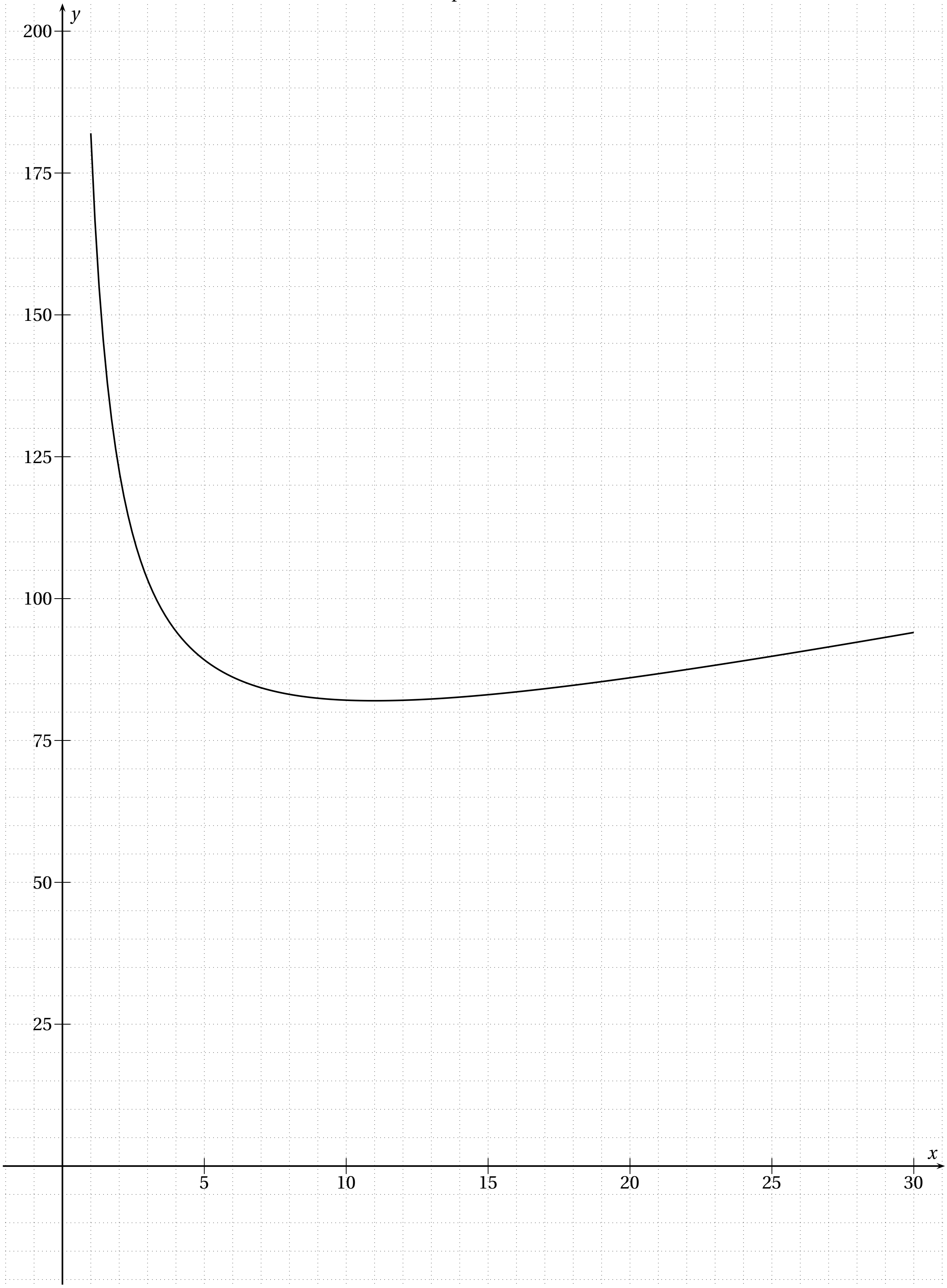
2. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.

$B(x) = -x^2 + 50x - 121$ donc $B'(x) = -2x + 50$.
$B'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 50 = 0 \Leftrightarrow 50 = 2x \Leftrightarrow 25 = x$ et le coefficient de x est négatif, d'où :

x	1		25		30
Signe de $B'(x)$		+	0	−	

3. Dresser le tableau de variations de la fonction B et en déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
Donner ce bénéfice maximal.

FIG. 2.14 – Repère de l'exercice 2



On en déduit le tableau de variations de la fonction B :

x	1		25		30
Signe de $B'(x)$		+	0	−	
Variations de B	−72	↗	504	↘	479

Pour réaliser un bénéfice maximal de 504 €, il faut fabriquer 25 objets.

Exercice 3

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
rang x_i	0	1	2	3	4
montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. *On donnera le résultat arrondi à l'unité.*

$\dfrac{2\,449}{2\,229} \approx 1,0986$ soit 10 % d'augmentation environ.
Ou bien $t = \dfrac{2\,449 - 2\,229}{2\,229} \times 100 \approx 9,869$ soit 10 % d'augmentation environ.

2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal.

Voir figure 2.15 page ci-contre.

3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
Donner une équation de $\mathcal{D}$, la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
Représenter la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.

La calculatrice donne : $a \approx 54,9$ et $b \approx 2\,229,6$.
D'où l'équation de $\mathcal{D}$: $y = 54,9x + 2\,229,6$.
La droite $\mathcal{D}$ passe par les points : $(0\,;\,2\,229,6)$ et $(4\,;\,2\,449,2)$.

4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?

L'âge de 60 ans correspond au rang $x = 6$; en remplaçant x par 6 dans l'équation de $\mathcal{D}$, on obtient : $y = 2\,559$ soit un coût de rachat d'un trimestre de 2 559 €.

5. En fait, le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.
Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

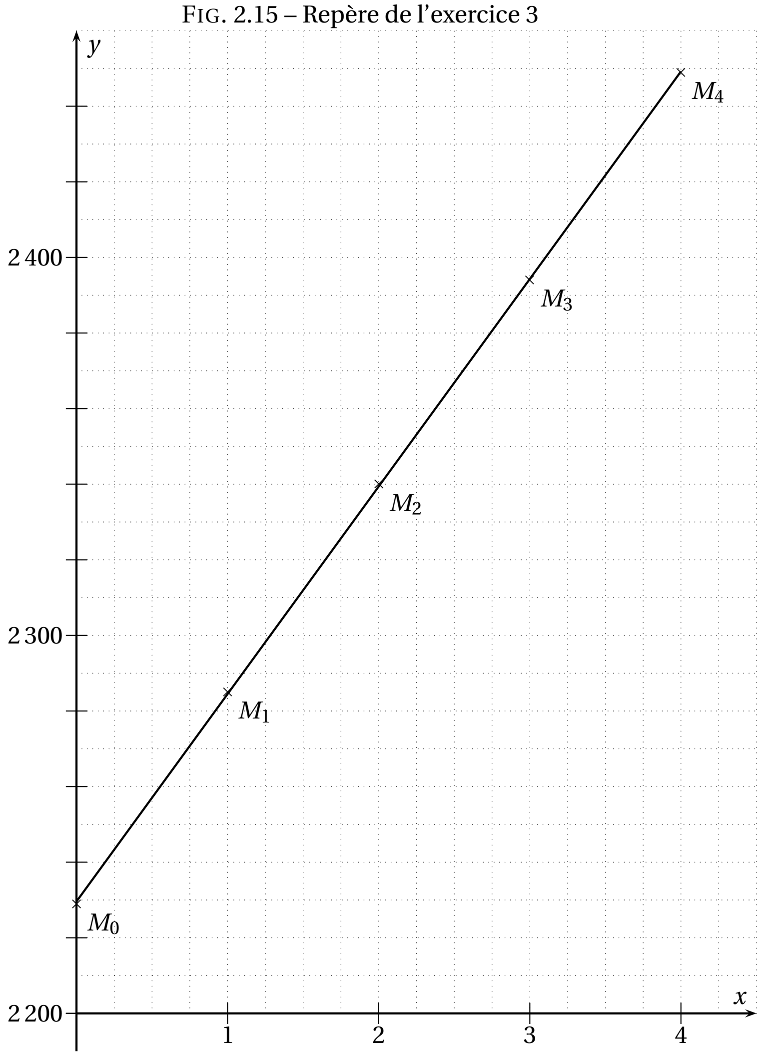
Une baisse de 3 % se traduit par le coefficient multiplicateur 0,97 ; on applique donc 5 fois ce coefficient multiplicateur : $2\,555 \times 0,97^5 \approx 2\,194$.
Le coût de rachat d'un trimestre pour un salarié de 60 ans sera donc : 2 194 €.

Exercice 4

Dans le cadre de leurs TPE (travaux personnels encadrés), deux lycéens de première souhaitent étudier l'évolution de la population de grenouilles dans l'étang de leur commune.
Selon le club des écologistes de cette commune, cette population serait en voie de disparition et les membres de ce club s'en inquiètent. Pour effectuer leur étude, les deux lycéens ne disposent d'abord que des deux relevés suivants effectués par le club :

Date de relevé	1^{er} novembre 2 002	1^{er} novembre 2 003
Population de grenouilles	1 000	950
Rang n de l'année	0	1

FIG. 2.15 – Repère de l'exercice 3



Pour faire des prévisions, les deux lycéens modélisent l'évolution de la population de grenouilles à l'aide d'une suite.

Partie A

Les deux lycéens font l'hypothèse qu'une suite arithmétique permet de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. Ils notent cette suite (u_n) où u_0 est la population de grenouilles le 1er novembre 2 002. Plus généralement, u_n est la population de grenouille le 1er novembre $(2002 + n)$.

1. Calculer la raison r de cette suite.

   La raison d'une suite arithmétique est la différence entre deux termes consécutifs.
   D'où $r = 950 - 1000 = -50$: (u_n) est arithmétique de raison $r = -50$.

2. Selon ce modèle, quelle serait la population de grenouilles le 1er novembre 2 005 ? 1er novembre 2 012 ? 1er novembre $(2002 + n)$?

   2 005 est l'année de n°3, 2 012 est l'année n°10, d'où :
   La population de grenouilles en 2 005 est égale à $1000 - 3 \times 50 = 850$ grenouilles et la population de grenouilles en 2 012 est égale à $1000 - 10 \times 50 = 500$ grenouilles.
   De manière générale, $u_n = u_0 + n \times r = 1000 - 50n$.

3. Déterminer l'année où la population de grenouille aura totalement disparu selon ce modèle.

   Il faut résoudre l'équation $u_n = 0 \Leftrightarrow 1000 - 50n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1000}{50} = 20$.
   Et l'année n°20 correspond à 2 022.
   La population de grenouilles, suivant ce modèle, aura disparu en 2 022.

4. Les deux lycéens reçoivent le relevé effectué le 1er novembre 2 004 : 903 grenouilles. Est-ce que ce nouveau résultat confirme leur hypothèse ?

L'année 2 004 est l'année n°2. Or, $u_2 = 1000 - 50 \times 2 = 900$.
Ce résultat est peu différent de l'observation effectuée le 1er novembre 2 004.
Il semble donc que ce modèle soit satisfaisant.

Partie B

Poursuivant leur réflexion, les deux lycéens se demandent si une suite géométrique (v_n) permettrait de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. v_0 serait alors la population de grenouilles le 1er novembre 2 002 et, plus généralement, v_n serait la population de grenouilles le 1er novembre $(2002 + n)$.

1. (a) Calculer la raison q de la suite (v_n).

   La raison d'une suite géométrique est le quotient de deux termes consécutifs.
   D'où $q = \frac{950}{1000} = 0,95$: (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$.

   (b) Expliquer pourquoi ce modèle semble mieux adapté.

   Selon ce modèle, la population de grenouille le 1er novembre 2 004 serait de $950 \times 0,95 = 902,5$.
   On arrondit ce résultat à 903, soit exactement la population relevée effectivement en 2 004.
   Il semble donc que ce modèle d'évolution soit plus satisfaisant que celui de la partie A.

2. (a) Quelle serait alors, à l'entier près, la population de grenouilles le 1er novembre 2 005 ?

   On rappelle que 2 005 est l'année n°3. La population en 2 005 est donc égale à $1000 \times 0,95^3 \approx 857$. On prévoit, suivant ce modèle, 857 grenouilles en 2 005.

   (b) Pour tout entier naturel n, écrire v_n en fonction de n.

   De manière générale, $v_n = v_0 \times q^n = 1000 \times 0,95^n$.

   (c) En déduire, à l'entier près, quelle serait la population de grenouilles le 1er novembre 2 012.

   L'année 2 012 est l'année n°10. Et $v_{10} = 1000 \times 0,95^{10} \approx 599$. On prévoit 599 grenouilles en 2012.

3. Les deux lycéens se demandent aussi à partir de quelle date la population de grenouilles de l'étang serait réduite à moins de deux grenouilles. Répondre à cette question en s'aidant de la calculatrice et en donnant les résultats qui permettent de conclure.

Il faut résoudre l'inéquation $v_n \leq 2 \Leftrightarrow 1000 \times 0,95^n \leq 2 \Leftrightarrow 0,95^n \leq 0,002$.
Or, la suite des termes $0,95^n$ est décroissante, car $0 < 0,95 < 1$.
De plus $0,95^{121} \approx 0,00201$ tandis que $0,95^{122} \approx 0,0019$.
Le plus petit entier n tel que $v_n \leq 2$ est donc $n = 122$.
La population de grenouilles serait donc réduite à moins de deux grenouilles à partir de l'année 2 124.

Devoir surveillé n°6

Probabilités conditionnelles

EXERCICE 1

Une buvette, située en bordure de plage, est ouverte de 12 heures à 18 heures. Elle propose des crêpes salées et des crêpes sucrées. Chaque client achète une seule crêpe.
60 % des clients se présentent à l'heure du déjeuner (entre 12 heures et 14 heures).
Parmi les clients achetant une crêpe l'après-midi (à partir de 14 heures), 80 % choisissent une crêpe sucrée.
On appelle :
D l'évènement : « le client est venu à l'heure du déjeuner ».
A l'évènement : « le client achète une crêpe salée ». On sait que la probabilité qu'un client achète une crêpe salée est égale à 0,62.
On pourra représenter les différentes situations par des arbres pondérés.
Les résultats seront donnés sous forme décimale.

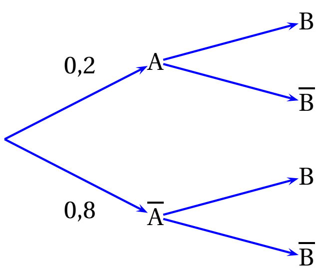
1. Déterminer les probabilités des évènements D et $\overline{\text{D}}$.
2. (a) Un client est venu l'après-midi. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une crêpe salée ?
   (b) Calculer $P\left(\text{A} \cap \overline{\text{D}}\right)$.
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(\text{A} \cap \text{D})$.
   (d) Un client vient à l'heure du déjeuner ; montrer que la probabilité qu'il achète une crêpe salée est égale à $0,9$.
3. Un client a acheté une crêpe salée ; quelle est la probabilité, à $0,01$ près, qu'il soit venu l'après-midi ?

EXERCICE 2

Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.
L' éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.
On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contatcté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à $0,2$; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à $0,4$; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à $0,1$.
Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.
On note :

- A l'évènement « la personne s'abonne à l'édition papier »,
- B l'évènement « la personne s'abonne à l'édition électronique »,
- $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A, $\overline{\text{B}}$ l'évènement contraire de B.

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre suivant :



   (b) Donner la probabilité de B sachant A et la probabilité de B sachant $\overline{\text{A}}$.
2. (a) Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.
   (b) Justifier que la probabilité de l'évènement B est égale à $0,16$.
   (c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?

Devoir surveillé n°7

Exposants réels

Pour chaque question, une seule réponse est correcte (éventuellement arrondie). Indiquer sur l'énoncé celle qui convient sachant que :

- une bonne indication rapporte 2 points ;
- une mauvaise pénalise de 1 point ;
- l'absence d'indication rapporte 0 point ;
- si le total des points de cet exercice est négatif, il est ramené à 0.

1. Si $q^4 = 4$ et $q > 0$ alors :

   (a) $q = 1$; (b) $q \approx 1,4$; (c) $q = 2$.

2. Si $x^{0,85} = 3$ alors :

   (a) $x \approx 3,53$; (b) $x \approx 3,64$; (c) $x = 2,55$.

3. Si on place 100 € à intérêts composés au taux annuel de 4 %, au bout de six mois le placement a rapporté :

   (a) 2 € ; (b) 1,98 € ; (c) 4 €.

4. Le calcul de $500 \times 1,2^{\frac{11}{6}}$ donne la valeur d'un capital de 500 € placé à 20 % au bout de :

   (a) moins d'un an ; (b) plus de deux ans ; (c) 1 an et 10 mois.

5. Un placement de 1 500 € à intérêts composés au taux annuel de 3 % donne au bout d'un an et demi un capital de :

   (a) 1 504,50 € ; (b) 1 568 € ; (c) 1 567,50 €.

6. $6^{1,4} \times 6^{2,6} =$

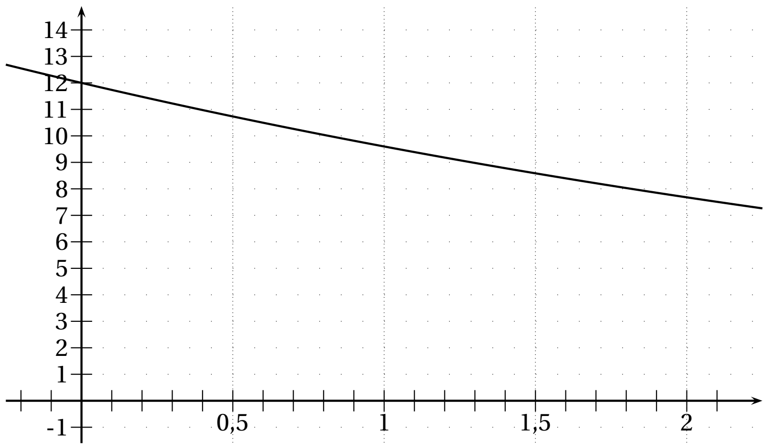
   (a) 6^4 ; (b) 12^4 ; (c) $6^{3,64}$.

7. $\left(2^{0,5}\right)^4 =$

   (a) 4 ; (b) 2^0 ; (c) $2^{4,5}$.

Les questions suivantes se rapportent à la courbe ci-dessous, représentative d'une fonction C du type :

$$C(x) = A \times t^x$$



8. $A =$

   (a) 1 ; (b) 9,6 ; (c) 12.

9. Par lecture graphique on peut dire que :

   (a) $t < 0$; (b) $t > 1$; (c) $0 < t < 1$.

10. La courbe passe par le point de coordonnées (1 ; 9,6) donc $t =$

    (a) 9,6 ; (b) 0,8 ; (c) 1.

Devoir surveillé n°8 (GRH)

Suites

EXERCICE 1 *10 points*

Pour tous les calculs de cet exercice, on arrondira au centime d'euro.
Pierre, nouveau diplômé, a deux propositions d'embauche dans deux entreprises différentes. Avant d'accepter une des deux propositions, il effectue une étude sur les salaires proposés par chacune des entreprises.

Partie A
L'entreprise Boss lui propose, pour un emploi commençant le 1^{er} janvier 2 005, le contrat suivant : le salaire initial est de 1 180 € et augmente chaque 1^{er} janvier de 12 €.
On note u_0 ce salaire initial, u_1 le salaire au 1^{er} janvier 2 006, u_2 le salaire au 1^{er} janvier 2 007 et u_n le salaire au 1^{er} janvier de l'année $2005+n$.

L'entreprise Rapido lui propose, pour le même emploi commençant le 1^{er} janvier 2 005, le contrat suivant : le salaire mensuel initial est de 1 027,50 € et augmente chaque 1^{er} janvier de 3,5 %.
On note v_0 ce salaire initial, v_1 le salaire au 1^{er} janvier 2 006, v_2 le salaire au 1^{er} janvier 2 007 et v_n le salaire au 1^{er} janvier de l'année $2005+n$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier sa réponse.
   (c) i. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
       ii. Quel serait son salaire mensuel en 2 010 ?
2. (a) Calculer v_1 et v_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifer sa réponse.
   (c) i. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
       ii. Quel serait son salaire mensuel en 2 010 ?

Partie B
Pierre veut comparer les cumuls des salaires proposés par les deux entreprises sur n années.

1. Calculer en fonction de n :
   (a) $u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}$;
   (b) $v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$.
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	5	6	7	8
$u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}$				
$v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$				

3. En quelle année, pour la première fois, le cumul des salaires de l'entreprise Rapido dépassera-t-il le cumul des salaires de l'entreprise Boss ?

EXERCICE 2 *10 points*

Dans le cadre de leurs TPE (travaux personnels encadrés), deux lycéens de première souhaitent étudier l'évolution de la population de grenouilles dans l'étang de leur commune.
Selon le club des écologistes de cette commune, cette population serait en voie de disparition et les membres de ce club s'en inquiètent. Pour effectuer leur étude, les deux lycéens ne disposent d'abord que des deux relevés suivants effectués par le club :

Date de relevé	1^{er} novembre 2 002	1^{er} novembre 2 003
Population de grenouilles	1 000	950
Rang n de l'année	0	1

Pour faire des prévisions, les deux lycéens modélisent l'évolution de la population de grenouilles à l'aide d'une suite.

Partie A
Les deux lycéens font l'hypothèse qu'une suite arithmétique permet de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. Ils notent cette suite (u_n) où u_0 est la population de grenouilles le 1^{er} novembre 2 002. Plus généralement, u_n est la population de grenouille le 1^{er} novembre $(2002+n)$.

1. Calculer la raison r de cette suite.

2. Selon ce modèle, quelle serait la population de grenouilles le 1er novembre 2 005 ? 1er novembre 2 012 ? 1er novembre $(2002+n)$?
3. Déterminer l'année où la population de grenouille aura totalement disparu selon ce modèle.
4. Les deux lycéens reçoivent le relevé effectué le 1er novembre 2 004 : 903 grenouilles. Est-ce que ce nouveau résultat confirme leur hypothèse ?

Partie B
Poursuivant leur réflexion, les deux lycéens se demandent si une suite géométrique (v_n) permettrait de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. v_0 serait alors la population de grenouilles le 1er novembre 2 002 et, plus généralement, v_n serait la population de grenouilles le 1er novembre $(2002+n)$.

1. (a) Calculer la raison q de la suite (v_n).
   (b) Expliquer pourquoi ce modèle semble mieux adapté.
2. (a) Quelle serait alors, à l'entier près, la population de grenouilles le 1er novembre 2 005 ?
   (b) Pour tout entier naturel n, écrire v_n en fonction de n.
   (c) En déduire, à l'entier près, quelle serait la population de grenouilles le 1er novembre 2 012.
3. Les deux lycéens se demandent aussi à partir de quelle date la population de grenouilles de l'étang serait réduite à moins de deux grenouilles. Répondre à cette question en s'aidant de la calculatrice et en donnant les résultats qui permettent de conclure.

Devoir surveillé n°8 (MERC)

Suites – Logarithme – Exponentielle

EXERCICE 1 *6 points*

Pour tous les calculs de cet exercice, on arrondira au centime d'euro.

Pierre, nouveau diplômé, a deux propositions d'embauche dans deux entreprises différentes. Avant d'accepter une des deux propositions, il effectue une étude sur les salaires proposés par chacune des entreprises.

Partie A

L'entreprise Boss lui propose, pour un emploi commençant le 1er janvier 2 005, le contrat suivant : le salaire initial est de 1 180 € et augmente chaque 1er janvier de 12 €.
On note u_0 ce salaire initial, u_1 le salaire au 1er janvier 2 006, u_2 le salaire au 1er janvier 2 007 et u_n le salaire au 1er janvier de l'année $2005 + n$.

L'entreprise Rapido lui propose, pour le même emploi commençant le 1er janvier 2 005, le contrat suivant : le salaire mensuel initial est de 1 027,50 € et augmente chaque 1er janvier de 3,5 %.
On note v_0 ce salaire initial, v_1 le salaire au 1er janvier 2 006, v_2 le salaire au 1er janvier 2 007 et v_n le salaire au 1er janvier de l'année $2005 + n$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier sa réponse.
   (c) i. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   ii. Quel serait son salaire mensuel en 2 010 ?
2. (a) Calculer v_1 et v_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifer sa réponse.
   (c) i. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   ii. Quel serait son salaire mensuel en 2 010 ?

Partie B

Pierre veut comparer les cumuls des salaires proposés par les deux entreprises sur n années.

1. Calculer en fonction de n :
   (a) $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$;
   (b) $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	5	6	7	8
$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$				
$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$				

3. En quelle année, pour la première fois, le cumul des salaires de l'entreprise Rapido dépassera-t-il le cumul des salaires de l'entreprise Boss ?

EXERCICE 2 *4 points*

On considère les fonctions f et g définies par :

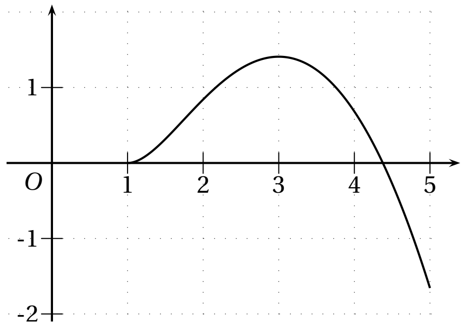
- $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ pour $x \geqslant 0$;
- $g(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour chacune de ces fonctions :

1. déterminer sa dérivée et étudier son signe ;
2. déterminer ses variations.

EXERCICE 3 *4 points*

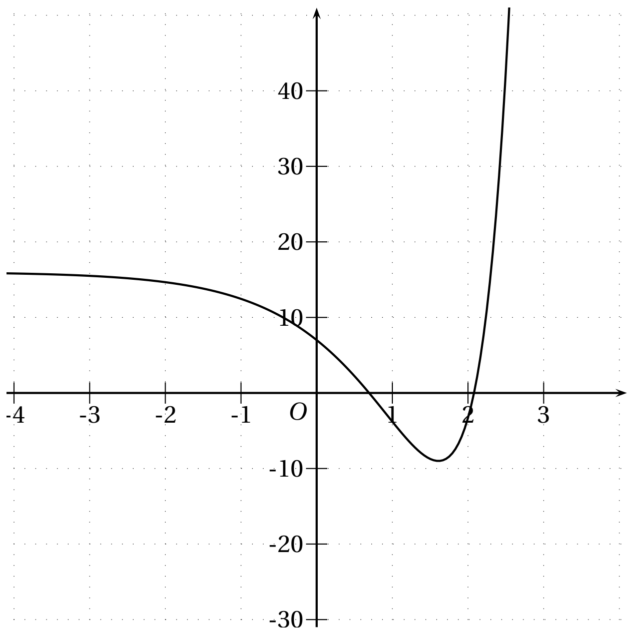
Une entreprise produit des pièces automobiles ; x désignant la production en dizaines de pièces, le bénéfice réalisé en dizaines de miliers d'euros est donné par : $f(x) = -x^2 + 8x - 7 - 6\ln(x)$.
f est définie sur l'intervalle $[1\,;5]$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée sur le graphique ci-dessous.



1. Déterminer, à l'aide de la courbe $\mathscr{C}$:
   (a) la quantité de pièces à partir de laquelle l'entreprise commence à travailler à perte ;
   (b) la quantité que doit produire l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal.
   Trouver alors ce bénéfice maximal.
2. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{-2(x-1)(x-3)}{x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
4. Retrouver les résultats du 1b.

EXERCICE 4 *6 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 10e^x + 16$.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.



1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = 2e^x(e^x - 5)$.
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.
   (e) Déduire de ce qui précède le minimum de f et en quelle valeur il est atteint.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.
3. (a) Lire sur le graphique une valeur approchée de chaque solution de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = (e^x - 2)(e^x - 8)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
   Déterminer la valeur arrondie de chacune de ces trois solutions et comparer avec les résultats du 3a.