

Devoir surveillé n°1

Optimisation à deux variables

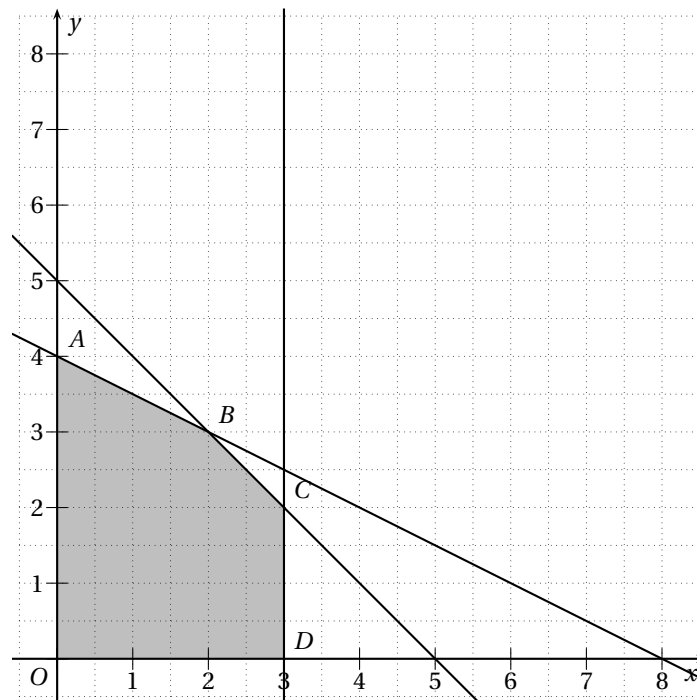
Exercice 1.1 (Caractériser une région du plan – 6 points).

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

On considère le polygone $OABCD$ représentée sur la figure 1.5 de la présente page, et on appelle $\mathcal{P}$ la partie grisée, bords compris.

1. On admettra que la droite (BC) a pour équation : $y = x + 5$.
Déterminer, en justifiant, une inéquation du demi-plan $\mathcal{P}_1$ de frontière (BC) correspondant à l'intérieur du polygone $OABCD$.
2. (a) Déterminer, par le calcul, l'équation réduite de la droite (AB) .
(b) Déterminer, en justifiant, une inéquation du demi-plan $\mathcal{P}_2$ de frontière (AB) correspondant à l'intérieur du polygone $OABCD$.
3. En déduire un système d'inéquations $\mathcal{S}$ caractérisant l'intérieur $\mathcal{P}$ du polygone $OABCD$ (frontières comprises).
4. Déterminer graphiquement en expliquant votre démarche :
 - (a) Peut-on respecter les contraintes et avoir $x = 3$ et $y = 3$?
 - (b) Peut-on respecter les contraintes et avoir $x = 2$ et $y = 3$?
 - (c) Si l'on choisit $x = 2$, quelles sont toutes les valeurs entières de y que l'on peut prendre tout en respectant les contraintes ?
 - (d) Si l'on choisit $y = 1$, quelle est la valeur entière maximale de x que l'on peut prendre tout en respectant les contraintes ?

FIGURE 1.5 – Figure de l'exercice 1.1



Exercice 1.2 (Résolutions de systèmes – 6 points).

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives : $x + 2y = 30$ et $2x + y = 30$.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection I de ces deux droites.
2. Représenter graphiquement dans le repère de la figure 1.6 page suivante l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 30 \\ 2x + y \geq 30 \end{cases}$$

On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.

Exercice 1.3 (Optimisation à deux variables – 8 points).

Un artisan ferronnier doit fabriquer des tables et fauteuils métalliques pour un grand magasin.

Chaque table nécessite 10 kg de fer, 2 litres de peintures anti-corrosion et demande 3 heures de travail.

Chaque fauteuil nécessite 5 kg de fer, 4 litres de peintures anti-corrosion et demande 4 heures de travail.

Pour cet ouvrage, l'artisan reçoit 100 kg de fer et 36 litres de peintures anti-corrosion. Les délais imposés font qu'il ne dispose que de 40 heures de travail.

On note x le nombre de tables et y le nombre de fauteuils que l'artisan va réaliser.

1. Montrer que les contraintes de cette situation peuvent être traduites par le système d'inéquations :

$$\mathcal{S} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + 2y \leq 18 \\ 3x + 4y \leq 40 \end{cases}$$

où x et y sont des entiers naturels. La figure 1.7 page 12 représente l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient le système $\mathcal{S}$ (polygone grisé).

2. L'artisan recevra 60 € pour chaque table produite et 40 € pour chaque fauteuil produit. Soit S le salaire que l'artisan recevra pour la confection de x tables et de y fauteuils.
 - (a) Exprimer S en fonction de x et y .
 - (b) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ correspondant à un salaire de 440 € et compléter le graphique de la figure 1.7 page 12 en traçant la droite $\mathcal{D}$.
 - (c) En justifiant la démarche, déterminer le couple d'entiers x et y qui permettent à l'artisan d'obtenir le salaire le plus élevé.
Préciser le montant de ce salaire maximum.
À combien alors s'élève son salaire horaire ?

FIGURE 1.6 – Figure de l'exercice 1.2

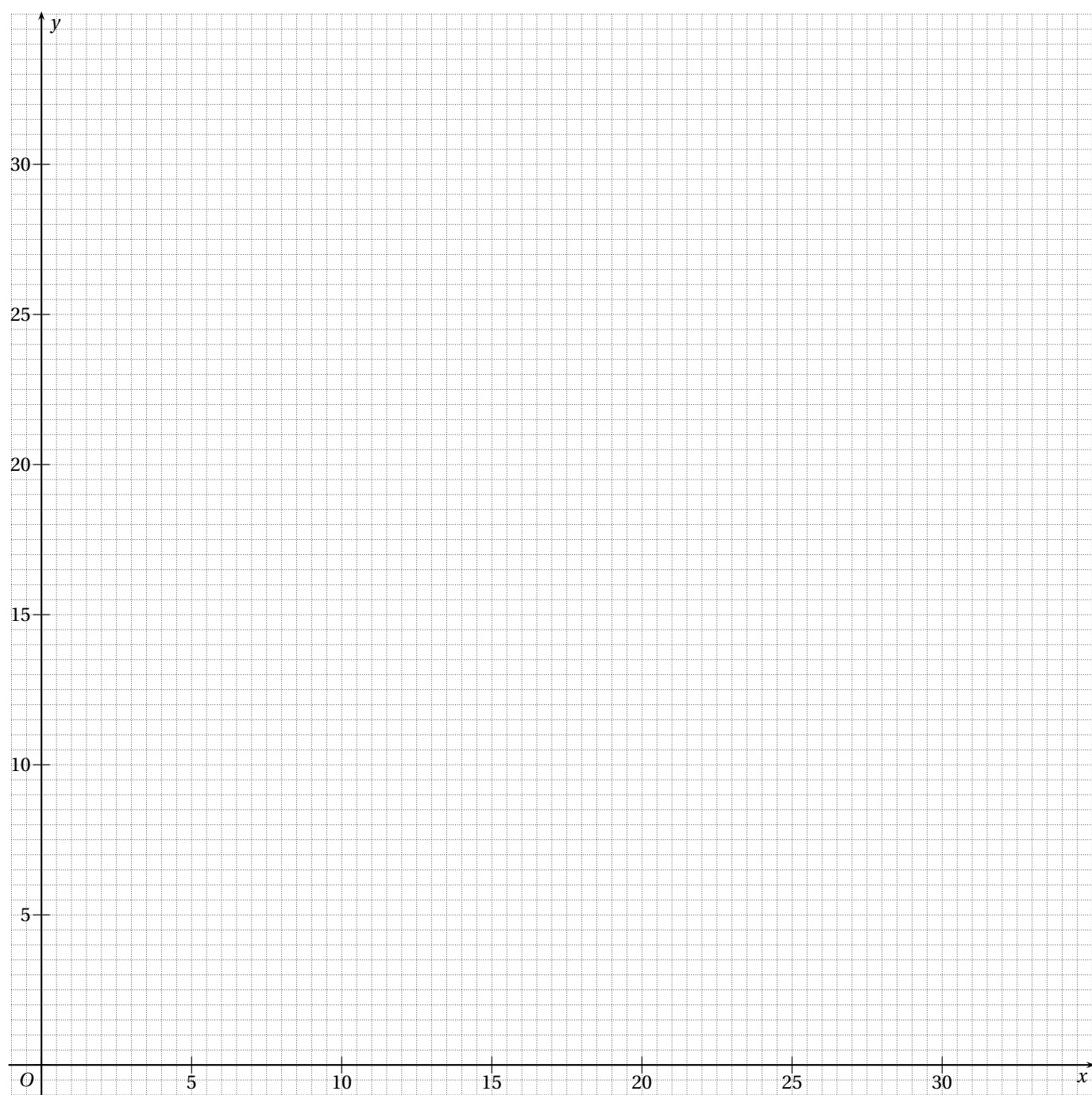


FIGURE 1.7 – Figure de l'exercice 1.3

