Graphes
Pour la Terminale ES

Groupe IREM de Luminy
Pierre Arnoux
Fernand Didier
Catherine Dufossé
Nicolas Lichiardopol
Christian Mauduit
Dominique Proudhon
Christiane Rambaud

18 octobre 2002

Table des matières

Introduction **iv**

1 Définitions de base **1**

1.1 Quelques problèmes . . . 1
1.2 Définitions et résultats . . . 3
1.2.1 Vocabulaire de base : Graphes, sommets, arêtes . . . 3
1.2.2 Sous-graphes . . . 5
1.2.3 Chaînes et connexité . . . 6
1.2.4 Chaîne eulérienne . . . 7
1.2.5 Graphes orientés . . . 8
1.3 Quelques exercices supplémentaires . . . 9
1.4 Compléments pour les enseignants . . . 11
1.4.1 Un peu de terminologie . . . 11
1.4.2 Démonstration du théorème d'Euler. . . . 11
1.4.3 Chaines eulériennes dans les graphes orientés . . . 12
1.4.4 Une application amusante : le graphe des mots . . . 13
1.4.5 Graphes hamiltoniens . . . 14
1.4.6 Graphes planaires . . . 14
1.5 Solution des exercices . . . 16

2 Graphes et matrices : problèmes de comptage de chaînes **20**

2.1 Quelques problèmes . . . 20
2.2 Récapitulation : les définitions et résultats . . . 22
2.3 Quelques exercices supplémentaires . . . 23
2.4 Compléments pour les enseignants . . . 25
2.4.1 Quelques applications des problèmes de comptage . . . 25
2.4.2 D'autres matrices en théorie des graphes . . . 25
2.5 Solution des exercices . . . 28

3 Problèmes de coloriage **30**

3.1 Quelques problèmes . . . 30
3.2 Récapitulation : les définitions et résultats . . . 34
3.3 Quelques exercices supplémentaires . . . 36
3.4 Compléments pour les enseignants . . . 38
3.4.1 Nombre de stabilité . . . 38
3.4.2 Majorations du nombre chromatique . . . 38
3.4.3 Le théorème des 4 couleurs . . . 39

3.5 Solution des exercices 40

4 Problèmes de plus court chemin 44
4.1 Un problème 44
4.2 Récapitulation : les définitions et résultats 45
4.3 Quelques exercices additionnels 46
4.4 Compléments pour les enseignants 47
4.4.1 Cet algorithme est-il efficace ? 48
4.4.2 Cet algorithme est-il correct ? 48
4.4.3 Quelques autres problèmes 49
4.5 Solution des exercices 49

5 Graphes étiquetés 51
5.1 Quelques exemples 51
5.1.1 Le jeu du labyrinthe 51
5.1.2 Un digicode 52
5.1.3 Reconnaissance de modèles 53
5.2 Récapitulation : les définitions et résultats 54
5.3 Quelques exercices supplémentaires 55
5.4 Compléments pour les enseignants 58
5.4.1 Terminologie 58
5.4.2 Historique 59
5.4.3 Expressions régulières et langages rationnels. 61
5.4.4 Automates déterministes et non déterministes 62
5.4.5 Quelques éléments de la preuve du théorème de Kleene 63
5.4.6 Une récréation mathématique : les suites automatiques 66
5.4.7 Un peu de bourbakisme 67
5.4.8 Une hiérarchie de langages 69
5.4.9 Une autre généralisation : les automates avec sortie 69
5.4.10 Quelques utilisations des automates 70
5.5 Solutions des exercices 71

6 Graphes probabilistes 74
6.1 Quelques exercices 74
6.2 Récapitulation : les définitions et résultats 79
6.2.1 Généralités : graphes probabilistes à p états 79
6.2.2 Un cas particulier : les graphes probabilistes à 2 états 81
6.2.3 Cas général : évolution vers un état stable 84
6.3 Quelques exercices additionnels 84
6.4 Compléments pour les enseignants 86
6.4.1 Terminologie 86
6.4.2 Retour sur le cas de deux états: valeurs propres, vecteurs propres 86
6.4.3 Le théorème de Perron-Frobenius 87
6.4.4 Application aux matrices stochastiques 90
6.4.5 Quelques applications des chaînes de Markov 90
6.5 Solution des exercices 91

Introduction

Ce texte présente la partie "graphes" de l'option de mathématiques de terminale ES. Le but de cette option n'est pas, bien sûr, de transformer les élèves de terminale ES en spécialistes de la théorie des graphes, mais de montrer comment l'utilisation judicieuse d'un graphe peut rendre certains problèmes concrets accessibles à un raisonnement mathématique.

Il n'est donc pas question, comme cela est bien précisé dans le programme, de faire un cours formel ; ce parti-pris se reflète dans le présent texte. Chaque chapitre débute donc par quelques problèmes dont la résolution est facilitée par la considération des propriétés d'un graphe. Une deuxième partie, courte, donne les définitions et propriétés nécessaires pour enseigner ce cours. Une troisième partie donne d'autres exercices possibles, avec quelques explications, en particulier sur leur intérêt pédagogique.

Enfin, une quatrième partie de chaque chapitre, intitulée *Compléments pour les enseignants*, est consacrée à des connaissances plus approfondies permettant d'avoir un certain recul, et de comprendre les raisons pour lesquelles on a choisi d'introduire ces notions. **Insistons sur le fait qu'elle n'est absolument pas nécessaire pour l'enseignement de l'option, et qu'elle ne fait pas du tout partie du programme !** Elle peut par contre donner des pistes pour les TPE, en montrant nombre de thèmes "pratiques" à propos desquels on peut développer une théorie mathématique utile; elle peut aussi, dans certains cas, donner des idées d'exercices, tels que le graphe des mots, ou les chaînes eulériennes orientées.

La terminologie a été volontairement restreinte au maximum, pour ne pas surcharger les élèves (il s'agit d'une option de 24H !). En particulier, nous avons choisi de commencer par les graphes non orientés, plus simples au départ, et d'introduire quand la situation le demande les graphes orientés, en reprenant le vocabulaire précédent (on parlera donc d'arête orientée, de chaine orientée, etc...). Nous reviendrons sur ce point dans les chapitres concernés.

De même, on a choisi de parler de graphes probabilistes là où les probabilistes parlent de chaînes de Markov, et de graphes étiquetés là où les informaticiens parlent d'automates finis ; les compléments de chaque chapitre donnent la terminologie usuelle. Il peut être intéressant de signaler aux élèves le vocabulaire couramment utilisé dans ces domaines, mais seul le vocabulaire donné dans le programme est exigible au baccalauréat.

Le texte a été rédigé entre mars et octobre 2002 par le groupe de l'IREM d'Aix-Marseille, à Luminy.

Chapitre 1

Définitions de base

1.1 Quelques problèmes

Commençons par un problème récréatif :

Exercice 1 *Une ligue de football contient 15 clubs. Pour des raisons de temps, on décide que chaque club ne jouera que la moitié des matchs possibles. Comment organiser le tournoi ? (on pourra commencer par étudier le cas de 7 clubs).*

Avec 15 clubs, il est assez difficile de démarrer le travail sur ce problème , à cause de la taille des données. Avec 7 clubs, on est rapidement amené à un dessin où chaque club est représenté par un point, et où on relie par un trait deux clubs qui disputent un match. Une bonne idée est alors de compter le nombre de traits, c'est-à-dire le nombre de matchs qui seront joués ; comme chaque trait a deux extrémités, c'est aussi la moitié du nombre de participations : si chacun des 7 clubs joue 3 matchs, il y a 21 participations, dont $\frac{21}{2}$ matchs, ce qui est absurde ! De même, dans le cas de 15 clubs, si chaque club joue la moitié des matchs possibles, soit 7, il doit y avoir $\frac{15\times 7}{2}$ matchs : l'organisation d'un tel tournoi n'est pas possible, pour de pures raisons arithmétiques. On voit que, plus généralement, pour la même raison, s'il y a un nombre impair d'équipes, il n'est pas possible qu'elles jouent toutes un nombre impair de matchs.

L'idée essentielle est de représenter la situation par un dessin particulier, un *graphe* : des points reliés par des traits. Dans ce dessin, la situation géométrique n'est pas importante, ce qui compte ce sont les points (ou *sommets*), et la façon dont ils sont reliés à d'autres par des traits (ou *arêtes*). Des problèmes très différents peuvent se ramener à une même représentation :

Exercice 2 *Comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?*

Si l'on pense à représenter chaque segment par un point, et à relier 2 points si les segments correspondants se coupent, on voit, exactement comme pour l'exercice précédent, que l'exercice proposé est impossible.

Remarquons que nous avons obtenu un résultat qui n'était nullement évident : pour montrer qu'un problème est possible, il suffit d'en exhiber une solution ; il est en général bien plus difficile de démontrer qu'un problème est impossible, et cela ne peut se faire sans un raisonnement.

Continuons par le problème suivant, qui est un classique : proposé en 1736 par Leonhart Euler, c'est le premier problème de la théorie des graphes. Il est aujourd'hui parfaitement résolu, mais les habitants de Koenigsberg (aujourd'hui Kaliningrad, ville russe enclavée entre la Pologne et la Lituanie) ne voyaient pas comment faire.

Exercice 3 *Problème des ponts de Königsberg : Au XVIIIe siècle, la ville de Koenisberg comprenait 2 îles et 7 ponts suivant le plan ci-dessous :*

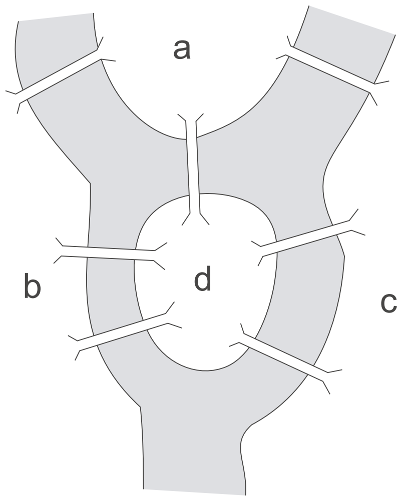


Figure 1.1: Les ponts de Koenigsberg

Les habitants souhaitaient faire une promenade passant une et une seule fois sur chaque pont. Y sont ils arrivés ?

Traduisons de même ce problème à l'aide d'un graphe. Chaque région de la ville est représentée par un sommet, et un pont entre deux régions, par une arête entre les sommets concernés, quel graphe obtient-on ? Comment interprète-on alors la condition sur la promenade ? Nous reviendrons plus loin sur ce problème.

De très nombreux problèmes pratiques peuvent être ainsi schématisés à l'aide d'un graphe ; en simplifiant la représentation, on peut ainsi trouver plus rapidement la solution (ou en voir l'impossibilité !). Pour certains problèmes, comme ceux que nous venons de voir, les arêtes n'ont pas d'orientation. Pour d'autres, il est indispensable d'avoir une orientation sur le graphe : le plan d'une ville comme graphe non orienté satisfera le piéton, tandis que ce même graphe orienté par les sens de circulation sera bien plus apprécié de l'automobiliste. Une autre utilisation classique des graphes est l'ordonnancement des tâches : pour un projet tel que la construction d'une maison, il y a différentes tâches qui doivent être effectuées dans un certain ordre : on doit creuser les fondations avant d'élever les murs. On peut représenter le projet par un graphe dont les sommets sont les différentes tâches, et où on relie A à B si A doit être terminée avant de commencer B. L'arête correspondante possède une orientation naturelle.

Une question importante est celle du choix du graphe associé à une situation donnée (il peut y en avoir plusieurs) ; comment choisir les sommets et les arêtes ? Comme on vient de le voir dans l'exercice 2, ce n'est pas toujours évident : dans la modélisation proposée, les segments sont les sommets du graphe, et les arêtes correspondent aux points d'intersection. Dans des chapitres ultérieurs, on étudiera des questions de compatibilité, il faudra décider si les arêtes correspondent aux couples de points compatibles ou incompatibles, et si les arêtes sont orientées ou non.

1.2 Définitions et résultats

Nous allons formaliser les notions qui précèdent.

1.2.1 Vocabulaire de base : Graphes, sommets, arêtes

Définition 1 *Un* graphe *G (non orienté) est constitué d'un ensemble $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ de points appelés* sommets, *et d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ d'*arêtes, *tels qu'à chaque arête a_i sont associés deux éléments de S, appelés ses extrémités, et que nous noterons $[s_j, s_k]_i$.*

Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues ; dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une *boucle*.

Une première manière d'évaluer la complication d'un graphe est de compter le nombre de ses sommets; les mathématiciens ont donné à ce nombre un nom particulier (que l'on retrouve dans d'autres domaines, par exemple en théorie des groupes) :

Définition 2 L'ordre *d'un graphe est le nombre de ses sommets.*

Définition 3 *Etant donnée une arête a associée à $[s_1, s_2]$, on dit que les sommets s_1 et s_2 sont les extrémités de l'arête a, et s_1 et s_2 sont dits* adjacents. *Lorsque $s_1 = s_2$, on dit que a est une* boucle.

Un graphe est dit simple *si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.*

Remarque : Deux arêtes sont dites *parallèles* lorsqu'elles ont mêmes extrémités. Dans certaines circonstances, il est naturel de considérer des graphes avec des arêtes parallèles (par exemple pour le problème des ponts de Koenigsberg). Cependant, la très grande majorité des problèmes que nous rencontrerons concerne des graphes simples, c'est-à-dire sans boucles ni arêtes parallèles. Il n'est donc pas utile d'introduire cette terminologie en cours.

Exemple 1 : Considérons le graphe G_1 d'ordre 4 défini par :

Soit $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$ tel qu'aux arêtes a, b, c, d, e soient respectivement associés $[s_1, s_1], [s_1, s_2], [s_1, s_2], [s_1, s_3], [s_2, s_3]$. Une représentation possible de ce graphe est :

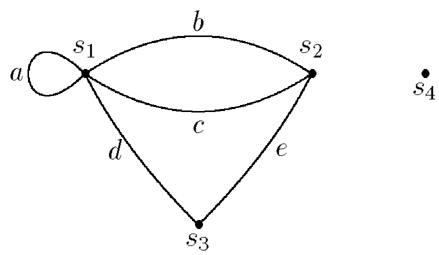


Figure 1.2: Le graphe G_1

Le point s_4 est un *point isolé* , l'arête a est une boucle, b et c sont des arêtes ayant mêmes extrémités, $[s_1, s_2]$ est une arête multiple, les sommets s_1 et s_2 sont adjacents, ainsi que s_1 et s_3, puisqu'ils sont reliés par une arête.

Un graphe n'est rien d'autre qu'un dessin formé de points joints par des traits, et il est plus facile de représenter ce dessin, que de donner les ensembles S et A, et les extrémités de chaque arête ; dans le dessin, chaque sommet est représenté par un point, et une arête liant les sommets s_1 et s_2 par un trait reliant les points représentant s_1 et s_2. Il faut bien remarquer qu'il y a plusieurs dessins possibles pour un même graphe, et que deux arêtes peuvent se croiser sans pour autant définir un sommet (Comme on le verra ci-dessous, il n'est pas toujours possible de représenter un graphe sur une feuille sans qu'il y ait de croisement). Le dessin doit donc clairement identifier les sommets.

Exemple 2 : On a représenté dans le dessin qui suit un certain nombre de graphes. Il est facile de voir que G_2 et G_3, d'une part, G_4 et G_5 d'autre part représentent le même graphe ; de même, G_6 et G_8 représentent le même graphe. Par contre, G_6 et G_7 sont des graphes d'ordre 6 différents. Une façon de le prouver est la suivante : dans G_6 et G_7, si l'on fixe un sommet, il y a exactement 2 sommets qui ne lui sont pas adjacents ; mais dans G_6, ces deux sommets sont reliés par une arête (comme dans G_8 bien sûr) alors que dans G_7 ils ne sont reliés par aucune arête.

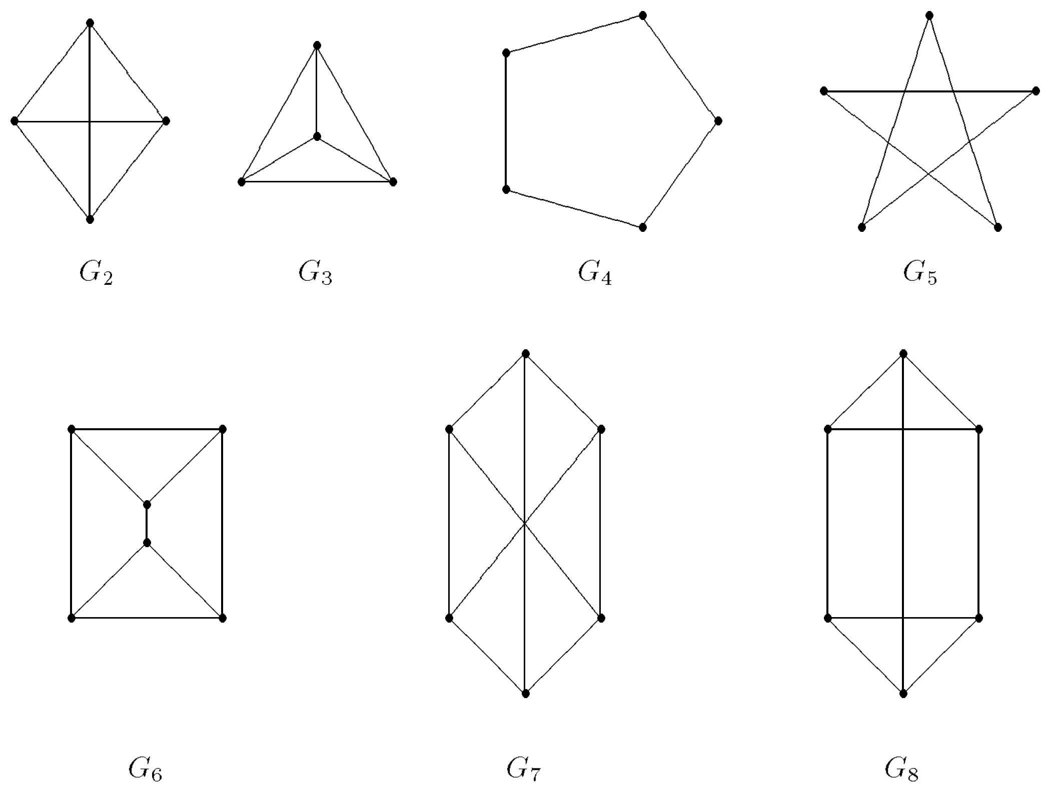


Figure 1.3: Quelques exemples de graphes

Remarque : C'est un problème très difficile en général, dès que le nombre de sommets est assez grand, de décider si deux dessins représentent le même graphe, à un changement de nom près pour les sommets et les arêtes ; il est souvent plus facile, en utilisant des propriétés particulières, de montrer que deux dessins *ne représentent pas* le même graphe.

Définition 4 *Un graphe simple est dit* complet *si tous ses sommets sont adjacents, c'est à dire si toutes les arêtes possibles existent (sauf les boucles). On appelera K_n le graphe complet à n sommet (il n'y en a qu'un).*

Définition 5 *On appelle* degré *d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Un sommet est* pair *(respectivement* impair*) si son degré est un nombre pair (respectivement impair).*

Exemple 3 :

- Dans le graphe G_1 de l'exemple 1 : s_1 est de degré 5, s_2 de degré 3, s_4 de degré 0.
- Les sommets du graphe complet d'ordre n sont tous de degré n-1.

On prouve facilement le théorème suivant :

Théorème 1 *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair.*

Démonstration : Il suffit de faire comme pour le premier exercice : lorsque on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité. ■

Corollaire 1 *Dans un graphe le nombre de sommets impairs est toujours pair.*

Démonstration : En effet, sinon, la somme des degrés des sommets serait impaire. ■

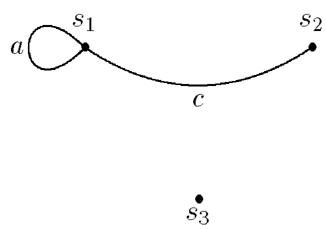
On retrouve ici le fait que le premier exercice posé en introduction est impossible : il n'existe pas de graphe d'ordre 15 tel que chaque sommet soit de degré 7.

1.2.2 Sous-graphes

On a souvent besoin d'isoler une partie d'un graphe :

Définition 6 *Soit $G = (S, A)$ un graphe, le graphe $G' = (S', A')$ est un* sous-graphe *de G, si S' et A' sont des sous ensembles de S et A, tels que toutes les extrémités des arêtes de A' soient des éléments de S'. Si de plus A' contient exactement toutes les arêtes de A dont les extrémités sont des éléments de S' alors on dit que $G' = (S', A')$ est le* sous-graphe de G engendré par S' *; il est déterminé de manière unique par la donnée de S'.*

Exemple 4 : Le graphe suivant :



est un sous graphe de G_1, le sous graphe engendré par s_1, s_2, s_3 est $G_1 - \{s_4\}$.

Le sous-graphe engendré par $\{s_4, s_3\}$ est sans arête, c'est lui même.

Si S est l'ensemble des villes de France qui ont une gare, et A l'ensemble des voies ferrées les reliant, si S' est l'ensemble des villes d'un département, avec une gare, et A' l'ensemble des voies ferrées les reliant, le graphe $G' = (S', A')$ est le sous-graphe du graphe $G = (S, A)$ engendré par S'. Maintenant si on considère le réseau TGV : S'' ensemble des villes de France qui ont une gare TGV, et A'' ensemble des voies ferrées TGV les reliant, le graphe $G'' = (S'', A'')$ est un sous graphe de G, mais n'est pas engendré par S'', il existe des voies ordinaires entre Lyon et Marseille par exemple.

Définition 7 *On dit qu'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est* stable *s'il ne contient pas de paire de sommets adjacents.*

On peut aussi parler de sous-graphe stable : cela revient au même, puisque si un ensemble de sommets est stable, le graphe engendré, par définition, n'a pas d'arête. Dans l'exemple ci-dessus, le sous-ensemble $\{s_4, s_3\}$ est stable.

Ce terme de "stable" peut paraître arbitraire. Il est en fait naturel si l'on considère ce qu'on appelle "graphe d'incompatibilité": dans un groupe d'individus, on peut définir un graphe en reliant par une arête les individus qui ne peuvent se supporter. Si l'on veut choisir un sous-groupe de personnes qui travaillent ensemble, il est préférable de choisir un sous-ensemble stable ! C'est une notion importante pour divers problèmes ; on verra en particulier beaucoup d'applications de cette notion dans le chapitre sur les coloriages.

1.2.3 Chaînes et connexité

Dans bien des problèmes de graphes, il est naturel de considérer ce que l'on peut appeler, de façon informelle, des "parcours" ou "chemins". Le mot utilisé en théorie des graphes est "chaîne".

La notion intuitive de chaîne, ou plus tard de chaîne orientée, se comprend bien sur un dessin, et il est essentiel que les élèves sachent reconnaître si un ensemble donnée d'arêtes est une chaîne. Il est moins facile d'en donner une définition effective. C'est un bon exercice de tenter de donner une définition formelle de cette notion, non pour obliger les élèves à l'apprendre par coeur, mais pour leur montrer les difficultés qu'il peut y avoir à rédiger une définition ou un théorème, et la raison pour laquelle cette rédaction est parfois complexe :

Exercice 4 *Les définitions suivantes formalisent-elles bien ce que l'on veut?*

Définition 1 : on appelle chaîne une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'arêtes qui est telle que deux arêtes consécutives aient une extrémité commune.

Définition 2 : on appelle chaîne une suite $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que deux sommets consécutifs soient adjacents.

Après avoir passé un peu de temps sur cet exercice, on appréciera mieux la définition suivante, d'apparence un peu complexe :

Définition 8 *Une* chaîne *dans un graphe G est une suite finie : $s_0, a_1, s_1, a_2, s_2, a_3, s_3 \ldots a_n, s_n$ débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités. La* longueur de la chaîne *est égale au nombre d'arêtes qui la constituent ; la chaîne est fermée si $s_0 = s_n$, si de plus toutes ses arêtes sont distinctes on dit alors que c'est un* cycle*. Un k*-cycle *est un cycle de longueur k.*

Remarque : Quand il n'y a pas d'ambiguïté (pas d'arêtes multiples), on peut définir une chaîne par seulement la suite de ses sommets ou de ses arêtes; dans ce cas, la définition 2 proposée dans l'exercice 4 est correcte, mais toujours pas la définition 1. On peut la remplacer par la suivante, qui est correcte dans tous les cas: on appelle chaîne une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'arêtes telles que chaque arête a_i, pour $1 < i < n$, est reliée à a_{i-1} par une de ses extrémités, et à a_{i+1} par l'autre.

Exemple 5 : a, b, c, b, e est une chaîne de longueur 5 dans G_1 ; b, e, d ainsi que a, b, c, sont des 3-cycles de G_1.

Considérons maintenant le problème suivant :

Exercice 5 *Dans un tout petit pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute. Peut-on se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes ?*

Soit A une ville quelconque. L'autoroute nous conduit de la capitale vers au moins 7 villes différentes ; on a donc un réseau de 8 villes reliées par autoroute. De la ville A on peut également relier par autoroute au moins 7 autres villes différentes ; on a donc un nouveau réseau de 8 villes reliées par autoroute. Il doit y avoir une ville commune à ces deux réseaux, car sinon le pays aurait au moins 16 villes. La capitale est donc reliée à A en au plus deux coups, en passant par cette ville commune ; elle est donc reliée à toutes les autres villes du pays.

Le graphe qui représente la situation précédente sera dit connexe.

Définition 9 *Un graphe est* connexe *si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne (c'est un graphe en un seul morceau). On appelle* composante connexe *du graphe G un sous-graphe connexe maximal de G (c'est à dire qui n'est contenu dans aucun autre sous-graphe connexe.)*

1.2.4 Chaîne eulérienne

Posons nous le problème suivant :

Exercice 6 *Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes ci dessous ?*

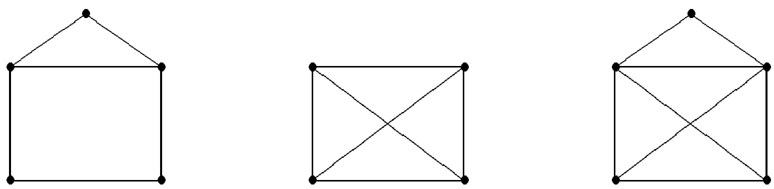


Figure 1.4: Le problème d'Euler

En faisant des essais, on constate assez vite que ceci est possible pour les graphes 1 et 3, mais apparemment pas pour le graphe 2. Ceci nous conduit à définir :

Définition 10 *Une chaîne est* eulérienne *si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe ; si la chaîne est un cycle, on l'appelle* cycle eulérien*.*

Le théorème suivant, dit *théorème d' Euler*, est à l'origine de la théorie des graphes :

Théorème 2 *Un graphe connexe a une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont pairs sauf au plus deux.*

De façon plus précise :

- si le graphe n'a pas de sommet impair, alors il a un cycle eulérien.
- le graphe ne peut avoir un seul sommet impair, par le corollaire 1.
- si le graphe a deux sommets impairs, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

On verra la démonstration du théorème d'Euler dans les compléments ; elle peut être faite en classe à titre d'exercice. Le corollaire suivant, conséquence immédiate du théorème, est souvent utile :

Corollaire 2 *Un graphe ayant plus de deux sommets impairs ne possède pas de chaîne eulérienne.*

Ces résultats permettent de résoudre beaucoup de problèmes pratiques se traitant en théorie des graphes. Reprenons le problème des ponts de Königsberg cité au début du chapitre. Le graphe associé au plan de la ville est donc le graphe suivant :

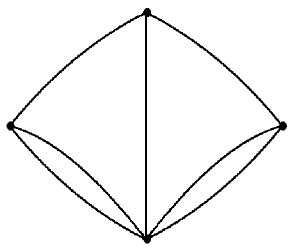


Figure 1.5: Le graphe de Koenigsberg

Le problème posé devient : le graphe a-t-il une chaine eulérienne ? Le théorème d'Euler nous permet de répondre non, puisque les 4 sommets sont impairs.

1.2.5 Graphes orientés

Il existe de nombreux domaines où les graphes sont orientés. Par exemple : plan de ville, avec les sens interdits ; parcours en montagne, où il est utile d'indiquer le sens de montée ! Circuit électrique en courant continu, où il faut orienter les arêtes pour décider du signe de l'intensité : ce n'est pas la même chose de faire passer 10 ampères de A vers B ou de B vers A ; graphe d'ordonnancement, où les arêtes relient une tâche à une autre qui doit la suivre : on ne peut faire la peinture avant le plâtre.

Définition 11 *On appelle* graphe orienté *un graphe où chaque arête est orientée, c'est-à-dire qu'elle va de l'une des ses extrémités, appelée* origine *ou* extrémité initiale *à l'autre, appelée* extrémité terminale *.*

Dans un graphe orienté, chaque arête orientée possède un début et une fin.

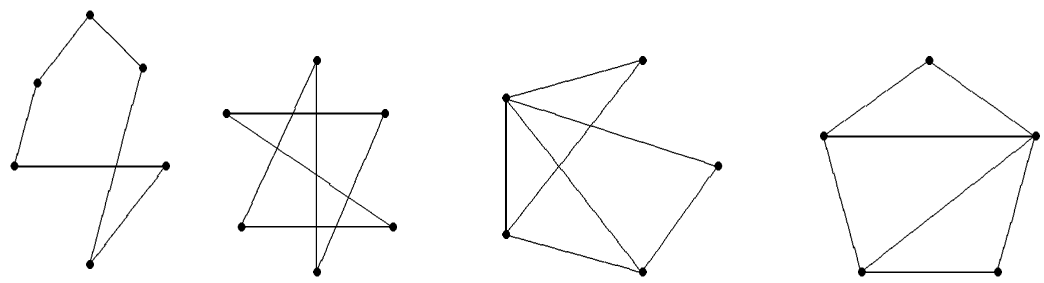
Toutes les notions que nous avons définies pour un graphe ont un équivalent pour un graphe orienté. Nous nous contenterons de rajouter le mot "orienté" pour préciser ; le contexte rendra évidente l'interprétation à donner.

En particulier, une *chaîne orientée* est une suite d'arêtes telle que l'extrémité finale de chacune soit l'extrémité initiale de la suivante. On prendra garde au fait que l'on peut définir et utiliser des chaînes (non orientées) sur un graphe orienté. Par exemple, sur un plan de ville où toutes les rues sont en sens unique, un parcours de voiture correspond à une chaîne orientée, un parcours de piéton correspond à une chaîne (non orientée).

1.3 Quelques exercices supplémentaires

Pour s'habituer un peu à la représentation des graphes :

Exercice 7 *Décider si les dessins suivants représentent les mêmes graphes.*



G_1 G_2 G_3 G_4

L'exercice qui suit montre aux élèves qu'un même graphe peut représenter des situations très diverses.

Exercice 8 *Dessiner les graphes suivants :*

- *Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.*
- *Les sommets du graphe sont tous les sous ensembles à deux éléments de {1, 2, 3, 4 } deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.*
- *Graphe associé à la situation : Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions qui ne se connaissent pas, chaque espion doit entrer en contact avec tous les espions des autres pays.*

Il est utile de montrer quelques cas simples, qui permettent aussi de voir à quelle vitesse la situation se complique quand l'ordre augmente ; c'est le but des deux exercices suivants.

Exercice 9 *Dessiner les graphes complets K_n, pour $n = 2, 3, 4, 5$. Combien ont ils d'arêtes ?*

Exercice 10 *Dessiner les graphes simples d'ordre 3, 4, 5, 6 dont tous les sommets sont de degré 2.*

La difficulté de l'exercice suivant est presque toute dans la représentation sous forme de graphe. Il suffit ensuite de compter le nombre d'arêtes d'un graphe complet.

Exercice 11 *Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :*

Régle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.

Régle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun ;

Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

La régle 1 nous permet d'obtenir la représentation graphique suivante :

les commissions sont les sommets et un conseiller faisant partie d'exactement 2 commissions est représenté par une arête reliant les 2 sommets qui les représentent (remarquons que sans cette règle la représentation obtenue ne serait pas un graphe, mais un objet plus compliqué, un "hyper graphe"). La règle 1 nous dit aussi que le graphe obtenu est sans boucle. La règle 2 implique qu'il n'y a pas d'arête multiple, et que deux sommets quelconques sont adjacents ; c'est à dire que le graphe est complet, c'est K_7, il a $\binom{7}{2}$ arêtes, soit 21 conseillers municipaux. On peut même en déduire le nombre de membres de chaque commission, c'est-à-dire 6.

L'exercice suivant est une application simple du théorème sur les degrés.

Exercice 12 *Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?*

Voici une généralisation pas tout-à-fait évidente de l'exercice 5 :

Exercice 13 *Un graphe simple d'ordre 2p est tel que chacun de ses sommets est de degré au moins p. Montrer que ce graphe est connexe. A-t-on le même résultat pour un graphe simple d'ordre n tel que chacun de ses sommets soit de degré supérieur ou égal à (n-1)/2 ?*

L'exercice qui suit est une application classique du théorème d'Euler ; la difficulté est toute dans la construction du graphe (c'est le graphe dual de celui qui apparaît sur la figure). Il est facile de trouver de nombreuses variantes sur ce thème.

Exercice 14 *Cinq pays sont représentés avec leurs frontières. Est il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?*

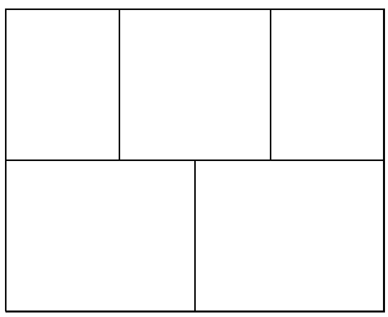


Figure 1.6: Le problème des frontières

Voici un autre exercice qui, sans être une application directe du théorème d'Euler, repose sur les mêmes idées.

Exercice 15 *On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimun faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?*

1.4 Compléments pour les enseignants

1.4.1 Un peu de terminologie

L'option de terminale ES n'est qu'une initiation. Les concepteurs du programme ont donc voulu réduire au minimum la terminologie employée, pour que l'élève se concentre sur la modélisation et le raisonnement. En particulier, on évitera l'emploi de vocabulaire particulier pour les cas orientés, en se contentant de rajouter l'adjectif "orienté" là où c'est nécessaire. Au niveau où nous nous plaçons, ceci ne devrait pas entraîner de difficultés.

Pour les spécialistes de la théorie des graphes, il est bien entendu nécessaire de fixer en détail la terminologie. Nous la donnons ici pour information, en rappelant qu'elle n'est pas exigible des élèves (mais elle peut être utile dans certains cas pour accéder à la littérature).

Une arête orientée s'appelle un *arc*. Une chaîne orientée s'appelle un *chemin*. Une chaîne orientée fermée s'appelle un *circuit*.

On dit qu'un graphe est *fortement connexe* si, pour tout couple de sommets distincts a, b, il existe un chemin de a à b. Un graphe fortement connexe est connexe ; la réciproque est fausse. Par exemple, un plan de ville, avec les sens interdits, ne doit pas seulement être connexe, il doit aussi être fortement connexe, sinon il y aurait des points inaccessibles à partir de certains autres.

Pour les graphes orientés, le degré d'un sommet x se divise en *demi-degré intérieur*, nombre des arcs qui arrivent en x, et demi-degré extérieur, nombre des arcs qui partent de x. De même, les sommets adjacents à x se divisent en prédécesseurs et successeurs de x. Si le graphe est simple (c'est-à-dire, si pour tout couple (x, y), il y a au plus un arc qui va de x à y), le nombre de successeurs (resp. prédécesseurs) de x est le demi-degré extérieur (resp. intérieur) de x.

1.4.2 Démonstration du théorème d'Euler.

Démonstration : Supposons que le graphe connexe G possède une chaîne eulérienne. Chaque fois qu'en parcourant cette chaîne on arrive à un sommet par une arête, on en repart par une autre, sauf pour les extrémités de cette chaîne. Comme cette chaîne est eulérienne, chaque arête est parcourue une et une seule fois, ainsi si la chaîne est passée n fois par le sommet s, ce sommet est de degré $2n$. Par conséquent tous les sommets du graphe sont pairs sauf peut-être deux (les extrémités de la chaîne si elles sont différentes).

Nous allons démontrer réciproquement que, si tous les sommets d'un graphe connexe sont pairs sauf deux (notés u et v), il existe une chaîne eulérienne reliant ces deux sommets, ceci par récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe. L'on en déduira alors qu'un graphe connexe dont tous les sommets sont pairs possède un cycle eulérien. En effet, si dans un tel graphe on ôte arbitrairement une arête a, on est ramené au cas précédent, la chaîne eulérienne est alors complétée en un cycle eulérien par ajout de l'arête a. On peut toujours le faire car il n'y a pas de sommet de degré zéro dans un graphe connexe.

Récurrence : C'est clair pour un graphe connexe à une arête.

Supposons démontré le théorème pour les graphes ayant au plus $n-1$ arêtes, et considérons un graphe G ayant n arêtes ; lorsque une chaîne partant du sommet u dans une direction quelconque et ne parcourant jamais deux fois la même arête, arrive à un sommet s (différent de v), elle a parcourue un nombre impair d'arêtes incidentes à s, et par conséquent, cette chaîne peut repartir de s par une arête non encore parcourue ; le seul sommet d'où l'on ne peut repartir étant le sommet v.

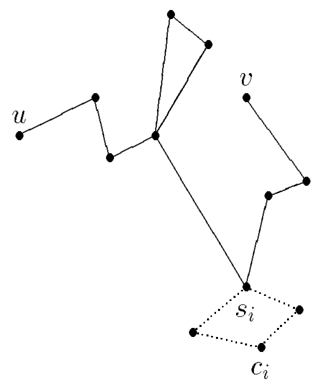


Figure 1.7: La preuve du théorème d'Euler

Cependant dans cette chaîne c arbitraire reliant les sommets u et v, il est possible que toutes les arêtes du graphe n'aient pas été parcourues, il reste donc un graphe G' dont tous les sommets sont de degré pair. Soient $C_1...C_k$ ses composantes connexes, par hypothèse de récurrence elles admettent des cycles eulériens $c_1...., c_k$, et , comme le graphe G est connexe, la chaîne c rencontre forcément les composantes connexes C_i en au moins un sommet soit s_i. On obtient alors une chaîne eulérienne en intercalant dans la chaîne c, les cycles c_i lorsqu'on rencontre le sommet s_i (voir figure 1.7).

■

1.4.3 Chaines eulériennes dans les graphes orientés

Toutes les définitions précédentes s'étendent d'une manière naturelle aux graphes orientés. Il est naturel de se poser la même question pour un graphe orienté : est-il possible de parcourir toutes les arêtes, en respectant l'orientation, sans passer deux fois par une même arête?

On définit facilement (exercice !) la notion de chaîne orientée eulérienne et de cycle orienté eulérien (chemin ou circuit eulérien, avec la terminologie standard).

C'est un exercice de bon niveau de trouver la généralisation naturelle du théorème d'Euler pour les graphes orientés :

Théorème 3 *Un graphe orienté connexe possède un cycle orienté eulérien si et seulement si de chaque sommet il part autant d'arêtes qu'il en arrive.*

On laisse au lecteur le soin de trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une chaine orienté connexe dans un graphe orienté.

On remarquera aussi que le théorème sur la somme des degrés se précise un peu pour les graphes orientés : avec le vocabulaire donné ci-dessus, la somme des demi-degrés intérieurs est égale à la somme des demi-degrés extérieurs, et au nombre d'arcs (puiqu'il revient au même de compter les arcs, leur origine, ou leur extrémité terminale). Le variante orientée du théorème d'Euler demande plus précisément que, pour chaque sommet, son demi-degré intérieur soit égal à son demi-degré extérieur.

1.4.4 Une application amusante : le graphe des mots

Le "graphe des mots", ou graphe de de Bruijn, du nom de son inventeur, peut être abordé à titre d'exercice. C'est une application amusante du théorème précédent. Nous le présentons par l'intermédiaire d'un exemple :

Exercice 16 *Un code d'entrée d'un immeuble est composé de trois chiffres valant 0 ou 1 ; (nous dirons dans un chapitre ultérieur un mot de longueur trois écrit avec l'alphabet $\{0,\ 1\}$). Trouver un mot, de longueur aussi petite que possible, qui contienne toutes les suites de trois chiffres 0 ou 1 ; un tel mot contiendra alors toujours le code d'entrée.*

Solution : On utilise un graphe orienté construit de la manière suivante : Il y a quatre mots de longueur deux écrits avec les chiffres 0 et 1, à savoir : 00, 01, 11, 10 ; ils seront les sommets du graphe orienté. Relions par une arête orientée tout sommet ab aux deux sommets $b0$ et $b1$; du sommet ab partent donc exactement deux arêtes, et arrivent aussi exactement deux arêtes, celles venant des sommets $0a$ et $1a$ (si a et b sont identiques on aura une boucle), voir la figure 1.8.

Le graphe ainsi construit possède donc par la version orientée du théorème d'Euler un cycle orienté eulérien. On peut coder chaque arête orientée par un mot de longueur 3, plus précisement, l'arête orientée partant de ab vers bc est codée par abc.

Pour obtenir une solution, on part d'un sommet quelconque, par exemple 10, et on parcourt un circuit eulérien : chaque arête parcourue indique quel chiffre on ajoute à la droite du mot commencé. On obtient ainsi une suite de 10 chiffres, par exemple ici 1011100010, (la liste des sommets est : 10-01-11-11-10-00-00-01-10), ou encore partant du même sommet 1000101110 (écrire la liste des sommets).

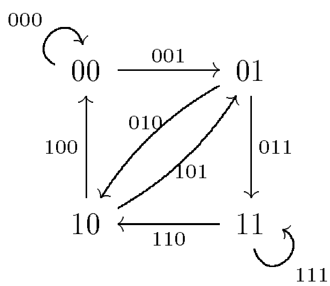


Figure 1.8: Le graphe des mots de longueur 2 sur 2 lettres

Il n'est pas difficile de vérifier que l'on peut étendre ce résultat à un alphabet fini quelconque et à des mots de longueur quelconque. On montre ainsi que, étant donné un alphabet de d lettres, il existe toujours un mot de longueur $d^n + (n-1)$ qui contient tous les mots de longueur n sur cet alphabet une fois et une seule (ici nous avons $d = 2$, $n = 3$, donc un mot de longueur $8 + 2 = 10$).

1.4.5 Graphes hamiltoniens

Au lieu de passer une fois et une seule par chaque arête, il est naturel de demander à passer une fois et une seule par chaque sommet. On définit ainsi une *chaîne hamiltonienne*, c'est-à-dire une chaîne qui contient une fois et une seule chaque sommet du graphe, exception faite pour les extrémités de la chaîne si celle ci est fermée. Si la chaîne est un cycle, on l'appelle *cycle hamiltonien*. Un graphe qui possède un cycle hamiltonien est dit *graphe hamiltonien* .

De façon un peu surprenante, la théorie des graphes hamiltoniens est considérablement plus difficile que celle des graphes eulériens (et complètement hors programme !). On dispose de conditions nécessaires et de conditions suffisantes pour savoir si un graphe est hamiltonien, mais jusqu'en 1972 on ne connaissait pas de condition nécessaire et suffisante. Citons le théorème de Dirac qui donne une condition suffisante simple pour qu'un graphe non orienté soit hamiltonien.

Théorème 4 *Si chaque sommet d'un graphe d'ordre n est de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$ alors le graphe admet un cycle hamiltonien.*

On peut cependant appliquer les résultats de la section précédente pour montrer que les graphes de mots sont toujours hamiltoniens. Fixons un alphabet, et considérons le graphe des mots de longueur n sur cet alphabet. Il est relié au graphe des mots de longueur $n-1$: ses sommets sont exactement les arêtes du graphe des mots précédent ! De plus, on voit facilement qu'un sommet du graphe des mots de longueur n est le successeur d'un autre si et seulement si l'arête correspondante à ce sommet dans le graphe des mots de longueur $n-1$ a pour origine l'extrémité terminale de l'autre arête. Par exemple, dans le graphe des mots de longueur 3, 110 est un successeur de 011; dans le graphe des mots de longueur 2, l'arête 110 a pour origine 11, qui est l'extrémité terminale de 011. On montre alors facilement que tout circuit eulérien dans le graphe des mots de longueur $n-1$ correspond à un circuit hamiltonien dans le graphe des mots de longueur n.

1.4.6 Graphes planaires

Dès que l'on commence à dessiner un graphe, on se heurte à un problème très naturel: quels sont les graphes que l'on peut dessiner sur une feuille de papier sans que leurs arêtes ne se croisent? C'est le problème bien connu des trois usines et des trois maisons :

Exercice 17 *Trois maisons doivent être reliées à 3 usines qui leur fournissent l'eau, le gaz et l'electricité ; on demande de tracer le plan du réseau de telle manière que les tuyaux ne se croisent pas.*

Ce graphe est ce qu'on appelle le *graphe bi-parti complet d'ordre 3*, noté $K_{3,3}$. Il n'est pas du tout évident de voir s'il peut être dessiné sur un plan, on trouvera la réponse ci-dessous. (on appelle *graphe bi-parti* un graphe tel que l'ensemble des sommets est partitionné en deux sous-ensembles, et où toute arête relie un sommet contenu dans l'un des sous-ensembles à un sommet contenu dans l'autre ; par exemple, le graphe représentant les mariages dans une population est un graphe bi-parti).

Définition 12 *On dit qu'un graphe est* planaire *s'il peut être dessiné dans un plan sans que les arêtes ne se croisent.*

Une fois représenté sur le plan, un graphe planaire nous donne des données supplémentaires : il y a les sommets et les arêtes, mais il y a aussi les faces qu'elles délimitent ; il y a un certain nombre de faces interieures, bornées, et une face extérieure, non bornée.

On peut alors définir un *graphe dual*, dont les sommets sont les faces du graphe précédent, et dont les arêtes sont les arêtes du graphe précédent, chaque arête reliant les deux faces qu'elle borde (il peut se faire que ce soit la même face des deux côtés; dans ce cas, on a une boucle dans le graphe dual).

Si l'on note s le nombre de sommets (l'ordre du graphe), a le nombre d'arêtes, et f le nombre de faces, on a une relation remarquable, appelée suivant les auteurs relation d'Euler ou de Descartes :

Théorème 5 *Pour un graphe planaire connexe, on a :*

$$s - a + f = 2$$

Cette relation peut se démontrer par récurrence, de façon non triviale. On trouvera une autre démonstration, utilisant l'algèbre linéaire (plus précisément, la dimension de l'espace des cycles du graphe et des cocycles du graphe dual) dans le livre [10].

Cette relation a une interprétation géométrique remarquable : elle est en effet aussi vraie pour tout polyèdre convexe, car on peut toujours projeter un tel polyèdre, d'abord sur la sphère, puis sur le plan. On a ainsi, pour le tétraèdre, 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, pour le cube, 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces, pour l'octaèdre, 6 sommets, 12 arêtes et 8 faces. On remarquera que le cube et l'octaèdre échangent leur nombre de sommets et de faces; en fait, les graphes correspondant sont duaux l'un de l'autre (voir la figure ci-dessous). Il en est de même de l'icosaèdre et du dodécaèdre.

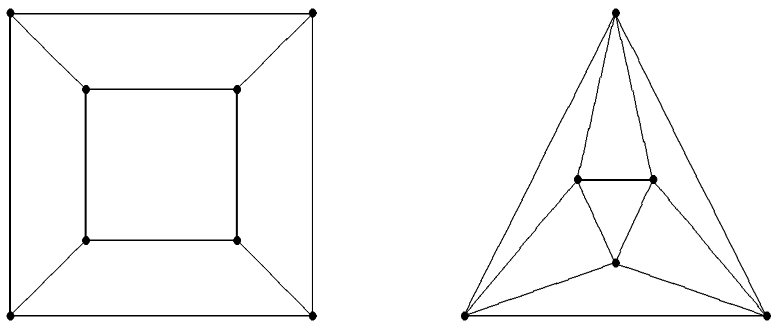


Figure 1.9: Les graphes du cube et de l'octaèdre

On peut utiliser cette formule pour démontrer que certains graphes ne sont pas planaires. En effet, considérons un graphe simple planaire; alors, chaque face est bordée par au moins 3 arêtes (une face bordée par une seule arête correspond à une boucle, une face bordée par 2 arêtes correspond à 2 arêtes joignant les mêmes sommets). Si toutes les faces étaient triangulaires, on aurait $3f = 2a$, puiqu'il y a 3 arêtes par face, mais qu'en comptant ainsi, on compte chaque arête 2 fois. En général, on a seulement $3f \leq 2a$, puisque chaque arête borde deux faces, et que chaque face est bordée par au moins trois arêtes. En remplaçant f par $2 + a - s$, au moyen de la relation d'Euler-Descartes, on obtient :

Proposition 1 *Pour un graphe simple, planaire, connexe, on a* $a \leq 3s - 6$

En particulier, un graphe planaire simple connexe d'ordre 5 a au plus 9 arêtes. Or le graphe complet d'ordre 5, K_5, a 10 arêtes. Donc :

Proposition 2 *Le graphe K_5 n'est pas planaire*

On peut raffiner un peu s'il n'y a pas de face triangulaire ; dans ce cas, toute face est bordée par au moins 4 arêtes, et on a donc $4f \leq 2a$; en remplaçant, on obtient :

Proposition 3 *Pour un graphe simple, planaire, connexe, sans faces triangulaires, on a $a \leq 2s-4$*

Il est facile de voir qu'un graphe simple bi-parti ne peut avoir de faces triangulaires ; donc un graphe planaire simple, connexe, bi-parti, à 6 sommets a au plus 8 arêtes. Mais le graphe $K_{3,3}$ que nous avons rencontré au début de cette section a 9 sommets, donc :

Proposition 4 *Le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire.*

Cette proposition répond à l'exercice initial : le plan demandé est impossible.

Il est clair qu'un graphe obtenu a partir d'un graphe non planaire en subdivisant une arête par insertion de sommets est encore non planaire. Il est aussi clair que tout graphe qui contient un graphe non planaire est encore non planaire. C'est un résultat remarquable que les deux graphes que nous venons de voir sont les seules obstructions à être planaire :

Théorème 6 (Théorème de Kuratowski) *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucun sous-graphe obtenu à partir de K_5 et de $K_{3,3}$ par subdivision des arêtes.*

On pourra trouver une preuve de ce théorème dans [10], page 118.

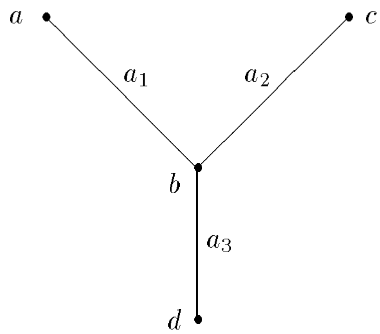
1.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1 : Comme on l'a vu dans la section 2, c'est juste un problème de parité: puisque chacune des 15 equipes joue 7 matchs, le double du nombre de matchs doit être 7×15, ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 2 : C'est le même problème que le précédent.

Solution de l'exercice 3 : Il a été résolu dans le cours du chapitre: on schématise la situation par un graphe dont les sommets sont les îles, et les arêtes sont les ponts. On constate alors que tous les sommets sont impairs, il ne peut donc y avoir de chaîne eulérienne, et le problème est impossible.

Solution de l'exercice 4 : La définition 1 n'est jamais correcte. En effet, on pourrait alors prendre comme chaîne une suite de 3 arêtes a_1, a_2, a_3 dont la première joint le sommet a au sommet b, la seconde le sommet b au sommet c, et la troisième le sommet b au sommet d. Cela satisfait bien la définition: chaque arête possède un sommet en commun avec la suivante. Le problème est que la deuxième arête possède le même sommet en commun avec la précédente et la suivante; cela donne une figure en Y qui n'est pas ce que l'on veut définir, comme dans le dessin ci-dessous :



La définition 2 n'est pas correcte si le graphe n'est pas simple: en effet, s'il y a plusieurs arêtes d'un sommet à un autre, la suite des sommets ne suffit pas à définir le parcours. Elle est par contre correcte si le graphe est simple.

Solution de l'exercice 5 : La solution a été donnée à la suite de l'exercice.

Solution de l'exercice 6 : Le premier graphe a 2 sommets impairs ; il contient donc une chaîne eulérienne, mais pas de cycle eulérien. Le deuxième a 4 sommets impairs. Il ne contient donc pas de chaîne eulérienne. Le dernier graphe, comme le premier, a 2 sommets impairs ; il contient donc aussi une chaîne eulérienne, mais pas de cycle eulérien.

Solution de l'exercice 7 : Les graphes G_1 et G_2 représentent tous deux le même graphe, qui est un graphe cyclique d'ordre 6. Les graphes G_3 et G_4 représentent tous deux le même graphe, un pentagone ou l'un des sommets est relié à tous les autres, les autres sommets étant seulement reliés à leurs deux voisins.

Solution de l'exercice 8 : Ces trois situations correspondent toutes au graphe de l'octaèdre (voir figure 1.10).

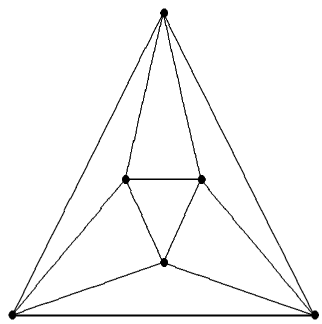


Figure 1.10: Le graphe de l'octaèdre

Solution de l'exercice 9 : Les graphes complets sont représentés ci-dessous. Puisque le graphe

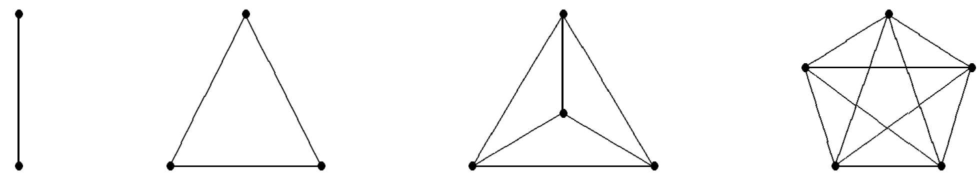


Figure 1.11: Les graphes complets

K_n possède toutes les arêtes possibles, il a autant d'arêtes que de façons de choisir 2 éléments parmi n, soit $\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Solution de l'exercice 10 : Un peu de réflexion montre que, si un graphe a tous ses sommets de degré 2, alors, en partant d'un sommet, on y revient de façon uniquement déterminée, après avoir parcouru un polygone. On pourrait croire que cela détermine complètement le graphe dès que l'on connait son ordre, mais ce n'est pas le cas. En effet, il n'est pas précisé que le graphe est connexe ; un graphe d'ordre 6 peut donc être formé d'un hexagone, ou de deux triangles.

Cependant, dans un graphe simple où tout sommet est de degré 2, toute composante connexe a au moins 3 éléments (le sommet considéré, et les deux sommets distincts qui lui sont adjacents). Donc, pour les ordres 3, 4, 5, il ne peut y avoir qu'une composante connexe, et le graphe est déterminé de façon unique. A partir de l'ordre 6, il y a autant de graphes que de façon d'écrire l'ordre comme somme d'entiers supérieurs ou égaux à 3.

Solution de l'exercice 11 : Corrigé dans le texte.

Solution de l'exercice 12 : La situation est impossible, si du moins on suppose que l'amitié est réciproque. En effet, en traçant le graphe des amis, on voit que l'hypothèse implique qu'il y a 11 sommets impairs, ce qui ne peut arriver.

Solution de l'exercice 13 : Considérons un graphe d'ordre n, dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. Supposons le graphe non connexe. Alors, il existe deux sommets a et b distincts, tels qu'aucune chaîne ne les relie. En particulier, ils ne sont pas adjacents. Il y a au moins $\frac{n-1}{2}$ sommets adjacents à a, et $\frac{n-1}{2}$ sommets adjacents à b. Ces sommets doivent être tous distincts, sinon il y aurait une chaîne de longueur 2 joignant a à b, et ils sont distincts de a et b. Mais alors il y a $2 + 2 \times \frac{n-1}{2} = n + 1$ sommets distincts, ce qui est impossible. On raisonne de même avec un graphe d'ordre $2p$ dont tout sommet est de degré au moins égal à p.

Solution de l'exercice 14 : Construisons le graphe dont les sommets sont les pays, et où deux sommets sont reliés par une arête s'ils ont une frontière commune (c'est le graphe dual du graphe dessiné).

On vérifie immédiatement que ce graphe possède exactement 2 sommets de degré impair : il possède donc une chaîne eulérienne, mais pas de cycle eulérien.

Solution de l'exercice 15 :

Un cube possède 12 arêtes ; donc, les arêtes d'un cube de 10 cm font au total 120 cm. L'exercice nous demande donc de trouver une chaîne eulérienne sur le graphe du cube. Mais celui-ci possède 8 sommets d'ordre 3 : c'est donc impossible. Pour savoir en combien de morceaux il faut couper,

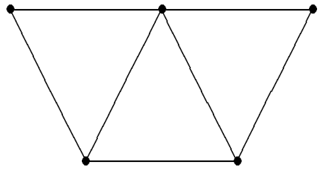


Figure 1.12: Le graphe des 5 pays

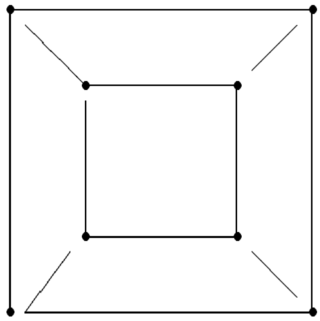


Figure 1.13: Un recouvrement par 4 chaînes du graphe du cube

il faut chercher avec combien de chaînes distinctes on peut recouvrir le graphe du cube. Or chaque sommet doit être l'extrémité d'au moins une chaîne, sinon il serait de degré pair. Comme il y a 8 sommets, et que chaque chaîne a deux extrémités, il faut au moins 4 chaînes pour recouvrir le cube. La figure ci-dessus montre un tel recouvrement par 4 chaînes.

Chapitre 2

Graphes et matrices : problèmes de comptage de chaînes

Dans ce chapitre, on va voir que l'algèbre linéaire et les matrices, telles qu'on les a vues en première ES, jouent un rôle fondamental dans bien des problèmes de comptage en théorie des graphes.

Rappelons que le calcul matriciel est au programme de l'année précédente, et que les élèves savent calculer un produit de matrices en utilisant une machine. Il n'est donc pas question, hors des exemples triviaux comme la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de calculer à la main des carrés ou des cubes de matrices. Il est par contre possible de traiter un ou deux exemples d'une taille raisonnable (une dizaine de sommets) à la machine, et c'est une bonne occasion pour les élèves d'utiliser leurs connaissances.

2.1 Quelques problèmes

Exercice 18 *Sébastien se rend régulièrement en train de la ville U à la ville V, dans un réseau donné par le graphe ci-dessous. Il fait toujours le trajet en 5 étapes, et veut faire à chaque fois un chemin différent. Combien de trajets pourra-t-il faire?*

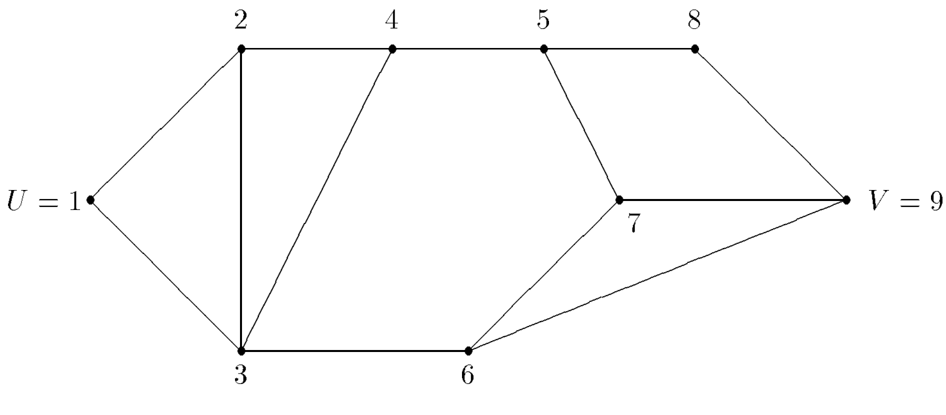


Figure 2.1: Un réseau ferroviaire

Si l'on essaie une énumération complète de tous les chemins de longueur 5 de U à V, on se rend vite compte qu'il est difficile de ne pas en oublier. Il faut trouver un moyen systématique de faire l'énumération.

La solution, comme souvent, vient en cherchant un problème plus facile : chercher le nombre de chemins de longueur 1, puis 2, puis 3...Mais en échange de cette simplification, on va compliquer un peu : on va chercher les chemins joignant 2 villes I et J quelconques, et plus seulement U et V.

Les chemins de longueur 1 qui joignent I à J se voient sur le graphe : ce sont les arêtes qui joignent I à J. On notera $a_{i,j}$ le nombre de ces chemins de longueur 1 : il vaut 0 si I n'est pas relié à J par une arête, 1 s'il y a une arête qui joint I à J.

Comment compter les chemins de longueur 2 joignant I à J? Un tel chemin est forcément formé d'un chemin de longueur 1 allant de I à une certaine ville K, puis d'un chemin de longueur 1 de la même ville K à J ; il faut bien sûr envisager toutes les possibilités pour K. Si $b_{i,j}$ désigne le nombre de chemins de longueur 2, on a donc :

$$b_{i,j} = \sum_k a_{i,k} a_{k,j}$$

la somme étant prise sur tous les sommets du graphe.

On reconnaît la formule usuelle du produit de matrices ! Si l'on numérote les villes de 1 à n, on peut regrouper les nombres $a_{i,j}$ définis ci-dessus en une matrice $A = (a_{i,j})$. Si l'on note $B = (b_{i,j})$ la matrice des chemins de longueur 2, on vient de voir que $B = A^2$, le produit étant le produit matriciel usuel.

De même, si l'on note $c_{i,j}$ le nombre de chemins de longueur 3 de I à J, on voit que, puisqu'un tel chemin se décompose en un chemin de longueur 1 de I à K, suivi d'un chemin de longeur 2 de K à I, on a :

$$c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$$

d'où l'on déduit que la matrice $C = (c_{i,j})$ vérifie $C = A.B = A^3$.

Il est alors immédiat de généraliser : le nombre de chemins de longueur n qui joignent U à V est le terme d'indice u, v de la matrice A^n, où u et v désignent les numéros des sommets U et V.

Dans le cas qui nous intéresse, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc, en faisant tourner une calculatrice :

$$A^5 = \begin{pmatrix} 20 & 34 & 42 & 23 & 20 & 16 & 13 & 5 & 15 \\ 34 & 38 & 47 & 43 & 17 & 26 & 23 & 14 & 15 \\ 42 & 47 & 46 & 53 & 24 & 44 & 28 & 21 & 19 \\ 23 & 43 & 53 & 26 & 36 & 25 & 17 & 6 & 29 \\ 20 & 17 & 24 & 36 & 8 & 29 & 39 & 30 & 14 \\ 16 & 26 & 44 & 25 & 29 & 26 & 34 & 18 & 34 \\ 13 & 23 & 28 & 17 & 39 & 34 & 22 & 12 & 39 \\ 5 & 14 & 21 & 6 & 30 & 18 & 12 & 4 & 30 \\ 15 & 15 & 19 & 29 & 14 & 34 & 39 & 30 & 20 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chemins cherché est donc 15.

Remarque : Pour suivre l'énoncé de l'exercice, on a parlé ici de chemin ; c'est la même chose que les chaînes du chapitre précédent, et on va revenir à cette terminologie dans la suite.

2.2 Récapitulation : les définitions et résultats

Définition 13 *Soit G un graphe qui possède n sommets numérotés de 1 à n. On appelle* matrice d'adjacence *du graphe la matrice $A = (a_{i,j})$, où $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes joignant le sommet de numéro i au sommet de numéro j.*

Une remarque essentielle est que la matrice d'adjacence décrit complètement le graphe : si l'on se donne uniquement la matrice, on peut reconstituer complètement le graphe. En fait, la matrice d'adjacence est le moyen le plus simple de coder un graphe d'une façon utilisable pour un ordinateur.

Le théorème principal du chapitre est le suivant :

Théorème 7 *Soit G un graphe de matrice d'adjacence A. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice A^n.*

Remarque : Pour un graphe non orienté, la matrice d'adjacence et ses puissances sont toujours des matrices symétriques (chaque chaîne joignant i à j peut se retourner en une chaîne joignant j à i) ; on peut le vérifier sur l'exemple ci-dessus (c'est d'ailleurs une bonne façon de chercher les erreurs de recopiage dans un tel problème). On peut définir les mêmes notions pour un graphe orienté ; dans ce cas, $a_{i,j}$ compte le nombre d'arêtes orientées d'origine i et d'extrémité j, et les puissance compteront le nombre de chaînes orientées. Il n'y a alors pas de raison que ces matrices soient symétriques.

Remarquons aussi que si le graphe est simple (au plus une arête joignant 2 sommets, et pas de boucles) tous les coefficients de A sont 0 ou 1, et tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Il y a un certain nombre de quantités classiques sur les graphes qui se calculent facilement en termes de matrices :

Définition 14 *on appelle distance de deux sommets la longueur d'une plus courte chaîne joignant ces sommets (la distance est infinie s'il n'existe pas de chaîne joignant ces sommets ; par convention, la distance d'un sommet à lui-même est nulle).*

On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

Ces quantités se calculent facilement avec des matrices :

Proposition 5 *Soit G un graphe (non orienté) de matrice d'adjacence A. La distance entre deux sommets distincts i et j est le plus petit n tel que le terme d'indice i, j de A^n soit non nul.*

Remarque : Il est naturel de poser, par convention, $A^0 = Id$. Avec la convention prise ci-dessus, que la distance d'un sommet à lui-même est nulle, la proposition est alors aussi valable pour deux sommets confondus.

Proposition 6 *Sous les mêmes hypothèses, le diamètre du graphe G est le plus petit entier n tel que la matrice $(A + Id)^n$ ait tous ses termes strictement positifs.*

Preuve. La démonstration la plus simple utilise la formule du binôme, elle est donc probablement trop difficile à faire en cours :

$$(A + Id)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^k$$

en utilisant la convention $A^0 = Id$; cette formule montre que le terme d'indice (i, j) de $(A + Id)^n$ est non nul si et seulement si le terme d'indice (i, j) de l'une des puissances A^k, avec $k \leq n$, est non nul, c'est-à-dire s'il existe un chemin de longueur au plus n qui joint le sommet I au sommet J. C.Q.F.D.

Remarque : il ne faut pas chercher le plus petit n tel que A^n ait tous ses termes strictement positifs ; en effet, il existe des graphes non orientés de diamètre fini pour lesquels A^n n'a jamais tous ses termes strictement positifs.

Exercice : chercher un exemple (on pourra examiner le cas du graphe associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

2.3 Quelques exercices supplémentaires

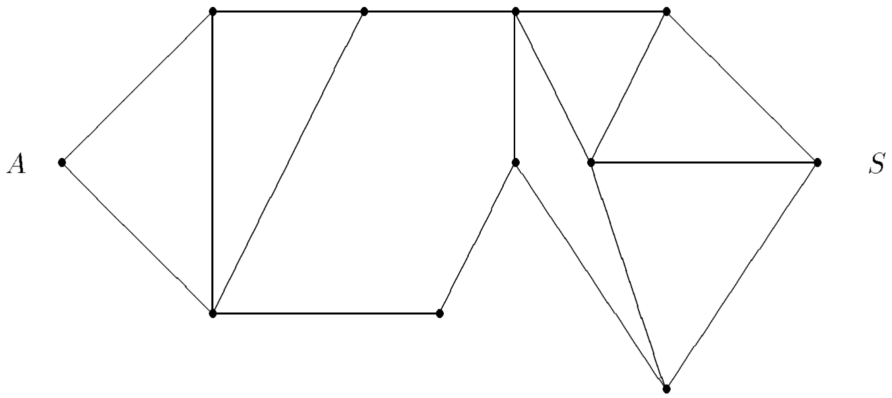
Les compétences attendues des élèves sont :

- être capable de passer d'un graphe à sa matrice d'adjacence.
- réciproquement, reconstituer un graphe à partir de sa matrice d'adjacence.
- Savoir utiliser le lien entre les puissances de la matrice et le nombre de chemins de longueur n.
- savoir en déduire des données diverses telles que la distance entre 2 sommets ou le diamètre du graphe.
- comprendre la différence entre un graphe orienté et un graphe non orienté, et ce que cela implique sur les matrices.

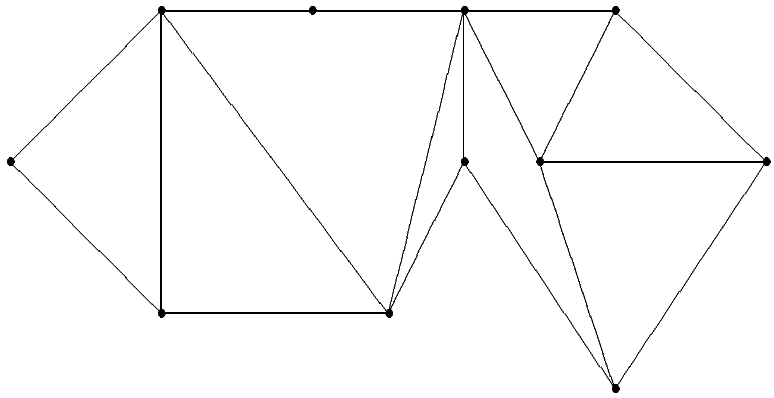
On peut, pour s'assurer que les notions sont bien comprises, donner quelques exercices simples consistant à écrire la matrice d'un graphe donné, à dessiner le graphe correspondant à une matrice donnée, ou à établir la correspondance entre une liste de graphes et une liste de matrices ; autant que possible, il faudra ensuite compléter ces exercices pour utiliser les matrices obtenues.

Les exercices suivants font travailler sur ces matrices :

Exercice 19 *Quelle est la distance entre les sommets A et S dans le graphe suivant :*

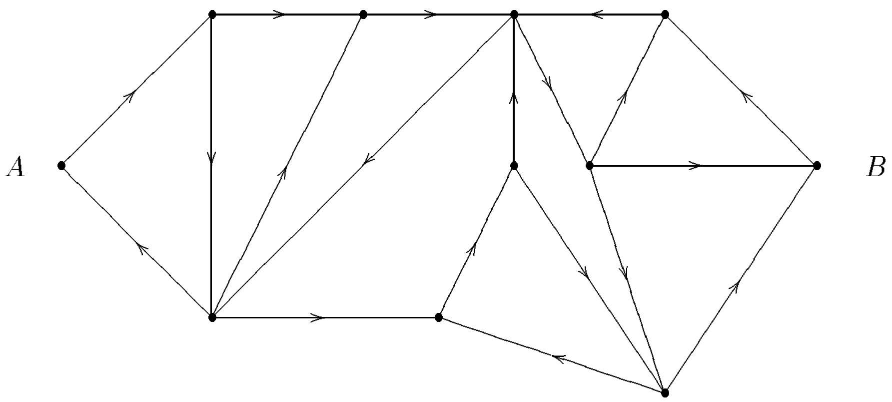


Exercice 20 *Quel est le diamètre du graphe suivant :*



Voici un exercice un peu plus complexe qui montre la différence entre chaîne orientée et chaîne non orientée dans un graphe orienté :

Exercice 21 *Le graphe suivant représente une partie d'une ville où toutes les rues sont à sens unique .*



Quel est le nombre de manières d'aller en voiture, en 5 étapes, de A à B ? quel est le nombre de manières de faire le même itinéraire à pied (on n'est donc plus obligé de respecter les sens interdits) ?

Remarque : On a vu au chapitre précédent la définition de *graphe connexe* : c'est un graphe où tout couple de sommets est joint par une chaîne. Cette notion est définie pour un graphe orienté ou non orienté, mais il existe une notion plus forte (et hors programme !) pour un graphe orienté : un tel graphe est dit *fortement connexe* si tout couple de sommets est joint par une chaîne orientée. Un plan de circulation est toujours fortement connexe : sinon, il y aurait des couples de sommets (A, B) tels que l'on ne puisse pas aller de A à B ! Par contre, un graphe qui représente les priorités dans une liste de tâches à effectuer ne peut jamais être fortement connexe : si A doit être fait avant B et B avant A, il sera difficile de finir !

2.4 Compléments pour les enseignants

Ces compléments sont bien sûr hors programme, et ne sont pas à faire en cours. Ils peuvent par contre donner des idées utilisables pour les TPE.

2.4.1 Quelques applications des problèmes de comptage

Le problème par lequel nous avons commencé peut sembler restreint. Il intervient en fait dans divers contextes :

- C'est un problème courant de chercher le nombre de mots de n lettres satisfaisant certaines contraintes : on en verra des exemples dans le chapitre 5. On est alors immédiatement amené à compter des chemins dans un graphe.
- Une variation assez simple nous conduira, dans le chapitre 6, à remplacer le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice par la probabilité de passer de I à J, au lieu de 0 ou 1.
- De nombreux problèmes de sociologie font appel à la distance entre 2 personnes dans un graphe de connaissance, et au diamètre de ce graphe. Il est rare de pouvoir disposer de données sûres portant sur beaucoup de personnes ; signalons le graphe dit "du nombre d'Erdős", dont les sommets sont les mathématiciens, et où une arête relie 2 personnes si elles ont écrit un article en commun. On peut voir de nombreuses propriétés de ce graphe sur le site http://www.oakland.edu/ grossman/erdoshp.html ; ce graphe a 337 000 sommets ; il contient un sous-graphe connexe à 208 000 sommets, l'un des sommets étant le mathématicien Erdős. le nombre d'Erdős d'un mathématicien est sa distance à Erdős dans ce graphe ; si elle est finie, elle est au maximum de 15, et dans la plupart des cas, elle est plus petite que 8.

Il est souvent intéressant de connaître une estimation du nombre de chemins de longueur n, quand n croît. Cela revient à calculer la puissance n-ième d'une matrice. Le plus simple est, quand cela est possible, de mettre, par changement de variables, la matrice sous forme diagonale ; c'est-à-dire, de trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. On a alors $A^n = PD^nP^{-1}$, et on voit que le terme général de A^n croît essentiellement comme λ^n, où λ est le plus grand coefficient de D (c'est-à-dire la plus grande valeur propre de A). Il existe des cas où la croissance est polynomiale, mais ceci n'est possible que pour des graphes orientés très dégénérés, avec un petit nombre d'arêtes.

2.4.2 D'autres matrices en théorie des graphes

Donnons brièvement quelques idées non formalisées, qui montrent comment des techniques classiques d'algèbre linéaire s'appliquent en théorie des graphes (par exemple pour le calcul des circuits électriques) ; on trouvera des explications plus complètes dans le livre de Aimé Sache [10] cité en référence (maheureusement épuisé, mais on peut le trouver en bibliothèque).

On peut définir une autre matrice associée à un graphe orienté : la *matrice d'incidence* . Il s'agit d'une matrice M à coefficients 0, 1 ou -1, indicée par l'ensemble $S \times A$ produit des sommets par les arêtes, où $m_{i,j}$ vaut 1 si le sommet i est l'extrémité de l'arête j, -1 si i est l'origine de j, et 0 sinon. On voit en particulier que, puisque chaque colonne correspond à une arête, il doit y avoir exactement un 1 et un -1 sur chaque colonne.

Cette matrice est très utile pour tous les problèmes de transports ; en effet, considérons un vecteur $V = (V_a)$, indicé par les arêtes. Un tel vecteur définit un poids pour chaque arête (ce poids peut être un courant électrique si le graphe représente un circuit électrique, ou un débit de véhicules s'il s'agit d'un réseau routier ; en général, on parlera de flux à travers l'arête a). Fixons un sommet S, et considérons l'ensemble A_s^+ des arêtes qui arrivent en S, et l'ensemble A_s^- des arêtes qui partent de S. Le nombre $\sum_{a \in A_s^+} V_a$ peut être considéré comme le flux arrivant en S, et $\sum_{a \in A_s^-} V_a$ comme le flux sortant de S (s'il s'agit d'un trafic de véhicules, les nombres V_a sont tous positifs, et cela correspond à l'intuition ; pour un circuit électrique, les V_a peuvent être négatifs, si le courant circule en sens inverse de l'orientation de l'arête). En régime stationnaire, il ne peut y avoir d'accumulation en un sommet, et l'on a :

$$W_s = \sum_{a \in A_s^+} V_a - \sum_{a \in A_s^-} V_a = 0$$

C'est ce que l'on appelle en électricité la loi de Kirchoff.

Le vecteur $W = (W_s)$ est un vecteur indicé par les sommets ; ce vecteur se calcule facilement : on voit que l'on a $W = M.V$. La loi de Kirchoff s'exprime alors très simplement par $M.V = 0$; autrement dit, le noyau de M est l'ensemble des flux stationnaires possibles.

La dimension du noyau de M est un nombre important, appelé *nombre cyclomatique* du graphe ; il donne le nombre de "boucles indépendantes" que l'on peut trouver dans le graphe. En particulier, un arbre est de nombre cyclomatique 0, et un graphe circulaire, constitué par un polygone, est de nombre cyclomatique 1.

La transposée de M est aussi utile, pour l'analyse des tensions : par exemple, supposons que le graphe représente un réseau routier, et associons à chaque arête son dénivelé (algébrique : positif si l'arête monte, négatif sinon ; c'est pourquoi il faut que l'arête soit orientée). Soit U le vecteur obtenu, et H le vecteur donné par les altitudes de chaque sommet : il est facile de voir que l'on a :

$$U = M^t H$$

ce qui veut juste dire que le dénivelé de chaque arête est la différence entre l'altitude de son extrémité et celle de son origine.

Une conséquence simple de cette remarque est que, si U est un tel vecteur, et si V représente un flot stationnaire tel qu'on l'a vu dans le paragraphe précédent, le produit scalaire $U.V$ doit être nul : en effet, on a $U = M^t H$, donc $U^t = H^t M$; mais le produit scalaire de U et V s'écrit en termes de matrices $U^t V = H^t M V = 0$.

On peut ainsi résoudre, par des considérations d'algèbre linéaire simple, un grand nombre de problèmes de tensions et de transports sur les graphes.

Ces exemples permettent d'illustrer de nombreuses propriétés d'algèbre linéaire. En particulier, les questions de dualité jouent un rôle important, et il y a une dualité naturelle entre les flots et les tensions.

Dans le cas particulier des graphes planaires, vu au chapitre précédent, on a une interprétation naturelle de l'espace des cycles, noyau de la matrice M. Toute face est en effet entourée par un cycle, qui est un élément du noyau (il correspond à un flot qui ferait le tour de la face, et on peut montrer que les faces bornées forment une base de l'espace des cycles. Ces notions, qui forment le début de la topologie algébrique, admettent des développements considérables.

Exemple 6 : Considérons le circuit très simple suivant :

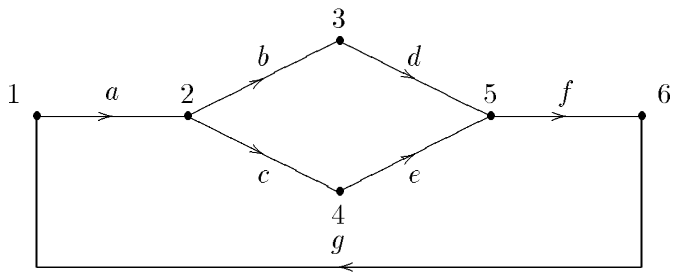


Figure 2.2: un réseau électrique

La matrice d'adjacence M est donnée, en numérotant les arêtes dans l'ordre alphabétique, par :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit que l'ensemble des régimes stationnaires est décrit par le vecteur :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \\ y \\ x-y \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est clairement un espace vectoriel de dimension 2 ; une base en est donnée par les deux vecteurs que nous écrirons "horizontalement" $e_1 = (1,0,1,0,1,1,1)$ et $e_2 = (0,1,-1,1,-1,0,0)$ qui décrivent deux "cycles indépendants" :

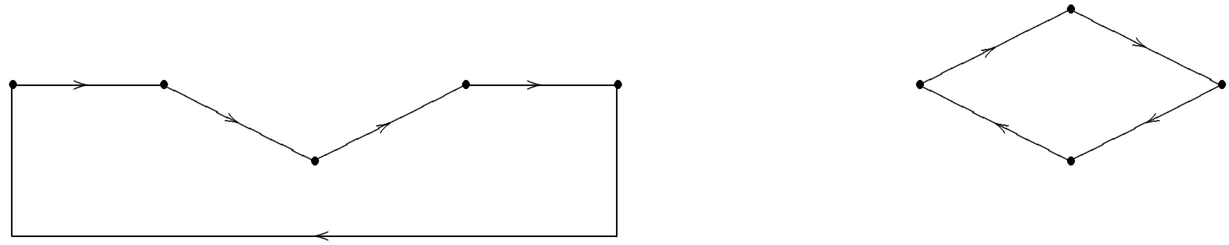


Figure 2.3: deux cycles indépendants

Remarque : La définition que nous avons donnée de la matrice d'adjacence M suppose le graphe orienté, car on a besoin de connaître l'origine et l'extrémité de chaque arête pour la définir. Il est cependant possible de généraliser certaines constructions à un graphe non orienté, en prenant les coefficients, non plus dans $\mathbb{Z}$, mais dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il n'y a plus alors de différence entre -1 et 1.

2.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 19 : On écrit la matrice d'adjacence du graphe, et on calcule ses puissances à la machine :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 10 & 13 & 7 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 17 & 17 & 11 & 8 & 3 & 10 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 10 & 17 & 24 & 12 & 5 & 8 & 10 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 13 & 11 & 12 & 19 & 8 & 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 9 & 1 & 9 & 4 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 10 & 1 & 17 & 6 & 12 & 19 & 5 & 11 \\ 3 & 10 & 10 & 5 & 9 & 6 & 29 & 15 & 16 & 20 & 19 \\ 2 & 2 & 3 & 9 & 4 & 12 & 15 & 21 & 22 & 17 & 15 \\ 2 & 2 & 4 & 11 & 3 & 19 & 16 & 22 & 31 & 15 & 21 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 20 & 17 & 15 & 20 & 14 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 11 & 19 & 15 & 21 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 20 & 34 & 41 & 23 & 13 & 11 & 20 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 34 & 38 & 46 & 44 & 20 & 21 & 18 & 14 & 17 & 7 & 7 \\ 41 & 46 & 44 & 51 & 32 & 17 & 27 & 17 & 18 & 15 & 9 \\ 23 & 44 & 51 & 28 & 22 & 17 & 49 & 20 & 22 & 25 & 24 \\ 13 & 20 & 32 & 22 & 6 & 25 & 16 & 15 & 23 & 7 & 14 \\ 11 & 21 & 17 & 17 & 25 & 12 & 58 & 36 & 34 & 47 & 36 \\ 20 & 18 & 27 & 49 & 16 & 58 & 42 & 64 & 83 & 41 & 51 \\ 5 & 14 & 17 & 20 & 15 & 36 & 64 & 52 & 68 & 49 & 60 \\ 6 & 17 & 18 & 22 & 23 & 34 & 83 & 68 & 74 & 71 & 68 \\ 5 & 7 & 15 & 25 & 7 & 47 & 41 & 49 & 71 & 34 & 52 \\ 5 & 7 & 9 & 24 & 14 & 36 & 51 & 60 & 68 & 52 & 50 \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre que la distance de A à S est de 5. On apprend en prime qu'il y a 5 chaînes différentes qui vont de A à S.

On peut en fait voir directement et facilement qu'il existe une (et même plusieurs) chaîne de longueur 5 de A à S. On pourrait vérifier qu'il n'y en a pas de plus courte grâce à l'algorithme de recherche de plus courte chaîne du chapitre 4.

Solution de l'exercice 20 : Cet exercice se résout de la même manière que le précédent : on calcule la matrice, on vérifie que la puissance quatrième de cette matrice a un terme nul, qui est aussi nul dans toutes les puissances précédentes (il correspond aux chaînes qui joignent le sommet le plus à gauche au sommet le plus à droite), et que la puissance cinquième a tous ses termes strictement positifs.

Le diamètre du graphe est donc 5.

Solution de l'exercice 21 : On commence par calculer la matrice M associée au graphe orienté, puis la puissance cinquième de cette matrice, et l'on vérifie qu'il y a exactement une façon d'aller de A à B en cinq étapes.

On calcule ensuite la matrice N associée au graphe non orienté. Un manière simple de le faire est de remarquer que, comme il n'y a pas d'arêtes à double sens, N est somme de M et de sa transposée, ce qui simplifie l'écriture. On vérifie, en calculant la puissance cinquième de N, qu'il y a 13 façons d'aller à pied de A à B en 5 étapes.

Chapitre 3

Problèmes de coloriage

3.1 Quelques problèmes

Regardons quelques situations plus ou moins courantes :

Exercice 22 *Un groupe de 8 personnes doit participer à deux réunions. A la première réunion, ils sont tous assis autour d'une table ronde. Comme l'entente est totale, pour la seconde réunion, chacun des participants, non seulement ne veut pas se retrouver à côté de l'un ou l'autre de ses voisins, mais ne veut pas non plus qu'ils soient assis à la même table.*

a) Combien de tables au minimum seront alors nécessaires ? Combien de personnes au maximum pourront s'asseoir à une même table ?

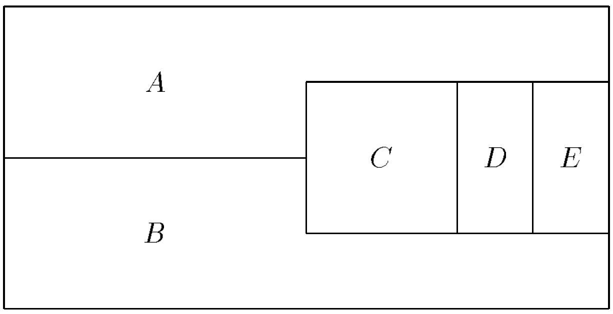
b) On suppose maintenant qu'il y a 9 participants et que l'entente est tout aussi cordiale. Que se passera-t-il alors ?

Exercice 23 *Pendant un festival, on veut organiser des tournois de scrable (S), échecs (E), go (G), dames (D), tarot (T) et master-mind (M). Plusieurs personnes se sont inscrites à la fois pour les tournois E, S, G, d'autres personnes pour les tournois G, D, M, et enfin d'autres personnes pour les tournois M, T, S. Il est entendu qu'une participation simultanée à plusieurs tournois est impossible et que les organisateurs veulent satisfaire tout le monde.*

a) Quel est le nombre maximum de tournois qui pourraient se dérouler en même temps ?

b) En sachant que chaque tournoi doit durer au maximum 3 heures, proposer un horaire des tournois nécessitant une durée minimale et respectant bien sûr les choix des participants.

Exercice 24 *Voici la carte du pays d'Ovalie avec ses 5 régions A, B, C, D et E.*



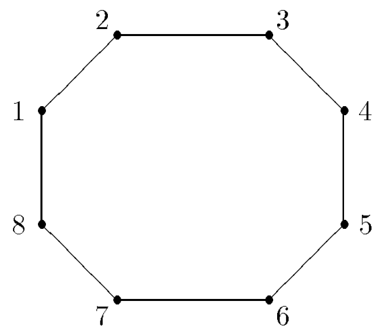
On veut colorier cette carte de telle manière que deux régions frontalières aient des couleurs différentes. Combien de couleurs au minimum faudra-t-il prévoir ?

Exercice 25 *On se donne n points dans l'espace. Certains sont reliés par des segments, d'autres non, et chacun des points est relié au maximum à 3 autres points.*

Prouver qu'il existe au moins $\frac{n}{4}$ points tels que 2 d'entre eux ne soient pas reliés.

Esquissons maintenant des réponses à ces 4 problèmes :

Solution de l'exercice 22 : La première réunion avec 8 personnes peut être modélisée par le graphe cyclique noté C_8 ci-dessous :

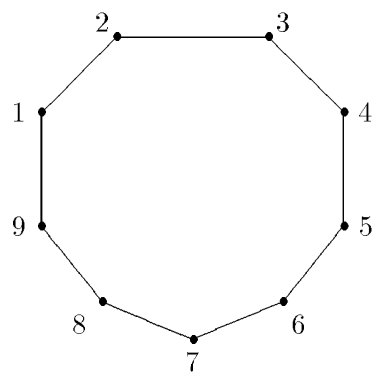


Il s'agit de réaliser une partition de l'ensemble des 8 sommets de façon que, dans chaque partie, deux sommets quelconques ne soient pas reliés ; on veut de plus que le nombre de ces parties soit minimum.

Il est clair qu'en groupant les individus 1, 3, 5 et 7 autour d'une table A et les 4 autres personnes autour d'une table B, les souhaits des participants seront exaucés, et qu'on ne peut pas faire mieux.

On traduira cette situation, en disant que le nombre chromatique de C_8 est 2 : il faut deux couleurs pour colorier le graphe de telle façon que deux sommets de même couleur ne soient pas adjacents.

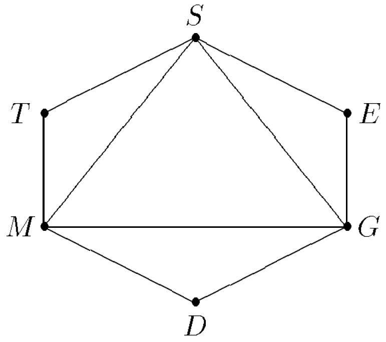
Une réunion avec 9 personnes correspond à un cycle C_9 de longueur 9 :



Si l'on veut partager les participants autour de deux tables A et B et si 1 est affecté à la table A, obligatoirement 2 sera affecté à la table B, 3 à la table A etc ...

Le participant 8 devra être affecté à la table B, alors le participant 9 ne peut pas être affecté à la table B car il retrouvera alors son cher voisin 8, ni à la table A car il retrouvera son autre voisin 1. Donc deux tables ne suffisent pas. Par contre en affectant le participant 9 à une troisième table C, on obtient un partage des participants autour de 3 tables. Cela veut dire en fait que le nombre chromatique de C_9 est 3.

Solution de l'exercice 23 : Soit H le graphe dont les sommets sont les 6 tournois et dont les arêtes sont les paires de tournois ne pouvant avoir lieu en même temps pour des raisons d'inscription multiple (graphe d'incompatibilité).



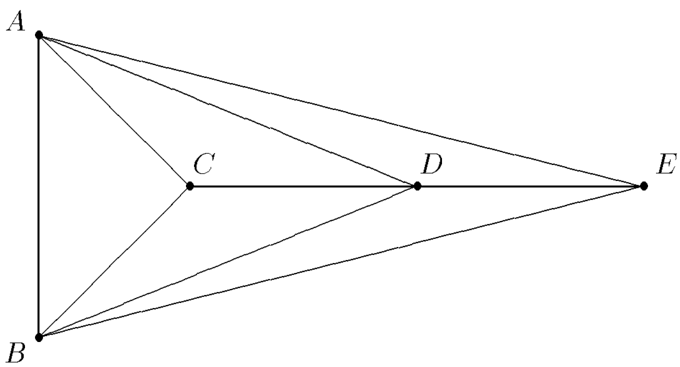
Répondre à la première question revient à déterminer un ensemble de sommets le plus grand possible et tel que deux sommets de cet ensemble ne soient pas reliés, c'est-à-dire, avec la terminologie du chapitre 1, un sous-ensemble stable de G de taille maximale. Le cardinal d'un tel ensemble sera le nombre cherché. Il est facile de se rendre compte qu'ici la réponse est 3 et que le seul sous-ensemble qui convient est $\{T, E, D\}$. Donc on peut organiser au maximum 3 tournois en parallèle et ces tournois sont : échecs, dames et tarot.

Proposer un horaire optimum, revient à déterminer le nombre chromatique $\gamma(H)$ de H et à déterminer une partition de l'ensemble $S(H)$ des sommets de H en $\gamma(H)$ parties de $S(H)$ telle que le sous-graphe engendré par chacune de ces parties ne comporte pas d'arête, c'est-à-dire en $\gamma(H)$ sous-ensembles stables. Il n'est pas difficile de voir que chercher le nombre chromatique de H, revient en fait à déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier tous les sommets de telle façon que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.

Il est clair que pour colorier les sommets du sous-graphe complet de sommets S, G et M il faut trois couleurs ce qui montre que $\gamma(H) \geq 3$. On se rend vite compte que trois couleurs suffisent, par exemple bleu pour S et D, blanc pour E et M et rouge pour G et T, et par conséquent on pourrait donc proposer l'horaire suivant :

- 9h - 12h : scrable et dames.
- 13h - 16h : échecs et master-mind.
- 16h - 19h : go et tarot.

Solution de l'exercice 24 : Appelons G le graphe dont les sommets sont les 5 régions et dont les arêtes correspondent aux frontières séparant deux régions.



C'est ce qu'on appelle un graphe planaire, c'est à dire un graphe qui peut être dessiné sans que deux arêtes quelconques ne se croisent. Un coloriage de la carte revient en fait à un coloriage du graphe G. Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier la carte est donc le nombre chromatique $\gamma(G)$ de G.

Or le sous-graphe H de sommets A, B, C et D est complet et il est évident que pour son coloriage, il faut 4 couleurs, par conséquent $\gamma(G) \geq 4$. Une fois le coloriage de H fait, en attribuant au sommet E la couleur de C, on obtient le coloriage de G avec 4 couleurs. Par conséquent, $\gamma(G) = 4$ et on peut donc colorier la carte avec 4 couleurs.

Solution de l'exercice 25 : On a affaire en fait à un graphe G dont les sommets sont les n points et dont les arêtes sont les paires de points adjacents.

Il s'agit alors de prouver que le plus grand ordre d'un sous-ensemble stable de G (c'est-à-dire d'un ensemble de sommets qui engendre un graphe n'ayant aucune arête) est supérieur ou égal à $\frac{n}{4}$.

Notons k cet ordre maximum. Il existe alors une partie A de $S(G)$ de cardinal k et telle que deux sommets quelconques de A ne soient pas adjacents. Soit B l'ensemble des sommets de $S(G)$ adjacents à un sommet de A. Il est clair que A et B sont disjoints, car sinon A contiendrait 2 sommets adjacents et ne serait pas stable. On a aussi $A \cup B = S(G)$ (sinon il existerait un sommet x dans G n'ayant aucun voisin dans A, et $A \cup \{x\}$ serait une partie stable de $S(G)$ à $k+1$ éléments, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité de k). Puisque chaque élément de A admet au plus 3 voisins dans B, on déduit que B a au plus $3k$ éléments, donc $S(G) = A \cup B$ a au plus $4k$ éléments, soit $n \leq 4k$ et $k \geq \frac{n}{4}$, ce qui prouve le résultat.

Remarque : On peut obtenir un résultat plus précis : une majoration du nombre chromatique de G, ce qui permet de donner une autre solution. Nous allons majorer ce nombre chromatique en cherchant des sous-ensembles stables disjoints aussi grands que possible.

Partons d'un sous-ensemble A de G qui est stable et de cardinal maximum. Si $A = S(G)$ (ce qui veut dire que G n'a pas d'arête), on a clairement $\gamma(G) = 1$. Sinon, soit A_1 un sous-ensemble stable de G de taille maximale disjoint de A. Si $A \cup A_1 = S(G)$, on a clairement $\gamma(G) = 2$. S'il y a inclusion stricte, soit A_2 un sous-ensemble stable de G de taille maximale contenu dans les sommets de G qui ne sont ni dans A ni dans A_1. Si $A \cup A_1 \cup A_2 = S(G)$ on a $\gamma(G) = 3$. Sinon, appelons A_3 le complémentaire de $A \cup A_1 \cup A_2$ dans $S(G)$. D'après les définitions de A, A_1 et A_2, tout sommet x de A_3 a au moins un voisin dans chacun des ensembles cités, sinon on pourrait accroitre l'un au moins des trois ensembles A, A_1, A_2, ce qui est contraire à leur définition. Alors, comme tout point est de degré au plus 3, on déduit que x n'a aucun voisin dans A_3. C'est donc un sous-ensemble stable de G, et (A, A_1, A_2, A_3) est une partition de $S(G)$ en 4 sous-ensembles stables, donc $\gamma(G)$=4.

On voit que dans tous les cas, on a : $\gamma(G) \leq 4$.

Par définition du nombre chromatique, cela veut dire qu'on peut trouver une partition de $S(G)$ en au plus 4 sous-ensembles stables (c'est d'ailleurs ce que l'on a fait au cours de la preuve). Mais alors, l'un au moins de ces 4 ensembles est de taille supérieure ou égale à $\frac{n}{4}$, sinon $S(G)$ serait de taille strictement inférieure à n. C'est exactement ce que l'on voulait prouver.

En généralisant ce raisonnement on pourrait prouver que le nombre chromatique d'un graphe G est majoré par $r+1$, où r est le plus grand des degrés des sommets, mais on prouvera cela dans la section suivante d'une manière plus rapide.

3.2 Récapitulation : les définitions et résultats

A partir des exemples précédents et de leurs discussions, on peut donner quelques définitions :

Définition 15 *Un coloriage d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle manière que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur.*

Un coloriage du graphe avec k couleurs sera appelé un k-coloriage.

Remarque : On peut se demander ce que sont ces mystérieuses "couleurs". Il s'agit simplement d'un moyen de donner un contenu intuitif à une notion utile dans des contextes très variés. D'un point de vue formel, l'ensemble des couleurs est un ensemble fini C quelconque, et un coloriage est tout simplement une application de l'ensemble $S(G)$ des sommets du graphe dans l'ensemble C, telle que deux sommets adjacents aient toujours des images distinctes.

Dans les exemples, cet ensemble fini peut être un ensemble de tranches horaires dans lesquelles on doit faire tenir diverses occupations de façon compatible, de cages de zoo dans lesquelles il ne faut pas mettre des animaux qui vont s'attaquer, de salles de classes dans lesquelles on veut organiser des options, etc.... Une grande partie de la difficulté tient ici dans le travail de modélisation, pour faire apparaître la question comme un problème de coloriage. En particulier, la contruction du graphe n'est pas toujours évidente: pour les problèmes de coloriage de carte, comme on l'a vu dans l'exercice sur la carte d'Ovalie, c'est le graphe dual du graphe représenté qu'il faut considérer. Dans les problèmes de compatibilité, ce ne sont pas les sommets compatibles qu'il faut relier sur le graphe, comme on a spontanément tendance à le faire, mais les sommets incompatibles.

Il n'est pas dans l'esprit du programme d'insister sur le côté formel ("on appelle coloriage une application de $S(G)$ dans un ensemble fini C, appelé ensemble des couleurs, telle que..."), il est par contre utile de montrer aux élèves comment ce qui pourrait, au départ, apparaître comme une pure récréation mathématique permet de répondre à des questions naturelles et difficiles.

Définition 16 *Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires à son coloriage.*

On note d'habitude $\gamma(G)$ le nombre chromatique d'un graphe G. Rappelons une définition utile du chapitre 1 :

Définition 17 *On dit qu'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est* stable *s'il ne contient pas de paires de sommets adjacents.*

Si l'on se donne un coloriage d'un graphe, l'ensemble des sommets d'une couleur donnée est, par définition, un ensemble stable. C'est donc la même chose de se donner un k-coloriage, ou une partition en k sous-ensembles stables. En particulier, le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimum de parties d'une telle partition ; nous avons utilisé cette propriété dans l'exercice 25 ci-dessus.

On ne connaît pas de formule miracle permettant de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. La plupart du temps il faut se contenter d'un encadrement, autrement dit d'un minorant et d'un majorant du nombre chromatique. On a intérêt bien sûr à ce que le minorant soit le plus grand possible et que le majorant soit le plus petit possible. Si par hasard le minorant et le majorant sont les mêmes, on a gagné puisqu'on a alors le nombre chromatique du graphe.

Quelques remarques simples permettent de minorer ce nombre chromatique. Soit H un sous-graphe d'un graphe G. Il est clair qu'un coloriage de G avec $\gamma(G)$ couleurs induit un coloriage de H avec au plus $\gamma(G)$ couleurs. Cela veut dire en fait :

Proposition 7 *Si G est un graphe, alors pour tout sous-graphe H de G on a :*

$$\gamma(H) \leq \gamma(G)$$

.

Cette proposition est très utile car elle donne un minorant du nombre chromatique de G; si en plus on peut indiquer un coloriage de G avec $\gamma(H)$ couleurs, alors on a exactement $\gamma(H) = \gamma(G)$. C'est exactement ce qu'on a fait dans les exemples 2 et 3 du paragraphe précédent, le sous-graphe H étant à chaque fois un graphe complet. La morale de cela est qu'il est utile de regarder de plus près les graphes complets. Le résultat très facile à prouver et qu'on laisse en exercice est :

Proposition 8 *Le nombre chromatique du graphe complet K_n est n.*

Dans l'exemple 1, on a vu que le nombre chromatique d'un cycle de longueur 8 est 2 et que par contre, le nombre chromatique d'un cycle de longueur 9 est 3. La généralisation, qu'on devine facilement, est :

Proposition 9 *Soit C_n le cycle de longueur n. Si n est pair on a : $\gamma(C_n) = 2$, et si n est impair on a : $\gamma(C_n) = 3$.*

Là aussi, nous laissons la démonstration en exercice.

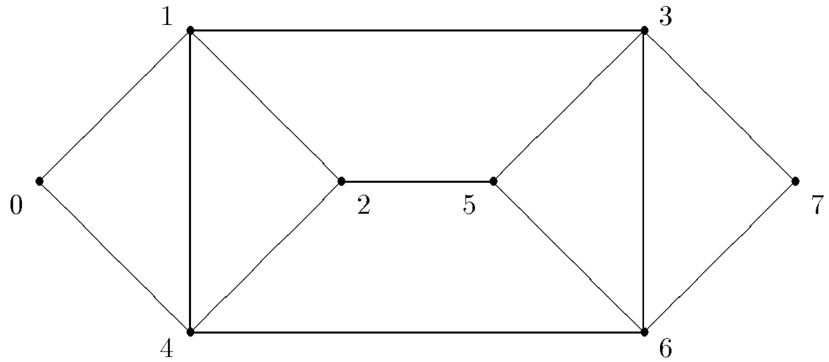
Il est plus difficile de prouver des majorations générales du nombre chromatique ; nous en avons vu une dans l'exercice 25, et nous en donnons d'autres dans les compléments ci-dessous ; certaines peuvent être faites en exercice, mais elles ne font pas partie des notions exigibles. Par contre, il est clair que, si l'on dispose d'un coloriage, on a une majoration du nombre chromatique, ce qui montre l'utilité d'avoir une stratégie pour colorier un graphe, stratégie qu'on appellera algorithme de coloriage. Nous allons décrire ici *l'algorithme de coloriage de Welch et Powell* :

- On classe d'abord les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient ainsi une liste $x_1, \ldots, x_n$ de sommets telle que $deg(x_1) \geq \ldots \geq deg(x_n)$.
- A la première étape on choisit une couleur c_1 pour le sommet x_1, et en parcourant la liste, le premier sommet non colorié et non adjacent à un sommet déjà colorié avec c_1 (couleur d'usage) se verra attribuer la couleur c_1.
- On reprend la démarche en attribuant à chaque fois une nouvelle couleur d'usage au premier sommet de la liste non encore colorié. On s'arrête dès que tous les sommets ont été coloriés.

Remarque : C'est un bon algorithme, mais précisons quand même que le nombre de couleurs utilisé par cet algorithme n'est pas forcément le nombre chromatique du graphe. L'exemple qui suit illustre cela. De plus, on remarquera qu'une partie de l'algorithme n'est pas entièrement déterminée : en effet, s'il y a plusieurs sommets de même degré, l'ordre dans lequel on les range est arbitraire, donc deux personnes appliquant cet algorithme au même graphe n'obtiendront pas forcément le même coloriage.

Exemple 7 : Considérons le graphe G dessiné ci-dessous. Ce graphe n'est pas un graphe quelconque, c'est un graphe de de Bruijn non orienté. Plus précisement c'est le graphe de de Bruijn

$UB(2,3)$. Ses sommets sont les éléments de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, et i et j sont adjacents si $i-2j$ ou $j-2i$ sont dans $\{0,1\}$.



Appliquons l'algorithme décrit ci-dessus : 1, 3, 6, 4, 2, 5, 0, 7 est une liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés. D'après l'algorithme, à la première étape on attribue une couleur c_1 aux sommets 1 et 6. A la deuxième étape, on attribue une couleur c_2 aux sommets 3 et 4. A la troisième étape, on attribue une couleur c_3 aux sommets 2, 0 et 7. Enfin à la dernière étape on attribue une couleur c_4 au sommet 5. On obtient un coloriage de G avec 4 couleurs, mais en fait le nombre chromatique de G est 3. En effet deux couleurs ne suffisent pas car G admet des triangles comme sous-graphes, par contre, en prenant du bleu pour les sommets 0, 2 et 3, du rouge pour les sommets 4, 5 et 7 et du jaune pour les sommets 1 et 6, on obtient un 3-coloriage et donc on a bien $\gamma(G)=3$. La morale de tout cela est que pour un petit nombre de sommets, il faut chercher directement le nombre chromatique plutôt que d'utiliser tel ou tel algorithme.

Remarque : On a déjà vu un graphe de de Bruijn au premier chapitre, et on peut se demander quel est le rapport avec celui-ci. On comprend mieux se qui se passe si l'on écrit les noms des sommets en base 2. Puisqu'on est dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que les noms des sommets sont entre 0 et 7, tout nom de sommet peut s'écrire avec 3 chiffres en base 2. Posons $i=i_1i_2i_3$, $j=j_1j_2j_3$. Dire que $2i-j$, dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, est dans $\{0,1\}$, c'est dire que $i_2i_3=j_1j_2$; on retrouve bien la notion du chapitre 1, sauf que l'on n'oriente pas les arêtes et que l'on supprime les boucles. Par exemple, 3 s'écrit 011 en binaire; il est donc relié aux deux sommets dont le nom commence par 11, soit $6=110$ et $7=111$, et aux deux sommets dont le nom finit par 01, soit $1=001$ et $5=101$.

Le nom $UB(2,3)$ veut dire: graphe de de Bruijn non orienté des mots de longueur 3 sur un alphabet à 2 lettres ; on définirait de même le graphe $UB(d,n)$ des mots de longueur n sur un alphabet à d lettres. On verra ci-dessous dans les exercices le graphe $UB(2,4)$. La complexité de ces graphes augmente très vite avec d et n !

3.3 Quelques exercices supplémentaires

Voici quelques petits exercices plus ou moins scolaires, c'est-à-dire moins ou plus difficiles.

Exercice 26 *Pour $n \geq 3$, on considère un échiquier $n \times n$, et le graphe G_n défini comme suit :*

- *Les sommets de G_n sont les n^2 cases de l'échiquier.*
- *Une case a est reliée à une case b, si un cavalier placé dans une de ces cases, contrôle l'autre case.*

a) Dessiner le graphe G_4

b) Pour n *quelconque, quel est le nombre chromatique de* G_n *?*

Exercice 27 *On désire implanter 7 stations radio dans 7 endroits dont les distances mutuelles (en Km) sont données ci-dessous. En sachant que deux stations interférent si elles se trouvent à moins de 100 km l'une de l'autre, quel est alors le nombre minimum de longueurs d'onde qu'il faut prévoir pour éviter toute interférence ?*

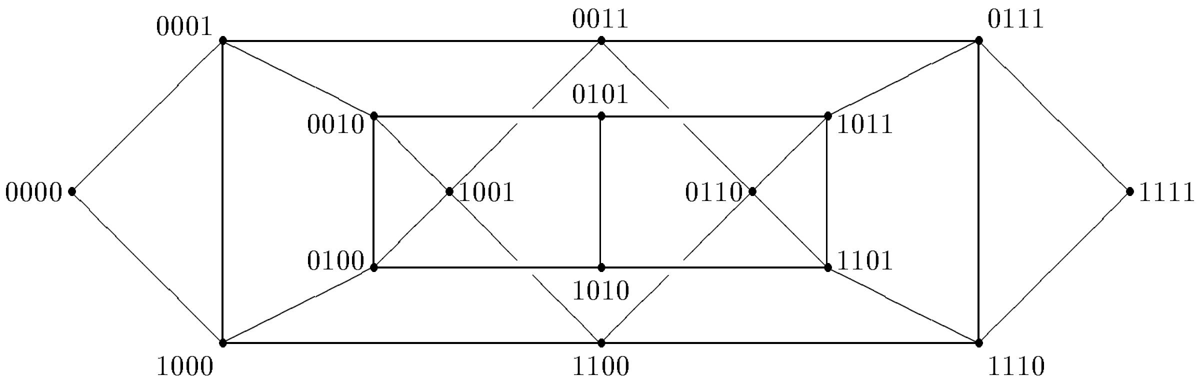
	B	C	D	E	F	G
A	55	110	108	60	150	88
B		87	142	133	98	139
C			77	91	85	93
D				75	114	82
E					107	41
F						123

Exercice 28 *On considère le graphe simple dont les sommets sont les entiers naturels compris au sens large entre 1 et 20, et tel que deux sommets* i *et* j *sont reliés si et seulement si* $i + j \leq 21$.

a) Prouver que ce graphe est connexe. Déterminer son diamètre.

b) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe.

Exercice 29 *Les sommets de ce graphe sont les mots de longueur 4 écrits avec les lettres 0 et 1. Deux mots distincts sont reliés par une arête si les trois dernières lettres de l'un sont les trois premières de l'autre (par exemple,* 0011 *et* 0110 *sont reliés). C'est ce qu'on appelle le graphe de De Brujin non orienté UB(2, 4).*



a) Quel est le diamètre de ce graphe ? Déterminer le nombre de ses arêtes.

b) Déterminer son nombre chromatique.

Exercice 30 *a) Prouver que dans un graphe* G*, il existe au moins* $\gamma(G)$ *sommets de degré supérieur ou égal à* $\gamma(G) - 1$.

b) Prouver que pour un graphe G *d'ordre* n*, on a* $\gamma(G) = n$ *si et seulement si* G *est le graphe complet d'ordre* n.

3.4 Compléments pour les enseignants

3.4.1 Nombre de stabilité

Définition 18 *On appelle* nombre de stabilité *d'un graphe G le cardinal maximal d'un sous-ensemble stable de G. On le note $\alpha(G)$.*

Proposition 10 *Si G est un graphe d'ordre s, on a :*

$$\gamma(G)\alpha(G) \geq s \qquad \gamma(G) + \alpha(G) \leq s + 1$$

Démonstration : Pour la première inégalité, considérons une partition de G en ensembles stables qui réalise le nombre chromatique. On a donc une partition de G en $\gamma(G)$ sous-ensembles, qui sont tous, par définition de $\alpha(G)$, de cardinal au plus $\alpha(G)$; donc le cardinal de la réunion de ces ensembles est majoré par $\gamma(G)\alpha(G)$, d'où l'inégalité $\gamma(G)\alpha(G) \geq s$.

Pour la seconde inégalité, soit A un sous-ensemble stable de taille maximale. Soit H le graphe engendré par le complémentaire de A (H est le sous-graphe de G dont les sommets sont les sommets de G qui ne sont pas dans A, et dont les arêtes sont les arêtes de G dont aucune extrémité n'est dans A). On voit facilement que $\gamma(G) \leq \gamma(H) + 1$: à toute coloration de H, on peut associer une coloration de G avec exactement une couleur de plus en colorant tous les sommets de A avec la nouvelle couleur. De plus, il est clair que $\gamma(H)$ est majoré par le nombre $s - \alpha(G)$ de sommets de H. On a donc montré $\gamma(G) - 1 \leq \gamma(H) \leq s - \alpha(G)$, d'où l'inégalité cherchée. ■

Ceci peut permettre des majorations de G en trouvant des sous-ensembles stables de taille maximale. On remarquera que, dès que le graphe n'est pas de petite taille, il n'est pas du tout évident de trouver un ensemble stable de taille maximale ; en particulier, ce n'est pas parce qu'un ensemble stable est maximal qu'il est de taille maximale ! La stratégie élémentaire qui consiste à essayer d'augmenter un ensemble stable ne suffit donc pas à déterminer le nombre de stabilité.

3.4.2 Majorations du nombre chromatique

Il est clair que, si on arrive à construire un coloriage d'un graphe G avec un nombre m de couleurs, on a $\gamma(G) \leq m$. En particulier, le nombre chromatique d'un graphe G est inférieur ou égal au nombre de sommets de G, en donnant à chaque sommet une couleur différente, mais c'est là une majoration triviale. Une majoration plus fine est donnée par :

Proposition 11 *Considérons un graphe G et soit r le plus grand des degrés des sommets. Alors : $\gamma(G) \leq r + 1$*

Démonstration : Soit n l'ordre de G. Il existe des parties de $S(G)$ qu'on peut colorier avec au plus $r + 1$ couleurs (il suffit de prendre une partie à un élément). Soit alors A une telle partie de cardinal maximum. Supposons que A soit strictement inclus dans $S(G)$. Il existerait alors un sommet x de G n'appartenant pas à A. Or x a au plus r voisins dans A, par conséquent parmi les $r + 1$ couleurs utilisées pour le coloriage de A, il existe au moins une couleur non utilisée pour les voisins de x dans A. En attribuant cette couleur à x, on obtient un coloriage de $A \cup \{x\}$ avec toujours au plus $r+1$ couleurs, et comme le cardinal de $A \cup \{x\}$ est strictement plus grand que celui de A, on obtient une contradiction avec la définition de A. Par conséquent on a $A = S(G)$, ce qui veut dire qu'on peut colorier les sommets de G avec au plus $r + 1$ couleurs, et donc $\gamma(G) \leq r + 1$.

■

Définition 19 *On appelle graphe complémentaire du graphe G le graphe dont les sommets sont ceux de G et dans lequel deux sommets sont adjacents si et seulement si ils ne sont pas adjacents dans G. On le note $\overline{G}$.*

Théorème 8 *Pour un graphe G d'ordre s, on a : $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq s$.*

Voici maintenant un résultat un peu plus fort que la proposition 3.4.2 :

Théorème 9 *(Brooks, 1941). Soit G un graphe connexe de degré maximum r qui ne soit ni complet ni un cycle de longueur impaire. Alors $\gamma(G) \leq r$.*

Le lecteur intéressé trouvera les preuves dans la référence [3], avec d'autres résultats plus techniques, et des exemples historiques assez savoureux.

Les graphes de nombre chromatique 1 sont triviaux, puiqu'ils n'ont pas d'arêtes. Par contre, les graphes de nombre chromatique 2 sont tout-à-fait intéressants :

Définition 20 *On dit qu'un graphe est* bi-parti *s'il existe une partition de l'ensemble des sommets en deux sous-ensembles, telle que toute arête joint un sommet du premier ensemble à un sommet du second.*

Les graphes bi-partis interviennent naturellement dans beaucoup de problèmes, en particulier tous les problèmes de mariage; il est clair qu'une autre façon de dire qu'un graphe est bi-parti, c'est de dire que son nombre chromatique est 2. On peut signaler un critère intéressant :

Théorème 10 *(König) Le nombre chromatique d'un graphe G est 2 si et seulement si il n'admet pas de cycles de longueur impaire.*

La démonstration figure dans la référence [4]. On ne connait pas de caractérisation intéressante des graphes de nombre chromatique 3 ou plus.

3.4.3 Le théorème des 4 couleurs

On ne peut terminer cette section sans donner le théorème de coloriage le plus fameux :

Théorème 11 *Toute carte de géographie peut être coloriée avec 4 couleurs*

Il faut un peu préciser : on suppose que la carte est dessinée sur un plan (ou une sphère, cela revient au même), que les régions sont raisonnables (disons, des polygones connexes), et que deux régions ayant une frontière commune sont de couleurs distinctes. On n'exige pas que deux régions qui ont seulement un coin en commun aient des couleurs distinctes, sinon on trouverait immédiatement un contre-exemple en divisant un disque en secteurs se touchant au centre.

Pour démarrer la preuve, on remplace la carte par son graphe dual (dont les sommets sont les régions de la carte, deux sommets étant adjacents si les régions correspondantes ont une frontière commune). Ce graphe est par contruction un graphe planaire, et on est donc amené à montrer que le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus de 4.

Ceci a été fait en 1976 par Appel et Haken, dans une démonstration très longue qui consiste à se ramener à un nombre fini, mais grand, de configurations, et à prouver que pour chacune des ces configurations, 4 couleurs suffisent. La fin de la preuve a été faite par ordinateur, soulevant une controverse sur la validité d'une preuve qui n'est pas entièrement vérifiable à la main, mais dépend du fonctionnement d'un programme ; par contre, il est facile de démontrer que 5 couleurs suffisent.

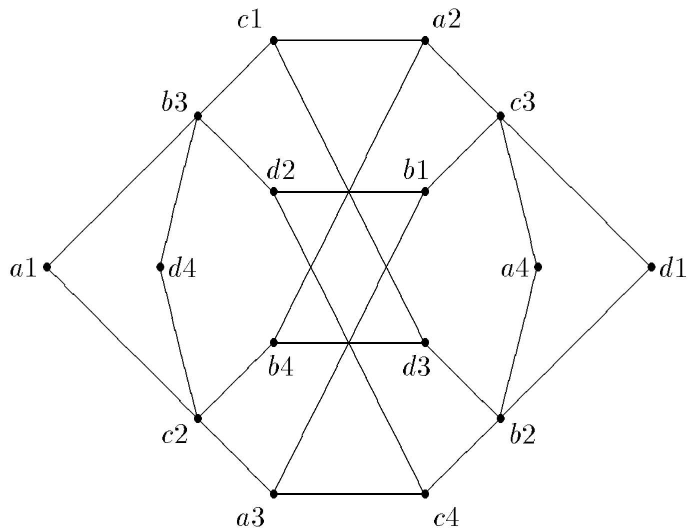
On peut généraliser ce problème aux cartes dessinées sur un tore, ou plus généralement sur un bretzel à g trous. Curieusement, c'est plus facile que sur la sphère, et l'on sait depuis longtemps que le nombre de couleurs nécessaires est la partie entière de $\frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}$.

3.5 Solution des exercices

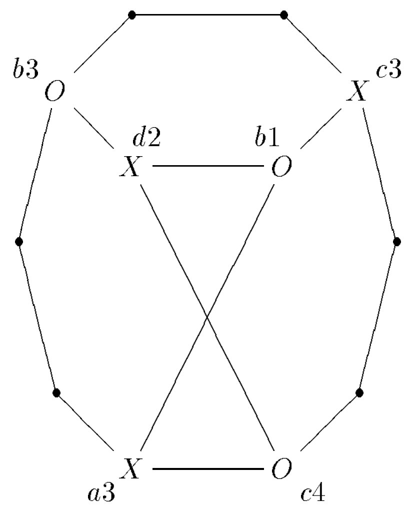
Solution de l'exercice 26 : Un petit essai montre qu'il n'est pas évident de dessiner le graphe G_4, qui a 16 sommets, 4 de degré 2 (les coins), 8 de degré 3 (les bords), et 4 de degré 4 (les 4 cases du milieu).

On peut commencer par G_2, qui est trivial (le cavalier ne peut bouger), donc de nombre chromatique 1, et G_3, qui consiste en un sommet isolé (le centre, où le cavalier ne peut bouger) et un cycle de longeur 8 (de toutes les cases du bord, le cavalier peut aller vers deux autres cases du bord), et qui est donc de nombre chromatique 2.

Un peu de travail permet de mettre le graphe G_4 sous la forme ci-dessous :



On remarquera que ce graphe ne peut être représenté sans intersection, car il n'est pas planaire : il contient en effet une subdivision du graphe bi-parti complet $K_{3,3}$, comme le montre le sous-graphe ci-dessous, où l'on reconnait le graphe bi-parti qui joint $\{b1, b3, c4\}$, marqués d'un O et $\{a3, c3, d2\}$, marqués d'un X.

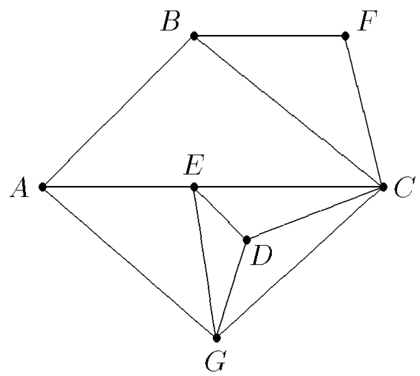


On peut trouver sur le graphe G_4 2 sous-ensembles stables disjoints : $\{a1, a3, b2, b4, c1, c3, d2, d4\}$ et $\{a2, a4, b1, b3, c2, c4, d1, d3\}$; donc le nombre chromatique est 2, et le graphe est bi-parti ; on peut d'ailleurs vérifier qu'il n'y a pas de cycle de longueur impaire.

Pour généraliser, on peut essayer de représenter ce qui se passe en longueur 5. Les choses se compliquent... On a au centre un sommet de degré 8, et le graphe devient vraiment compliqué à tracer.

On peut aussi regarder un vrai échiquier, et repérer sur cet échiquier les sous-ensembles stables qu'on vient d'énumérer. $a1, a3, b2, b4, c1, c3 \dots$ Bon sang mais c'est bien sûr ! ce sont les cases noires de l'échiquier ! Et il est bien évident que le cavalier change de couleur à chaque saut, donc le graphe G_n est bi-parti pour tout $n \geq 2 \dots$.

Solution de l'exercice 27 : On commence par représenter le graphe d'interférence, dont les sommets sont les stations, deux stations étant reliées par une arête si elles interfèrent, c'est-à-dire si elles sont distantes de moins de 100 Km.



C'est une bonne occasion de tester l'algorithme de Welch et Powell. La liste des sommets dans l'ordre des degrés décroissants (on a écrit le degré entre parenthèses après chaque sommet) est $C(5), E(4), G(4), A(3), B(3), D(3), F(2)$. On colorie d'abord C en rouge, puis le premier sommet qui ne lui est pas adjacent, soit A, et on ne peut plus colorier en rouge. Ensuite on colorie E en bleu, et le premier sommet qui ne lui est pas adjacent, soit B. On colorie ensuite G et F en vert, et il ne reste plus que D à colorier en jaune.

L'algorithme nous donne un coloriage en 4 couleurs, donc $\gamma(G) \leq 4$ (c'était prévisible, puisque le dessin montre que le graphe est planaire). D'autre part, on voit immédiatement que le graphe contient le graphe complet K_4 (sur les sommets C, D, E, G), donc son nombre chromatique est au moins 4. Il est donc égal à 4. Il faudra au minimum 4 longueurs d'ondes, par exemple une pour A et C, une pour B et E, une pour F et G, et une pour D.

Solution de l'exercice 28 : a) Si n est un entier inférieur ou égal à 20, on a $n + 1 \leq 21$, donc 1 est adjacent à tous les entiers inférieurs ou égaux à 20. Ceci prouve que le graphe est connexe, et que son diamètre est au plus 2 (on peut toujours trouver une chaîne de longueur au plus 2 de i à j en passant par 1). Comme 19 et 20 ne sont pas adjacents, le diamètre est exactement de 2.

b) le degré du sommet i est $21 - i$ si $i > 10$, et $20 - i$ si $i \leq 10$ (la différence vient du fait que, si $i > 10$, i est relié à tous les entiers de 1 à $21 - i$, tandis que, si $i \leq 10$, i est relié à tous les entiers de 1 à $21 - i$, sauf i car on ne compte pas la boucle de i à i). On peut appliquer l'algorithme de Welch et Powell aux entiers rangés dans l'ordre des degrés décroissants, qui est l'ordre naturel, et on trouve que l'on peut colorer le graphe avec 11 couleurs, correspondants aux ensembles stables $\{1\}$, $\{2, 20\}$, $\{3, 19\}$, $\{4, 18\}$, $\{5, 17\}$, $\{6, 16\}$, $\{7, 15\}$, $\{8, 14\}$, $\{9, 13\}$, $\{10, 12\}$, $\{11\}$. Donc le nombre chromatique est au plus de 11. D'autre part, si i, j sont deux entiers distincts inférieurs ou égaux à 11, on a $i + j \leq 21$, donc i et j sont adjacents. Le graphe contient donc un graphe complet d'ordre 11 : son nombre chromatique est au moins 11.

Donc le nombre chromatique du graphe considéré est exactement de 11.

Solution de l'exercice 29 : a) Il est clair que, dans un graphe de de Bruijn sur les mots de longueur n, on peut passer de n'importe quel mot à n'importe quel autre en au plus n pas : en effet, à chaque étape, on élimine la lettre de gauche du mot, on décale les autres lettres vers la gauche, et on introduit une nouvelle lettre de droite. En n pas, on peut arriver à n'importe quel nouveau mot. De plus, il est clair qu'il faut au moins n pas pour passer d'un mot entièrement consituté de 0 à un mot entièrment constitué de 1. Donc le diamètre du graphe de de Bruijn (orienté ou non orienté) est n. Dans le cas qui nous intéresse, le diamètre est de 4, il est réalisé sur la chaîne déterminée par la suite de sommets $(0000), (0001), (0011), (0111), (1111)$.

Il est facile de calculer le nombre d'arêtes du graphe de de Bruijn *orienté*: en effet, il y a $2^4 = 16$ sommets, et de chaque sommet partent deux arêtes, donc il y a 32 arêtes. C'est plus délicat pour le graphe non orienté: il faut en effet supprimer les boucles, et ne pas compter deux fois les arêtes qui sont parcourues dans chaque sens.

Pour qu'il y ait une boucle de $x_1x_2x_3x_4$ vers lui même, il faut que $x_1x_2x_3 = x_2x_3x_4$, ce qui n'est possible que si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$; il y a donc exactement deux boucles sur le graphe orienté, en 0000 et 1111.

Pour qu'une arête soit parcourue en deux sens, il faut trouver deux sommets distincts $x_1x_2x_3x_4$ et $y_1y_2y_3y_4$ tels que $x_1x_2x_3 = y_2y_3y_4$ et $y_1y_2y_3 = x_2x_3x_4$. Ceci implique $x_1 = y_2 = x_3 = y_4$ et $y_1 = x_2 = y_3 = x_4$; de plus, ces deux valeurs doivent être distinctes, sinon les deux mots ne seraient pas distincts. Il y a donc une seule arête parcourue dans les deux sens, celle qui joint 0101 et 1010.

En retirant les deux boucles, et en ne comptant qu'une fois l'arête parcourue dans les deux sens, on obtient 29 arêtes pour le graphe de de Bruijn, comme on peut le vérifier par comptage sur la figure.

b) Il est un peu plus compliqué de déterminer le nombre chromatique. On voit que le graphe contient plusieurs exemplaires du graphe complet sur 3 éléments K_3 ; donc son nombre chromatique est au moins de 3. Une application directe de l'algorithme de coloriage de Welch et Powell donne facilement un coloriage à 4 couleurs; en modifiant un peu ce coloriage pour utiliser la symétrie du graphe, on obtient un coloriage à 3 couleurs, avec les ensembles stables $\{0000, 1001, 0110, 1111\}$, $\{0001, 0100, 1100, 0101, 1101, 0111\}$, $\{1000, 0010, 1010, 0011, 1011, 1110\}$. Donc le nombre chromatique est 3. On admirera la remarquable symétrie de ce coloriage : le premier ensemble stable est invariant quand on échange 0 et 1, et quand on lit les mots à l'envers, et ces deux opérations échangent les deux autres ensembles stables.

Solution de l'exercice 30 : a) Soit G un graphe de nombre chromatique $\gamma(G)$. On considère une partition $A_1, \ldots, A_{\gamma(G)}$ en ensembles stables. J'affirme que, dans tout ensemble stable A_i de cette partition, il existe un élément x_i qui est adjacent à tous les autres ensembles.

Supposons que ce soit faux. Alors, il existe un A_i tel que, pour tout $x \in A_i$, il existe un A_k tel que x ne soit adjacent à aucun élément de A_k. Mais alors, on peut colorer x de la couleur k. On répartit ainsi tout l'ensemble A_i dans les autres ensembles, et on obtient un coloriage avec $\gamma(G) - 1$ couleurs, ce qui est absurde.

Mais x_i, étant adjacent à des sommets contenus dans $\gamma(G) - 1$ ensembles distincts, est de degré au moins $\gamma(G) - 1$, et il existe un tel élément pour chaque couleur. On a bien montré qu'il existe toujours au moins $\gamma(G)$ éléments de degré $\gamma(G) - 1$.

b) On a vu que si G est le graphe complet d'ordre n, son nombre chromatique est n. Supposons que G est un graphe d'ordre $n > 1$ qui n'est pas complet. Il existe deux sommets distincts x, y qui ne sont pas reliés. On peut alors construire un coloriage à $n - 1$ couleurs qui donne les mêmes couleurs à x et y, et des couleurs différentes aux $n-2$ autres sommets. On a donc bien $\gamma(G) \leq n-1$ pour tout graphe d'ordre n qui n'est pas complet.

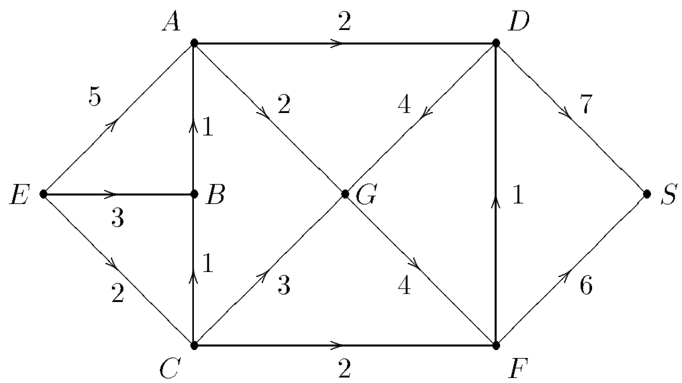
Chapitre 4

Problèmes de plus court chemin

4.1 Un problème

Démarrons par un exercice qui est repris du document d'accompagnement :

Exercice 31 *Le graphe suivant représente un réseau routier (avec des sens interdits) ; quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S ?*



Ce problème est très naturel, et se présente dans bien des domaines différents. Même pour un graphe aussi simple que celui-là, il n'est pas évident d'être sûr que l'on a trouvé le plus court chemin.

L'algorithme le plus immédiat est de considérer tous les chemins de A à S, et de chercher le plus court. Cet algorithme est très inefficace : on peut bien sûr se limiter aux chemins sans cycles, donc de longueur bornée par le nombre de sommets, mais même comme cela, le nombre de chemins possibles reste très grand, comme on l'a vu dans le chapitre 2.

Une méthode plus efficace consiste à procéder de proche en proche : si l'on trouve un plus court chemin de E à S qui passe par les sommets $B_1, B_2, \ldots, B_k$, alors le début de ce chemin est aussi un plus court chemin de E à $B_1, B_2, \ldots, B_k$. On va donc commencer par chercher un sommet C pour lequel on connaît un plus court chemin de E à C, puis rajouter un nouveau sommet à chaque étape de l'algorithme.

Si l'on connaît déjà un ensemble S de sommets pour lesquels on a trouvé un plus court chemin, l'idée est de regarder tous les sommets liés par une arête à un sommet de S, et de prendre parmi ces sommets le plus proche de A. On résout ainsi l'exercice de proche en proche.

En pratique, ici, on part de E. A partir de E, on peut rejoindre en un coup trois sommets, A, B et C, et le plus proche est C. Donc il ne peut y avoir de chemin de longueur plus petite

que 2 de E à C: c'est la route directe, toutes les autres routes passeraient d'abord par un autre sommet, donc seraient plus longue. La distance de E à C est 2. On sait de plus que la distance de E à B est au plus 3, et celle de E à A au plus 5, puisqu'on a vu les chemins correspondants. On regarde maintenant où on peut aller à partir de C: on peut joindre B, par un chemin de longueur 3 à partir de E, ou G, à distance 5 (toujours à partir de E, on le répètera plus), ou F, à distance 4. Le plus proche est B, et l'on voit qu'il ne peut y avoir de chemin de longueur inférieure à 3 de E à B, puiqu'on a déjà exploré tous les chemins de longueur inférieure à 3. On explore maintenant à partir de B, et on voit que l'on peut joindre A, à distance 4; donc A est à distance 4 de E (la route directe en une arête n'est pas la plus courte), et de même, F est à distance 4 de E. En continuant ainsi, on voit que G est à distance 5, D à distance 5, et S à distance 10 ; un chemin de longueur minimale est $ECFS$, de longueur 10 (c'est même le seul).
Remarque : Attention à la terminologie: la notion de longueur de chemin que nous utilisons ici n'est pas la même que celle que nous avons définie au premier chapitre (nombre d'arêtes qui composent un chemin donné); dans les termes du chapitre 1, $ECFS$ est une chaîne orientée de longueur 3. Nous avons fait cet abus de langage à cause de l'interprétation routière évidente de l'exercice; dans la suite, on parlera plutôt de poids que de longueur, pour éviter les confusions.

Nous allons expliquer plus en détail cet algorithme.

4.2 Récapitulation : les définitions et résultats

Formalisons plus précisément l'algorithme ci-dessus, dû à Dijkstra ; la donnée de départ est un *graphe pondéré* connexe :

Définition 21 *On appelle* graphe pondéré *un graphe tel que, à chaque arête a est associé un poids* l_a.

Dans le problème considéré ici, on doit comprendre l_a comme la longueur de l'arête a, et nous supposerons toujours que c'est un nombre strictement positif. Il faut bien sûr que le graphe soit connexe pour que l'on puisse être sûr de trouver le plus court chemin. Dans un graphe non connexe, on pourra trouver le plus court chemin entre deux points appartenant à la même composante connexe, sinon l'algorithme n'aboutira pas (mais on s'en apercevra: au bout d'un temps fini, l'algorithme n'explore plus de nouveaux sommets, ce qui montre qu'il y a un blocage).

L'idée de l'algorithme est d'écrire à côté de certains sommets bien choisis leur distance à l'origine A, en commençant par écrire ces distances au crayon car elles peuvent diminuer, si on trouve un chemin plus court. Puis on choisit la plus courte de ces distances et on l'écrit à l'encre, définitivement, car la procédure suivie fait que l'on ne peut trouver un chemin plus court. On appelera poids du sommet B le nombre associé à B, s'il existe.

Dans la suite, on dira que l'on a marqué le sommet S au crayon si l'on a écrit à côté de ce sommet une distance provisoire (longueur d'un chemin de A à S ; mais il pourrait y avoir un chemin plus court), et que l'on a marqué ce sommet à l'encre si l'on a trouvé sa distance à A (longueur du chemin le plus court).

Au départ, les données sont : un graphe pondéré, avec un poids strictement positif sur chaque arête, un sommet initial A et un sommet final S.

On initialise l'algorithme en écrivant 0 au sommet A, qui peut évidemment être relié à lui même par un chemin de longueur 0.

On répète la suite d'opérations suivante, jusqu'à ce qu'on ait marqué définitivement le sommet S :

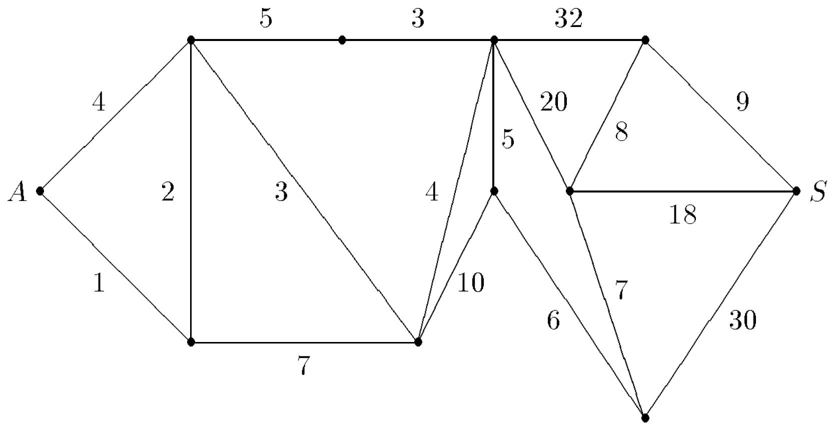
- On note B le dernier sommet marqué à l'encre.
- Pour tout sommet C non encore marqué à l'encre, et relié à B par une arête, on calcule la somme du poids de B et du poids de l'arête qui relie B à C. Si C n'est pas encore marqué au crayon, on marque au crayon le poids obtenu ; si C est déja marqué, on remplace l'ancien poids par le nouveau poids si celui-ci est plus petit, sinon on laisse l'ancien poids.
- Parmi tous les sommets marqués au crayon, on en choisit un de poids minimal, et on le marque à l'encre avec ce poids minimal.

On continue ainsi jusqu'à avoir marqué S à l'encre.

4.3 Quelques exercices additionnels

On donne juste une variation sur le premier exercice; signalons que le livre [7] donne de nombreux exercices de ce type.

Exercice 32 *Chercher le plus court chemin de A à S dans le graphe suivant :*



Exercice 33 *Le prince est parti à la recherche du trésor; il peut accomplir les actions suivantes:*

- *Aller à la ville du marché, en contournant la rivière par un gué :4 jours.*
- *Traverser la forêt : 1 jour.*
- *Depuis la forêt, abattre des arbres pour traverser la rivière, et se rendre à la ville du marché : 2 jours.*
- *Depuis la forêt, se rendre à la capitale provinciale en traversant les marais : 7 jours.*
- *S'équiper chaudement au marché, et partir pour le col du nord : 5 jours.*
- *Trouver un bon cheval au marché, et se rendre à la capitale provinciale par la grand-route : 3 jours.*
- *Depuis le col du nord, se rendre au refuge du devin : 3 jours.*
- *Depuis la capitale provinciale, se rendre au refuge du devin : 4 jours.*

- *Se rendre de la capitale provinciale au palais du roi, en étant retardé par des contrôles : 10 jours.*
- *Au sortir du devin, partir directement chercher l'épée, et la trouver après s'être perdu par manque de carte : 20 jours.*
- *Au sortir de chez le devin, au mépris de ses avis, se rendre directement à la grotte et tuer le dragon avec un canif : 32 jours (il faut du temps pour le tuer avec un canif).*
- *Bien conseillé par le devin, prendre un raccourci pour le palais du roi : 5 jours.*
- *Un fois arrivé au palais du roi, séduire la bibliothécaire, puis trouver les cartes qui expliquent l'emplacement de l'épée et du trésor : 6 jours.*
- *En utilisant les cartes trouvées dans la bibliothèque, faire tout le tour de la montagne, et traverser un labyrinthe qui mène directement au trésor : 30 jours.*
- *En utilisant les cartes, aller chercher l'épée pour combattre le dragon : 7 jours.*
- *S'entraîner à l'épée, puis tuer le dragon : 8 jours.*
- *Une fois l'épée trouvée, au lieu d'affronter le dragon, utiliser l'épée pour creuser un tunnel par dessous, et déboucher directement dans la cachette du trésor : 18 jours.*
- *Une fois le dragon tué, résoudre l'énigme qui ouvre la cachette du trésor : 9 jours.*

Comment doit-il faire pour récupérer le trésor le plus vite possible? Quel temps lui faudra-t-il?

Remarque : Un grand nombre de jeux actuels sont basés sur un graphe plus ou moins complexe. Celui-ci est assez trivial, mais il est facile, à partir de quelques branchements, de fabriquer des graphes d'une grande complexité.

4.4 Compléments pour les enseignants

Ces compléments dépassent bien sûr le niveau du cours de terminale. Il n'est pas question de les traiter formellement devant les élèves. Il est cependant souhaitable de signaler aux élèves les deux points suivants :

- Il ne suffit pas d'avoir un algorithme, il faut encore prouver qu'il marche. L'algorithme qui consiste à répondre systématiquement "5" à chaque fois qu'on demande la longueur du plus court chemin de A à S est le plus court possible (une seule étape), et il est très robuste ; son seul défaut est de ne pas donner le bon résultat ! Après avoir compris comment on utilise l'algorithme, il y a une étape plus difficile, qui consiste à prouver sa correction. Cette preuve est mathématique, comme le sont les preuves de géométrie dans le triangle ; on pourrait la faire, si on avait plus de temps.
- Il est facile de voir, comme ci-dessous, que cet algorithme nécessite au plus $2n^2$ opérations, et on peut en ébaucher la démonstration. D'autre part, on voit facilement en faisant un arbre que, si de tous les sommets partent au moins 3 arêtes (on peut simplifier les sommets qui n'obéissent pas à cette condition), il y a au moins 2^n chemins de longueur n partant de A tels

que, à chaque sommet, on reparte par une arête différente de celle par laquelle on est venue. Donc, si tout chemin de A à S comporte au moins n arêtes, ce qui se calcule facilement, on voit qu'un algorithme qui comparerait les chemins devrait regarder au moins 2^n chemins (peut-être plus, car il est très possible que le plus court chemin ne contienne pas un nombre d'arêtes minimal). On peut demander aux élèves de comparer n^2 et 2^n pour $n = 10, 20, 100$; c'est à relier au chapitre d'analyse sur la croissance comparée des fonctions. Il est utile de savoir qu'un algorithme exponentiel est inutilisable en pratique.

4.4.1 Cet algorithme est-il efficace ?

Cet algorithme peut sembler bien complexe pour le problème que l'on cherche à résoudre. Il est utile d'estimer le nombre d'étapes qu'il comporte, pour pouvoir comparer avec d'autres algorithmes.

Il est clair qu'à chaque grande étape, on marque définitivement un sommet : il y a donc au plus n grandes étapes, si n est le nombre de sommets. Combien y a-t-il d'opérations élémentaires dans une étape ? On se contente de marquer au crayon les sommets adjacents au sommet marqué, donc au pire n sommets, puis de comparer les sommets marqués au crayon pour trouver le plus petit, encore au maximum n opérations. On voit que l'algorithme se termine en au plus $2n^2$ opérations (on peut raffiner l'estimation à $n(n-1)$, et même mieux si le degré maximum d'un sommet est majoré par $d < n$).

On a donc un nombre d'étapes qui est de l'ordre du carré de n ; si l'on compare avec l'algorithme naïf qui consiste à comparer tous les chemins, on voit que celui-ci est en général exponentiel en n, donc beaucoup plus long ; déjà pour des graphes de 50 sommets, ce deuxième algorithme est complètement inutilisable, alors que l'algorithme de Dijkstra est quasi-instantané pour un ordinateur.

4.4.2 Cet algorithme est-il correct ?

On remarquera que nous n'avons pas prouvé que cet algorithme fait bien ce qu'il doit faire ! C'est d'ailleurs souvent le cas dans l'enseignement : dans le primaire, on ne prouve pas formellement que les algorithmes enseignés pour les opérations arithmétiques de base sont corrects, même si on essaie de donner aux élèves une intuition de la raison pour laquelle ils sont justes.

Il en est de même ici : il n'est pas facile de donner une preuve formelle de l'algorithme, mais on peut le justifier. L'idée essentielle est une récurrence : on suppose qu'à l'étape k, il y a un certain ensemble E, contenant l'origine, de sommets dont on a déjà trouvé la distance à l'origine, et un ensemble F des sommets adjacents à E. Pour chacun des sommets de F, on calcule une distance provisoire en prenant la longueur de l'arête qui le relie à un point de E, et de la distance de ce point à l'origine (s'il y a plusieurs trajets possibles de ce type, on prend la plus courte des distances obtenues).

Dans F, on choisit le point P qui a le plus petit poids provisoire : alors, pour ce point, on a trouvé le plus court chemin. En effet, sinon, on aurait un chemin plus court qui joint A à P ; mais ce chemin ne peut être entièrement contenu dans $E \cup \{P\}$, sinon c'est sa longueur qu'on aurait comptée. Donc il contient un sommet autre que P qui n'est pas dans E. Soit Q le premier sommet du chemin qui n'est pas dans E ; Q est adjacent à un point de E, donc il est dans F, donc la longueur de ce chemin de A à Q est supérieure ou égale à celle du chemin précédent de A à F, par définition de ce dernier. C'est absurde.

4.4.3 Quelques autres problèmes

Remarquons d'abord que cet algorithme exige que tous les poids soient positifs ; s'il y avait une boucle sur laquelle les poids sont négatifs, on pourrait trouver des chemins de poids négatif inférieur à toute valeur donnée, et le problème n'aurait pas de solution.

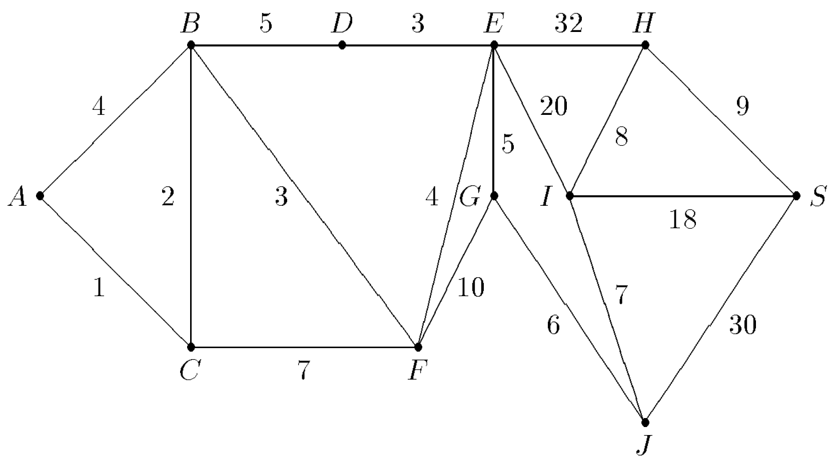
Il existe de nombreux problèmes d'optimisation semblables ; l'un d'entre eux est fréquemment utilisé pour la recherche opérationelle, c'est celui du plus **long** chemin dans un graphe. On a dans ce cas un certain nombre de tâches, de durée déterminée, qui doivent être accomplies dans un certain ordre. Par exemple, les fondations doivent être creusées avant de dresser les murs, la plomberie doit être faite avant la peinture, mais la pose des volets et l'électricité peuvent être faites dans un ordre indifférent. La durée minimale du chantier est donnée par le plus long chemin dans le graphe.

Remarquons que, pour que ce plus long chemin dans un graphe avec des poids positifs existe, il est nécessaire qu'il n'y ait aucun circuit (qui donnerait, en répétant le circuit, des chemins arbitrairement longs). Cette condition est automatiquement satisfaite pour une description de tâche : si le plombier devait attendre que l'électricien ait fini, et si l'électricien devait aussi attendre que le plombier ait fini pour commencer à travailler, le chantier deviendrait impossible !

D'autres problèmes d'optimisation courants, plus complexes, concernent les flots maximaux que l'on peut faire passer dans un graphe : à chaque arête on attribue un poids qui représente un débit maximum, et on demande quel est le débit maximal possible d'un point à un autre. C'est exactement le problème que l'on rencontre pour connaître la circulation maximale que l'on peut avoir, en utilisant les autoroutes et les nationales, un jour de grand départ. Un résultat classique est que le flot maximum est donné par une coupe (c'est-à-dire un ensemble d'arêtes qui sépare les deux sommets) de capacité minimale.

4.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 32 : Il faut commencer par donner des noms au sommets, comme ci-dessous :



On applique alors l'algorithme de Dijkstra, que nous représentons dans le tableau ci-dessous; on a écrit en italique les marques provisoires, en gras les marques définitives:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	S
0										
0	*4*	*1*								
0	*4*	**1**								
0	*3*	**1**			*8*					
0	**3**	**1**			*8*					
0	**3**	**1**	*8*		*6*					
0	**3**	**1**	*8*		**6**					
0	**3**	**1**	*8*	*10*	**6**	*16*				
0	**3**	**1**	**8**	*10*	**6**	*16*				
0	**3**	**1**	**8**	*10*	**6**	*16*				
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	*16*				
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	*15*	*42*	*30*		
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	*42*	*30*		
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	*42*	*30*	*21*	
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	*42*	*30*	**21**	
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	*42*	*28*	**21**	*51*
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	*42*	**28**	**21**	*51*
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	*36*	**28**	**21**	*46*
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	**36**	**28**	**21**	*46*
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	**36**	**28**	**21**	*45*
0	**3**	**1**	**8**	**10**	**6**	**15**	**36**	**28**	**21**	**45**

On a ici complètement décomposé l'application de l'algorithme (on peut bien sûr présenter de façon plus courte quand on est habitué). On voit qu'il y a deux types d'actions: alternativement, on choisit parmi les sommets marqués provisoirement celui de poids minimal, et on le marque en gras, puis on marque provisoirement tous les sommets adjacents à ce dernier sommet marqué. On remarquera que cette dernière action peut être vide: c'est ce qui arrive après qu'on ait marqué le sommet D, car cela ne raccourcit jamais le chemin de passer par D pour aller ailleurs.

Le plus court chemin de A à S est de longueur 45, et il passe par tous les sommets sauf D; c'est $ACBFEGJIHS$.

Solution de l'exercice 33 : Il suffit de tracer le graphe correspondant pour voir que cet exercice n'est qu'un habillage du précédent: il faut donc au moins 45 jours pour retrouver le trésor, et on est obligé de passer par toutes les étapes, sauf le col, pour y arriver en temps minimum.

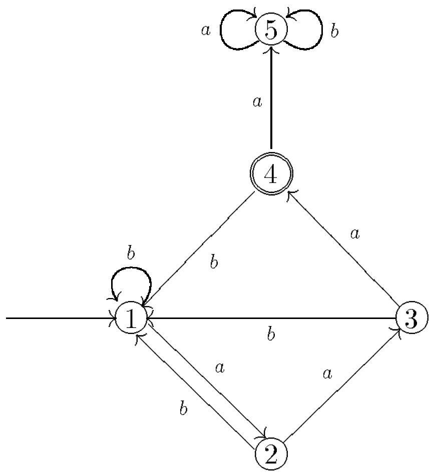
Chapitre 5

Graphes étiquetés

5.1 Quelques exemples

5.1.1 Le jeu du labyrinthe

Nous allons commencer par un jeu : on a représenté ci-dessous le plan d'un petit labyrinthe. Ce labyrinthe possède 5 salles, numérotées de 1 à 5 ; au départ, on est dans la salle 1, indiquée par une flèche. Les salles qui ouvrent sur l'extérieur sont entourées par un double rond ; ici il n'y en a qu'une, c'est la salle 4. De chaque salle partent des couloirs à sens unique, portant une lettre (a ou b), et allant à une autre salle (ou parfois revenant à la même salle, comme dans le cas de la salle 5).



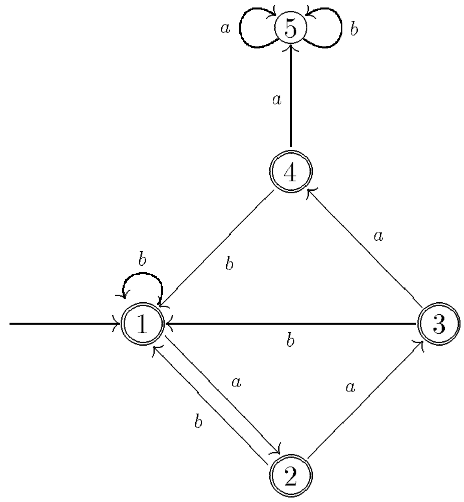
Au début du jeu, on vous remet une suite de lettre, par exemple *abaab*. En lisant ces lettres l'une après l'autre, on suit un chemin partant de la salle 1 dans le labyrinthe. Si, après avoir lu toute la suite, on est dans une salle qui ouvre sur l'extérieur, on a gagné, sinon, on a perdu.

Par exemple, à la suite *abaab* correspond le chemin qui part de la salle 1 et parcourt les salles $2, 1, 2, 3, 1$. Comme la salle 1 n'ouvre pas sur l'extérieur, on a perdu. Par contre, au mot *abaaa* correspond le chemin $1, 2, 1, 2, 3, 4$: ce mot est gagnant.

On peut se poser deux types de questions au sujet de ce labyrinthe : tout d'abord, un mot étant donné, est-il gagnant ou perdant ? Ensuite, plus généralement, peut-on caractériser simplement les mots gagnants ?

On vient de voir comment vérifier si un mot est gagnant. Il n'est en fait pas très difficile de les caractériser tous. On voit d'abord que, si on est dans la salle 5, on ne peut plus en sortir, et donc on a perdu. Quand on est dans les autres salles, dès qu'on lit un b, on revient en salle 1 ; ensuite, si on lit un a, on arrive en salle 2, si on lit aa, on arrive en salle 3, si on lit aaa, on arrive en salle 4, et si on lit $aaaa$, on arrive en salle 5. Un peu de réflexion montre que les mots gagnants sont exactement les mots qui ne contiennent pas $aaaa$ et qui finissent par aaa.

Pouvez-vous caractériser les mots gagnants pour le labyrinthe suivant, petite modification du premier, où toutes les salles, sauf la salle 5, ouvrent sur l'extérieur ?



Cet exercice peut paraître élémentaire. On a pourtant réalisé quelque chose de non évident : une machine qui sait reconnaître certains mots (car il n'est pas difficile de réaliser un équivalent électronique de ce labyrinthe), et on va voir que cela a de nombreuses applications.

Bien entendu, on va cesser de parler de salles et de labyrinthes. On reconnaît dans le plan de ce labyrinthe un graphe orienté, où chaque arête est munie d'un nom appelé étiquette.

5.1.2 Un digicode

Prenons comme deuxième exemple celui d'un digicode comme ceux permettant l'ouverture de la porte de nombreux bureaux ou appartements. Considérons un digicode constitué d'un clavier à 26 touches (les 26 lettres) qui constitue l'organe d'entrée d'un automate dont la sortie commande l'ouverture d'une porte. La porte s'ouvre dès que l'on a tapé la bonne suite de lettres et cela (au moins pour le digicode considéré ici) même si l'on a commencé par se tromper. Si le mot permettant l'ouverture de la porte est "ananas", le système peut être modélisé par le graphe étiqueté représenté par la figure 5.1.

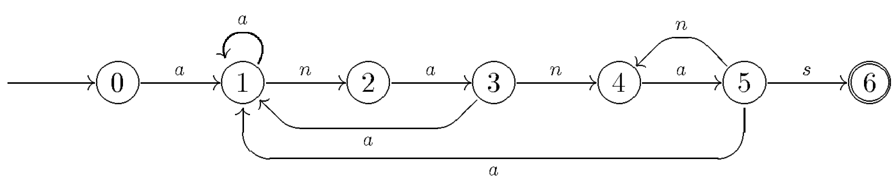


Figure 5.1: Digicode

Dans ce chapitre, les sommets du graphe seront appelés, pour suivre la terminologie habituelle en la matière, des *états* et les arcs étiquetés des *transitions*. Pour ne pas alourdir le schéma ci-dessous nous n'avons pas représenté les transitions provoquées par la frappe des autres lettres. Chaque état (y compris l'état 0) est relié en fait à l'état 0 par autant d'arcs étiquetés par toutes les autres lettres. Par exemple, on n'a pas représenté les 25 arcs qui bouclent sur l'état 0 et qui sont étiquetés par toutes les lettres différentes de "*a*". Il est facile de constater que dès que la suite de lettres *a, n, a, n, a, s* est frappée, on atteint l'état 6 (par convention un état final est entouré par deux cercles concentriques) qui déclenche l'ouverture.

5.1.3 Reconnaissance de modèles

Le problème de la reconnaissance de modèles (pattern matching) consiste à rechercher les occurrences de certaines séquences de caractères, que l'on appellera *mots-clés*, dans un texte t. L'application la plus typique est la recherche documentaire. Etant donné un fond documentaire comprenant des références bibliographiques accompagnées de résumés indiquant les thèmes de chaque ouvrage, on désire chercher les références dans lesquelles certains mots-clés apparaissent. Mais il existe bien d'autres domaines d'applications, comme celle du génome par exemple : on recherche des séquences d'acides aminés dans une très longue suite. L'algorithme trivial qui consiste à parcourir tout le texte pour rechercher les occurrences du premier mot-clé, puis à le parcourir à nouveau pour rechercher le second, etc ... est inefficace, voire impraticable si le texte comporte plusieurs millions de caractères et que l'on recherche plusieurs mots. Le graphe étiqueté ci-dessous a été construit par l'algorithme du à Aho et Corasick(1975), il permet de rechercher plusieurs mots en ne parcourant le texte qu'une seule fois (donc en n'effectuant que n comparaisons si n est la longueur du texte t) et ceci quel que soit le nombre de mots recherchés ! Supposons que les mots clés soient : "*ni*", "*rein*", "*rene*" et "*irene*". A partir de cet ensemble de mots recherchés, l'algorithme de Aho et Corasick fournit le graphe étiqueté de la figure 5.2.

Pour des raisons de lisibilité nous n'avons pas représenté toutes les transitions. L'état 0 est l'état initial et partant de l'état 0, bouclant sur ce même état il y a autant de transitions étiquetées par les caractères autres que "*n*", "*r*", "*i*". Partant des autres états, sauf arc explicite, les transitions étiquetées par "*n*", "*r*", "*i*" sont reliées respectivement aux états 1, 2 et 3 et les transitions étiquetées par les caractères autres que "*n*", "*r*", "*i*" sont toutes reliées à l'état 0.
L'utilisation de ce graphe étiqueté pour le problème de reconnaissance de modèles est très simple : on explore le texte t, en partant de l'état 0 et en suivant les transitions. A chaque étape, si on est dans l'état i, on examine le caractère c du texte t sur lequel on est. S'il existe une transition partant de l'état i, étiquetée c, conduisant à un état j, on passe à l'état j ; dans le cas contraire on passe dans l'état 0. Dans les deux cas on avance d'un caractère dans le texte t. Chaque fois qu'on passe par un état dont l'ensemble des mots clés associés n'est pas vide, on sait que l'on vient de déceler tous les mots-clés qui se trouvent dans cet ensemble. Sur le schéma, ces ensembles de mots sont reliés à l'état correspondant par une flèche double.

Remarque : De tels graphes étiquetés sont utilisés de manière intensive sur tous les traitements de texte. Ces programmes possèdent tous une fonction "recherche et remplacement" qui construit un graphe étiqueté pour rechercher un mot (ou un type de mots) dans un texte.

Ces fonctions de recherche permettent en général de chercher des expressions plus compliquées qu'un simple mot. C'est souvent utilisé dans la recherche de fichiers : si l'on veut chercher tous les fichiers dont le nom commence par "*lettre*" et se termine par "*.txt*", on peut demander les fichiers dont le nom est du type "*lettre*.txt*", où * est un "joker" qui remplace n'importe quel mot. Les fichiers "*letttre1.txt*" ou "*lettrebis.txt*" sont de ce type. On verra dans les compléments qu'il

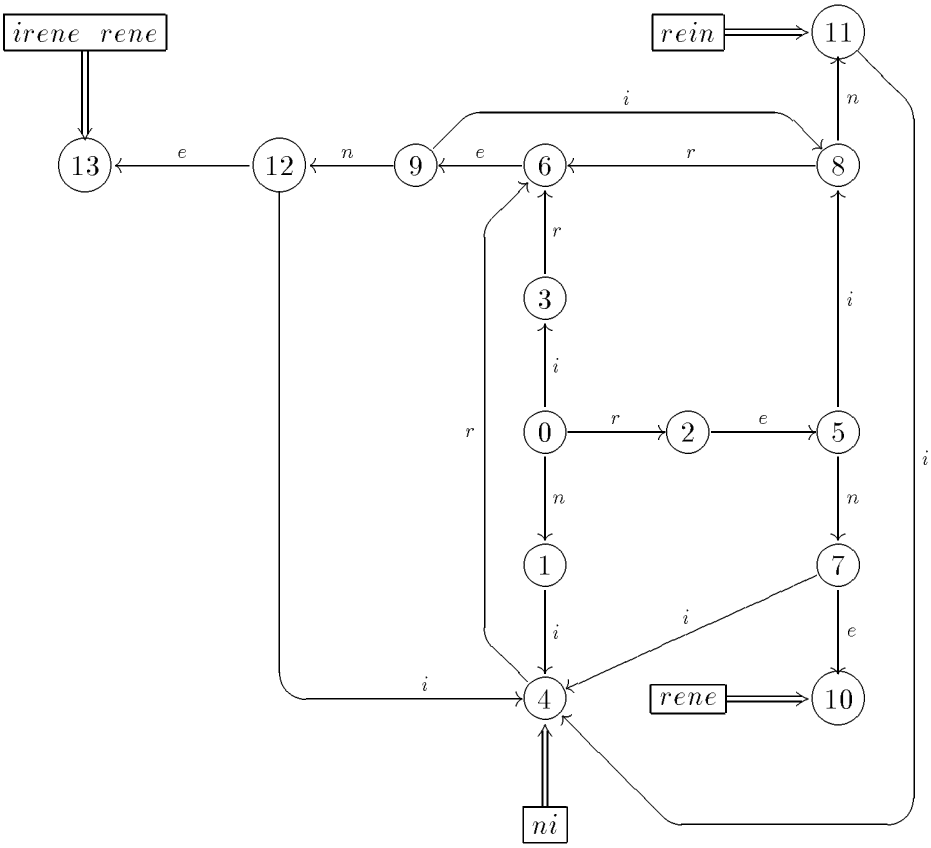


Figure 5.2: Reconnaissance de modèles

existe une famille précis de types de mots que l'on peut reconnaître avec un graphe étiqueté, les expressions régulières.

5.2 Récapitulation : les définitions et résultats

Formalisons un peu ce que nous venons de voir. Pour parler de graphe étiqueté, il faut d'abord choisir un alphabet, dans lequel seront choisies les étiquettes du graphe. On notera $\mathcal{A}$ cet alphabet ; dans tous les exercices, l'alphabet sera petit (habituellement 2 ou 3 lettres, exceptionellement l'alphabet usuel, mais dans ce cas on ne représentera bien sûr pas toutes les arêtes).

Définition 22 *On appelle graphe étiqueté un graphe orienté où toutes les arêtes portent une étiquette choisie dans l'alphabet* $\mathcal{A}$*, et qui possède un sommet initial (indiqué par une flèche pointant vers ce sommet) et un ou plusieurs sommets finaux (indiqués par un double rond entourant le sommet).*

On ne considèrera que des graphes étiquetés déterministes*, c'est-à-dire tels que de chaque sommet parte une seule arête portant une étiquette donnée.*

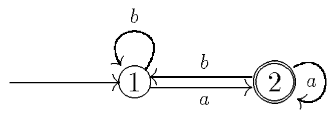
L'intérêt d'un graphe étiqueté est de reconnaître des mots sur l'alphabet $\mathcal{A}$; precisons un peu :

Définition 23 *On appelle mot sur l'alphabet $\mathcal{A}$ une suite finie de lettres de $\mathcal{A}$*

Définition 24 *Soit G un graphe étiqueté par l'alphabet $\mathcal{A}$. On dit qu'un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est reconnu par le graphe G s'il existe un chemin orienté sur le graphe G, partant du sommet initial, arrivant à un sommet final, et étiqueté par ce mot*

Définition 25 *On appelle langage associé à un graphe étiqueté l'ensemble des mots reconnus par ce graphe étiqueté.*

Le contenu de ce chapitre se borne à faire comprendre ces notions de mot reconnu par un graphe étiqueté et de langage associé à un graphe étiqueté, et à les faire fonctionner dans des cas simples.
Exemple 8 : Voici un graphe étiqueté très simple :

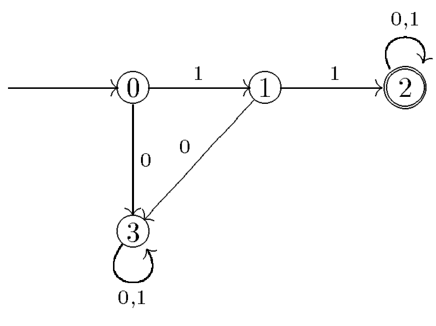


Ce graphe étiqueté reconnaît les mots sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ (c'est-à-dire les mots formés à partir des lettres a et b) se terminant par la lettre a. Le langage L associé à cet automate est l'ensemble des suites finies de a ou de b se terminant par a.

Remarque : Aucun théorème n'est au programme. Il ne faudrait pas s'imaginer que c'est parce qu'il n'y en a pas ! les graphes étiquetés, ou automates, ont donné lieu depuis une cinquantaine d'années à une théorie mathématique abstraite, riche et diversifiée, possèdant de nombreuses applications. Ils sont en particulier fondamentaux en informatique, et c'est pourquoi on a jugé utile de les faire connaître aux élèves de terminale. On trouvera dans la section compléments, ci-dessous, quelques aperçus sur la terminologie usuelle et sur la théorie des automates finis.

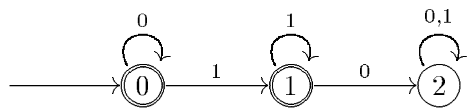
5.3 Quelques exercices supplémentaires

Exercice 34 *Soit l'automate :*



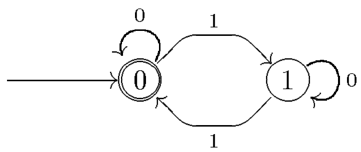
- *Les mots "11", "101", "110", "1011" sont-ils reconnus par cet automate ?*
- *Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.*
- *Caractériser les mots reconnus.*

Exercice 35 *Soit l'automate :*



- *Les mots "000", "001", "010", "0011" sont-ils reconnus par cet automate ?*
- *Donner la liste des mots de moins de quatre lettres reconnus par celui-ci.*
- *Caractériser les mots reconnus.*

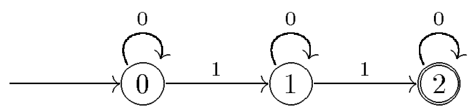
Exercice 36 *Soit l'automate :*



- *Les mots "11", "101", "110", "1011" sont-ils reconnus par cet automate ?*
- *Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.*
- *Caractériser les mots reconnus.*

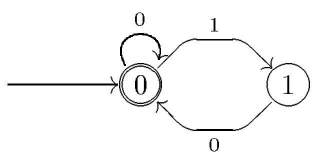
Exercice 37 *Représenter l'automate qui reconnaît les mots ne comportant que des 0 et des 1, et dont le nombre de 1 est impair.*

Exercice 38 *Soit l'automate :*



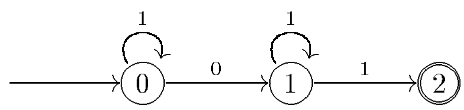
- *Les mots "11", "110", "1010", "1011" sont-ils reconnus par cet automate ?*
- *Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.*
- *Caractériser les mots reconnus.*

Exercice 39 *Soit l'automate :*



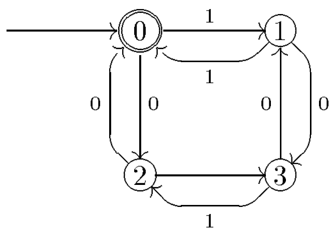
- *Les mots "11", "010", "110", "101010" sont-ils reconnus par cet automate ?*
- *Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.*
- *Caractériser les mots reconnus.*

Exercice 40 *Soit l'automate :*



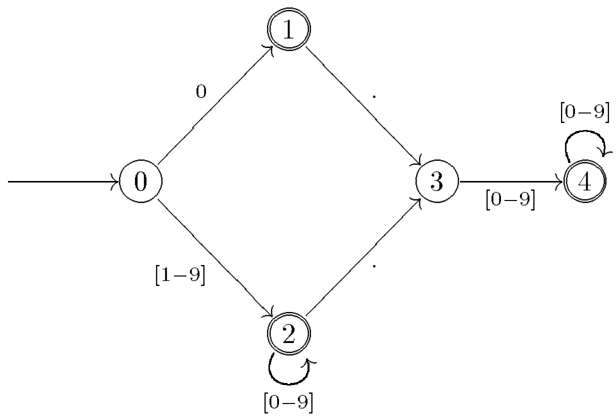
- *Les mots "11", "101", "110", "1011" sont-ils reconnus par cet automate ?*
- *Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.*
- *Caractériser les mots reconnus.*

Exercice 41 *Soit l'automate :*



- *Les mots "11", "101", "1010", "1001" sont-ils reconnus par cet automate ?*
- *Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.*
- *Caractériser les mots reconnus.*

Exercice 42 *Soit l'automate :*



- *Les mots "0", "012", "105", "10.", "0.147", "12.050" sont-ils reconnus par cet automate ?*
- *Caractériser les mots reconnus.*

Exercice 43 • *Donner la suite des états visités par l'automate de la figure 2 si les mots sont recherchés dans le texte t suivant :*

"annie n'honnit ni irene ni nina"

Exercice 44 • *Utiliser l'automate de la figure 5.3 pour calculer le produit en binaire du nombre* $n = 14$ *par le nombre 5 (voir les compléments).*

5.4 Compléments pour les enseignants

5.4.1 Terminologie

Les spécialistes du sujet ne parlent pas de graphes étiquetés, mais d'*automates finis* . Les sommets sont appelés des *états*, et l'on distingue parmi eux un ou plusieurs *états initiaux*, et un ou plusieurs *états finaux*. On ne parle pas d'arêtes orientées, mais de *transitions*, étiquetées par les lettres de l'alphabet associé à l'automate fini.

Ce vocabulaire remonte à l'origine de la théorie : les automates finis sont des modèles de machines, les plus simples possibles en un certain sens. La lecture d'un mot est une forme de calcul, et on accepte ce mot si et seulement si l'état auquel on aboutit après le calcul est un état final.

La représentation conventionelle d'un automate fini est celle que nous avons vue plus haut : on représente un automate fini par un graphe orienté, un état est représenté par un cercle dans lequel se trouve le nom de l'état, les états finaux sont repérés par un double cercle, et les état initiaux sont munis d'une flèche rentrante qui n'a pas d'origine ; les transitions sont repésentées par des arêtes orientées, allant d'un état à un autre (ou à lui-même : les boucles sont autorisées), et portant en étiquette une lettre de l'alphabet. Pour plus de simplicité, on s'autorise à regrouper les arêtes qui ont mêmes extrémités, en écrivant une seule arête avec plusieurs étiquettes.

Une distinction importante :

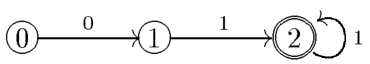
Définition 26 *un automate est dit* déterministe *si de chaque sommet part une seule arête avec une étiquette donnée, et s'il y a un seul état initial.*

Dans ce cours, nous n'avons considéré que des automates finis déterministes, car ils sont plus simples à étudier. Le calcul qu'effectue un automate déterministe à partir d'un mot donné est unique, puisqu'on n'a jamais de choix. Mais que faire dans le cas général ? On demandera simplement *qu'il existe* un calcul réussi :

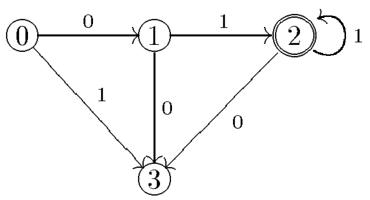
Définition 27 *On dit qu'un mot est reconnu par un automate fini quelconque (non forcément déterministe) s'il existe un chemin dans le graphe correspondant, débutant en un état initial, finissant en un état final, et étiqueté par ce mot.*

Remarque : Il arrive souvent que certaines lettres ne soient l'étiquette d'aucune arête quittant un sommet donné. On considère alors qu'un mot qui amènerait à lire cette lettre a partir de ce sommet n'est pas reconnu. On pourrait aussi rajouter un sommet supplémentaire, dit "poubelle", non terminal, d'où on ne peut partir, et des arêtes menant à ce sommet à chaque fois que la lettre correspondante est absente.

Par exemple, voici un automate qui reconnait des mots formés d'un 0 suivi d'un ou plusieurs 1 ; version courte (il manque des arêtes) :



et version complète (on a rajouté les arêtes manquantes, elles mènent vers un état poubelle) :



5.4.2 Historique

Les automates finis sont issus, dans les années 50, de plusieurs théories : débuts de l'informatique, linguistique, communications, logique, circuits de commandes électriques... Toutes ces recherches tentaient de caractériser les machines "les plus simples" en un sens à préciser, et elles ont toutes abouties à des notions équivalentes. Or, quand un même concept est susceptible de définitions très diverses, mais équivalentes, c'est un signe assez sûr qu'il s'agit d'une notion importante.

La présentation la plus agréable de cette théorie est "linguistique". Au cours des années 50, commencent des études fondamentales en linguistique, d'une part pour l'étude des langues naturelles, d'autre part pour les langages de programmation. Apparaît alors une question que l'on ne pouvait se poser dans le contexte de la grammaire traditionnelle. Si l'on a l'ambition de traduire automatiquement, par exemple, du français en anglais, il faut bien être capable de répondre à un problème bien plus simple :

Etant donné un texte, ce texte est-il écrit en français ?

A ma connaissance, on ne sait toujours pas le faire par ordinateur, alors que tout locuteur francophone possède cette connaissance. Devant un mode d'emploi traduit par une machine à partir d'un original anglais ou japonais, comme cela arrive régulièrement, on sent immédiatement que quelque chose ne va pas.

Plus généralement, on peut se poser la question :

Etant donné un langage L et un texte M, ce texte est-il écrit dans ce langage ?

On commence par formaliser un peu. Suivant une procédure habituelle en mathématiques, on remplace une définition "en compréhension" (les règles hypothétiques qui définissent le français) par une définition "en extension" (le français, c'est l'ensemble des textes qu'on peut écrire en français). Un langage est donc simplement un ensemble de textes écrits avec un alphabet donné. L'habitude a été prise, en informatique théorique, d'appeler ces textes des "mots", ce qui choque un peu au début : de ce point de vue, un roman de Victor Hugo n'est qu'un mot immense sur un alphabet fini (un peu plus grand que l'alphabet latin, puisqu'il faut rajouter les signes de ponctuation, les chiffres, et surtout le caractère le plus fréquent, l'espace).

Et nous voila arrivés à une question (presque) bien posée :

Quels sont les langages les plus simples possibles ?

Une première réponse est "mécanique". Essayons de fabriquer une machine la plus simple possible qui reconnaisse un langage. Une telle machine lit un mot, et répond "oui" ou "non" à la fin. Comme elle est très simple, elle commence la lecture à la première lettre, et lit le mot dans l'ordre, sans revenir en arrière ni sauter de lettres. Et de plus, elle a une mémoire finie, qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, appelées états. Comment fonctionne cette machine ? Elle démarre dans un certain état, appelé état initial. Elle lit la première lettre, et suivant sa valeur, change d'état. Puis elle lit les lettres suivantes, et à chaque lettre, suivant la valeur courante de la mémoire, change d'état (c'est dans cette transition qu'intervient le programme de la machine). Quand elle a fini de lire le mot, elle déclare, suivant la valeur courante de la mémoire (l'état final) si le mot est reconnu ou non. On voit que cette machine n'est rien d'autre qu'un automate fini déterministe, ou graphe étiqueté, tels qu'on les a présentés dans ce cours. On définit ainsi une première classe de langages simples :

Définition 28 *On dit qu'un langage est reconnaissable s'il existe un automate fini déterministe qui le reconnaît.*

Il existe une autre réponse, plus ensembliste. Pour cela, nous allons définir des opérations sur les langages. Il y a trois opérations naturelles qui sont les opérations ensemblistes : union, intersection, complémentaire, dont la définition est évidente.

Une opération plus subtile est le produit. On peut définir le produit de deux mots, aussi appelé concaténation, en mettant ces deux mots bout-à-bout (ce produit n'est pas commutatif) ; le produit des deux mots *bonjour* et *madame*, pris dans cet ordre, sera ainsi *bonjourmadame*. On peut alors définir le produit de deux langages comme le produit des mots qui les composent :

$$L_1.L_2 = \{xy/x \in L_1 \ et \ x \in L_2\}$$

On peut aussi définir de façon évidente le carré, le cube, et plus généralement une puissance quelconque L^n d'un langage L.

Ces opérations sont toutes, en un sens, “finies”. Or il est souhaitable d'avoir des opérations non bornées : un texte français peut être arbitrairement long ! Il est donc souhaitable de disposer d'une opération permettant de faire un nombre arbitrairement grand de produits. On pose :

$$L^* = L^0 \bigcup L^1 \bigcup L^2 \bigcup \ldots = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

Attention, on commence à L_0, qui est le mot vide, élément neutre de la concaténation !

Il est naturel de penser que, si L_1 et L_2 sont des langages “simples”, alors leur union, leur intersection, leur produit, leur complémentaire et leur étoile le sont aussi. Comme il est aussi naturel de penser que les langages finis sont simples, on définit une classe de langages de la façon suivante :

Définition 29 *On appelle famille des langages rationnels la plus petite famille de langages qui contient tous les langages finis, et qui est fermée par union, intersection, complémentaire, produit et étoile*

Remarque : On retrouve une démarche typique de l'algèbre linéaire : on appelle sous-espace vectoriel engendré par une partie E le plus petit sous-espace tel que… ; on sait qu'un tel sous-espace peut aussi être décrit comme l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de E. Ici aussi, on peut remplacer une définition “par le haut” par une définition “par en bas”, comme langage engendré en partant de parties finies et en appliquant un nombre fini de fois les 5 opérations. Nous verrons plus bas, sous le nom d'expression régulière, comment on donne une telle définition d'un langage.

Remarque : Les 5 opérations ne sont évidemment pas toutes nécessaires : à partir de l'union et du complémentaire, on peut refabriquer l'intersection. On peut montrer, mais c'est plus difficile, que le complémentaire n'est pas non plus nécessaire. Les langages rationnels peuvent être complètement définis en utilisant seulement union, produit et étoile ; en particulier, il est toujours possible d'exprimer ainsi le complément d'un langage rationnel donné.

Il se trouve, et c'est ce qui montre l'importance de la notion, que les deux familles de langages simples que nous avons définies sont identiques. C'est le théorème fondamental, démontré par le logicien Kleene au début des années 50 :

Théorème 12 (Kleene) *Un langage est rationnel si et seulement si ce langage est reconnaissable.*

Les trois sections qui suivent sont consacrées à quelques indications sur la preuve de ce théorème.

5.4.3 Expressions régulières et langages rationnels.

Nous venons de voir que les langages rationnels peuvent être définis à partir des langages finis en utilisant un nombre fini de fois les opérations union, produit et étoile (les deux autres, complément et intersection, pouvant être construites à partir des trois premières).

En pratique, il est utile de rajouter une autre opération : si L est un langage, on définit

$$L^+ = L^1 \bigcup L^2 \bigcup \ldots = \bigcup_{n \geq 1} L^n$$

On vérifie facilement que $L^+ = L.L^*$.

Les *expressions régulières* sont des expressions qui permettent de spécifier un langage, en codant les ensembles finis de départ et les opérations qu'on effectue sur eux. Elles sont constitués de divers caractères : lettres de l'alphabet $\mathcal{A}$, ε (pour le mot vide), (,), *, +. Si r est une expression régulière, on note $L(r)$ le langage qui lui est associé.

Ces expressions sont définies récursivement ; si r et s sont des expressions régulières représentant les langages $L(r)$ et $L(s)$ alors :

- L'expression régulière ε représente le langage réduit au mot vide, $L^0 = \varepsilon$.
- L'expression régulière réduite à une lettre a représente le langage réduit au singleton a.
- $r + s$ est une expression régulière qui représente le langage $L(r) \bigcup L(s)$.
- rs est une expression régulière qui représente $L(r).L(s)$.
- r^* est une expression régulière qui représente $(L(r))^*$.
- r^+ est une expression régulière qui représente $(L(r))^+$.

On voit que, par définition, tout langage rationnel est représenté par une expression régulière. Remarquons qu'il n'est pas immédiatement évident de voir si deux expressions régulières définissent le même langage rationnel.

Notations : La notation $[c_1 - c_2]$ où c_1 et c_2 sont deux caractères, désigne tous les caractères dont les codes ASCII sont compris entre ceux des caractères c_1 et c_2. Par exemple $[a - z]$ désigne $a + b + c + \ldots + z$.

Quelques exemples d'expressions régulières :

- $0 + [1 - 9][0 - 9]^*$ est une expression régulière qui représente le langage L, ensemble des entiers naturels.
- $[a - z]([a - z] + [0 - 9])^*$ est une expression régulière qui représente le langage correspondant aux identificateurs des langages de programmation : suite de lettres ou de chiffres commençant par une lettre.

Remarque : Tous les éditeurs de textes évolués possèdent des fonctions de recherche permettant de trouver, non seulement des mots, mais des types de mots dans le texte. Les types de mots que l'on peut trouver sont exactement les expressions régulières. On explicite, avec une syntaxe semblable à celle que l'on vient de voir, une expression particulière, et le programme construit l'automate correspondant.

5.4.4 Automates déterministes et non déterministes

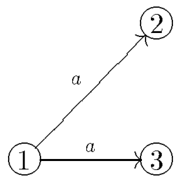
Nous allons continuer par un détour. Nous avons vu plus haut qu'il y a une structure un peu plus générale que les automates finis (déterministes) vus en cours, ce sont les automates quelconques, non forcément déterministes. Un mot est reconnu par un automate fini général s'il existe un calcul réussi pour ce mot. Cette notion semble d'un intérêt douteux. En effet, pour un automate fini qui n'est pas déterministe, il existe un nombre de calcul pour un mot donné qui croît exponentiellement vite avec la longueur du mot, et voir si l'un d'entre eux est réussi semble infaisable !

Remarquons cependant que tout automate fini déterministe est un cas particulier d'automate fini quelconque. Donc les langages reconnaissables par les automates finis déterministes forment évidemment un sous-ensemble de la famille des langages reconnaissables par un automate fini quelconque. La réciproque est beaucoup plus étonnante :

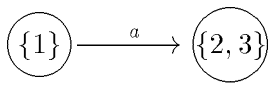
Théorème 13 *Si un langage est reconnaissable par un automate fini quelconque, alors il est reconnaissable par un automate fini déterministe.*

Démonstration : Sans rentrer dans les détails techniques, donnons le principe de la preuve, qui est une belle idée mathématique. Nous allons tenter de suivre tous les calculs possibles à la fois ! Pour ce faire, nous partons d'un automate quelconque, et nous allons le remplacer par un nouvel automate, dont les sommets sont des sous-ensembles de sommets du précédent.

Par exemple, supposons que nous sommes en face du fragment d'automate ci-dessous :



A partir de l'état 1, en lisant la lettre a, on peut partir au choix dans l'état 2 ou 3. Dans le nouvel automate, on va partir à la fois dans les deux, c'est-à-dire dans l'état nommé $\{2, 3\}$:



Ensuite, on regarde quel est le sous-ensemble des sommets où l'on peut aller en lisant la lettre b et en partant des états 2 ou 3, et ainsi de suite. Si l'automate initial avait un ensemble de sommets Q, on construit de la sorte un automate qui a pour sommet $\mathcal{P}(Q)$, et dans lequel, par construction, de chaque état part au plus une flèche avec une étiquette donnée. Il ne reste plus qu'à prendre, pour unique état initial de l'automate ainsi construit, l'ensemble uniquement déterminé des états initiaux de l'automate de départ, et comme états finaux, tous les ensembles d'états contenant un état final de l'automate de départ. ∎

La démonstration nous donne un peu plus que le théorème, puiqu'elle nous donne une façon de construire cet automate déterministe. Remarquons qu'en partant d'un automate quelconque à n états, on peut obtenir un automate détermiste à 2^n états, ce qui est vraiment plus gros : l'automate déterministe peut être vraiment plus cher. En raffinant un peu, on obtient mieux :

Théorème 14 *Soit L un langage reconnaissable. Il existe un automate déterministe unique, appelé automate minimal de L, qui possède le plus petit nombre d'états parmi les automates déterministes reconnaissant L, et tel que tout automate déterministe qui reconnaît L se projette sur cet automate minimal.*

Ce théorème a une conséquence importante. Comme on sait calculer explicitement l'automate minimal à partir d'un automate quelconque, il existe un algorithme effectif pour décider si deux automates reconnaissent le même langage. Il suffit de calculer les deux automates minimaux associés, et de les comparer.

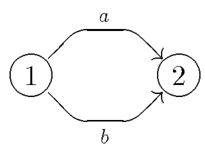
5.4.5 Quelques éléments de la preuve du théorème de Kleene

Il s'agit de montrer que tout langage reconnaissable est rationnel, et réciproquement. Nous allons pour cela utiliser les deux sections qui précèdent. Dans le premier sens, il suffit d'exhiber l'expression régulière correspondant à un automate fini donné. Pour la réciproque, il suffit de montrer que tout langage fini est reconnaissable, et que la famille des langages reconnaissables est fermé par union, produit, étoile et complémentaire. Elle contient donc, par définition, la famille des langages rationnels.

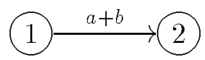
Tout langage reconnaissable est rationnel

Nous allons faire mieux : donner un algorithme qui passe d'un automate fini à une expression régulière décrivant le langage qu'il reconnaît.

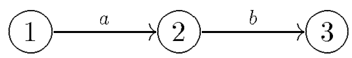
L'idée est de simplifier un automate en remplaçant les étiquettes par des expressions régulières. Il est clair que, si on a deux flèches avec les mêmes extrémités, on peut simplifier :



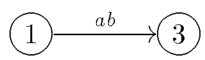
revient au même que :



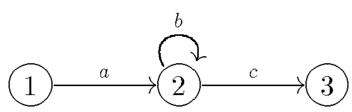
Si on a deux flèches qui se suivent, on peut les remplacer par le produit correspondant :



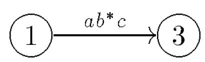
revient au même que :



Enfin, c'est le cas le plus compliqué (et le seul où l'on a des chemins de longueur non bornée), une boucle correspond à une étoile :



revient au même que :



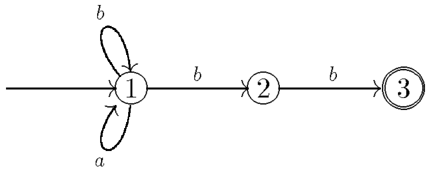
L'algorithme ne suppose pas que l'automate soit déterministe. On définit un automate généralisé comme un graphe ayant un seul état initial d et un seul état final f et dont les arcs sont étiquetés par des expressions régulières. Un mot m est reconnu par un automate généralisé, s'il existe un chemin allant de d à f tel que m appartient au langage décrit par la concaténation des expressions régulières étiquetant ce chemin. Le langage reconnu par un tel automate est l'ensemble des mots reconnus.

L'idée de l'algorithme est de transformer l'automate initial en un automate généralisé, puis d'appliquer des règles de réduction ci-dessus de manière à obtenir un automate généralisé équivalent (qui reconnaît exactement le même langage) ne possédant que les deux états d et f relié par un seul arc étiqueté une expression régulière. Cette expression régulière étant l'expression recherchée.

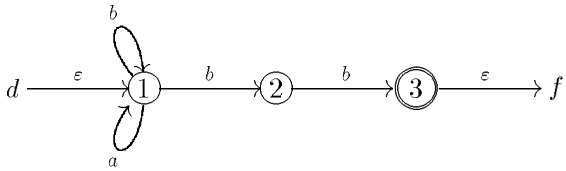
Etape 1 : On transforme l'automate A initial en rajoutant les états d et f et des ε-transitions de d vers l'état initial de A et des états finaux de A vers f.

Etape 2 : On applique les règles de reduction ci-dessus jusqu'à obtenir un automate généralisé n'ayant plus que les deux états d et f relié par un seul arc étiqueté par une expression régulière.

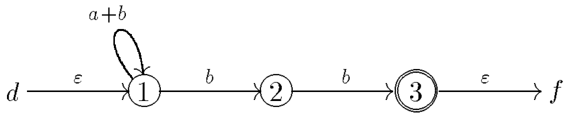
Plutôt que de donner les détails, montrons le fonctionnement de l'algorithme sur un cas particulier. On part de l'automate qui reconnaît les mots $\{a, b\}^*$ qui se terminent par deux b consécutifs.



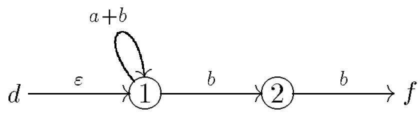
Après ajout des deux états d et f on obtient :



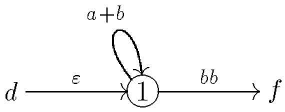
Après réduction des arcs de l'état 1 :



Suppression de l'état 3 :



Suppression de l'état 2 :



Et finalement après suppression de l'état 1 on obtient l'automate non déterministe :

$$d \xrightarrow{(a+b)^*bb} f$$

On voit bien que l'expression régulière obtenue décrit le langage reconnu par l'automate (il faudrait être un peu plus formel pour être rigoureux), et donc que tout langage reconnaissable est rationnel.

Tout langage rationnel est reconnaissable

Commençons par une trivialité :

Lemme 1 *Tout langage réduit à un seul mot est reconnaissable.*

Démonstration : Il suffit de résoudre l'exercice suivant :

Exercice 45 *Soit $X = x_1x_2\dots x_n$ un mot fini. Donner un automate qui reconnaît le mot X, et aucun autre.*

■

Passons à un résultat un peu plus difficile :

Proposition 12 *La réunion de deux langages reconnaissables est reconnaissable.*

Démonstration : On prend deux automates correspondants à ces langages. On peut supposer, quitte à les renommer, que leurs ensembles d'états sont disjoints. La réunion de ces deux automates est encore un automate ! Bien sûr, il n'est pas déterministe, puisqu'il a au moins deux états initiaux ; mais comme on vient de la voir, cela n'a pas de raison de nous géner, et il est clair que cet automate réunion reconnaît la réunion des deux langages. ■

On en déduit immédiatement par récurrence :

Proposition 13 *La réunion d'un nombre fini de langages reconnaissables est reconnaissable.*

Et donc, en utilisant le lemme du début :

Corollaire 3 *Tout langage fini est reconnaissable.*

Montrons maintenant :

Proposition 14 *Le produit de deux langages reconnaissables est reconnaissable.*

Démonstration : S'il n'y a qu'un état final, d'où ne part aucune transition, pour le premier automate, et qu'un état initial, où n'arrive aucune transition, pour le second, ce n'est pas compliqué : il suffit de mettre bout à bout les deux automates, en confondant l'état final du premier, et l'état initial du second. Le cas général est un peu plus technique ; il faut traiter à part le cas du mot vide, et montrer que tout langage reconnaissable qui ne contient pas le mot vide peut être reconnu par un automate normalisé du type ci-dessus. ■

On prouve de façon analogue :

Proposition 15 *L'étoile d'un langage reconnaissable est reconnaissable.*

Démonstration : Si l'automate est mis sous forme normalisée, comme ci-dessus, il suffit de le boucler, en confondant l'état initial et l'état final. Le cas général s'en déduit en normalisant l'automate.

■

Et pour finir :

Proposition 16 *Le complémentaire d'un langage reconnaissable est reconnaissable.*

Démonstration : Il suffit de prendre un automate déterministe qui reconnaît ce langage. On fabrique un nouvel automate, identique au précédent, sauf que les états finaux du second sont les états non finaux du premier. Comme l'automate est déterministe, un mot est reconnu par le second automate si et seulement si il n'est pas reconnu par le premier. On a bien trouvé un automate qui reconnaît le complémentaire du langage initial.

■

On a donc montré que la famille des langages reconnaissables contient tous les langages finis, et qu'elle est fermée par union, produit, étoile et complémentaire. Elle contient donc tous les langages rationnels, d'où le théorème de Kleene.

On pourra consulter les références [2] ou [11] pour une preuve détaillée.

Une autre méthode serait de prendre une expression rationelle, et de construire un automate qui la reconnaît. Cela revient en fait au même : on est amené à construire un automate pour une union, un produit, etc... Cette tâche est entièrement automatisable, et le logiciel LEX sous le système d'exploitation UNIX effectue exactement les étapes dont on vient de parler. Ce logiciel reçoît en entrée une expression régulière, et génère automatiquement l'automate déterministe capable de reconnaître le langage qui lui est associé.

Remarque : On a signalé plus haut que l'on n'a en fait pas besoin, pour les langages rationnels, du complémentaire, qui peut se réécrire dans ce cas en terme d'union, produit et étoile. Une façon de le prouver, pour éviter tout cercle vicieux, est de définir les langages rationnels uniquement en terme d'union, produit et étoile, de montrer comme ci-dessus qu'un langage est rationnel si et seulement si il est reconnaissable, puis d'utiliser le fait, prouvé ci-dessus, que si un langage est reconnaissable, son complémentaire l'est aussi pour en déduire que le complémentaire d'un langage rationnel est rationnel.

5.4.6 Une récréation mathématique : les suites automatiques

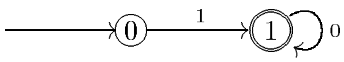
Il existe des ensembles de nombres qui sont très faciles à reconnaître en base 10. Il en est ainsi des puissances de 10, des nombres de la forme $10^n - 1$ (ils ne contiennent que des 9), des nombres pairs, et bien sûr des multiples de 9 (la somme de leurs chiffres est divisible par 9). Il en est de même des multiples de 11 (la somme alternée de leurs chiffres est divisible par 11 ; par exemple, 1562 est multiple de 11, puisque $2 - 6 + 5 - 1 = 0$ est divisible par 11. On peut trouver un critère semblable de divisibilité par 7 (je vous laisse chercher, il a période 6...).

Il y a par contre des ensembles qui sont plus compliqués à reconnaître ; on connaît en général bien les puissances de 2, mais êtes vous capable de reconnaître les puissances de 3 au-dela de la sixième ?

Il y a un moyen de formaliser cela :

Définition 30 *On dit qu'un ensemble de nombre est automatique en base p s'il existe un automate fini qui reconnaît l'écriture en base p des nombres de cet ensemble.*

Par exemple, l'automate suivant reconnaît les puissances de 10 en base 10 (et d'ailleurs, plus généralement, les puissances de p en base p).



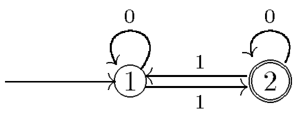
Le fait que la divisibilité modulo 9 ou 11 en base 10 se lise simplement sur les chiffres est un cas particulier de la proposition suivante :

Proposition 17 *Tout ensemble E périodique à partir d'un certain rang (c'est-à-dire tel qu'il existe un nombre k tel que, pour tout n assez grand, n appartient à E si et seulement si $n + k$ appartient à E) est automatique en toute base.*

Pour démontrer cette proposition, on étudie les puissances de la base p modulo la période k ; c'est forcément une suite périodique. Dans le cas particulier $p = 10$, $k = 9$, c'est même une suite constante, d'où la simplicité de ce critère.

Il existe bien sûr des suites périodiques en base p qui ne sont pas périodiques, comme les puissances de la base. Donnons un exemple plus curieux.

L'automate suivant défini un ensemble de nombres dont la fonction indicatrice est appelée la suite de Morse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:



Une autre manière de décrire cette suite est de dire que u_n est la somme des chiffres de n en base deux, modulo 2.

On calcule facilement les premiers termes 0110100110010110.... On pourra montrer que cette suite peut être engendré de nombreuses façon différentes. Par exemple, on remplace 0 par 01, 1 par 10, et l'on répète l'opération. Ou encore, en notant $\overline{U}$ le nombre obtenu à partir du mot U en remplaçant 1 par 0 et 0 par 1, on définit une suite de mots par $U_0 = 0$, $U_{n+1} = U_n\overline{U_n}$. Cette suite possède de nombreuses propriétés arithmétiques intéressantes.

Ce type de suite ne peut se voir que dans une base, à cause du théorème difficile suivant :

Théorème 15 (Cobham) *Un ensemble de nombres qui est automatique dans deux bases qui n'ont aucune puissance commune est périodique à partir d'un certain rang.*

En particulier, on ne peut trouver d'automate fini qui soit capable de reconnaître toutes les puissances de 2 ou de 3 en base 10 ; il y faut forcément une mémoire non bornée.

5.4.7 Un peu de bourbakisme

Si vous n'êtes pas persuadé que ce soit là des mathématiques aussi nobles et abstraites que l'algèbre usuelle, cette section est là pour vous en convaincre.

Si vous avez aimé la construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy, et la construction de $\mathbb{C}$ en quotientant l'anneau des polynômes par un idéal premier, alors l'informatique théorique est faite pour vous ! Reprenons d'abord quelques définitions.

Définition 31 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini, appelé alphabet. Le monoïde libre sur $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{A}^*$, est l'ensemble des suites finies à valeur dans $\mathcal{A}$, muni de l'opération de concaténation*

Rappelons qu'un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre. Par exemple, $\mathbb{N}$ est un monoïde. C'est la structure qui précède les groupes en algèbre : il lui manque les symétriques.

L'élément neutre de $\mathcal{A}^*$ est le mot vide (suite de zéro lettre), noté ε. On peut définir une application canonique $i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$, en associant à chaque lettre a la suite finie a. Le monoïde libre sur A a une propriété caractéristique :

Proposition 18 *Pour toute application $f : \mathcal{A} \to M$, où M est un monoïde, il existe un unique morphisme de monoïde $\phi : \mathcal{A}^* \to M$ tel que $\phi \circ i = f$.*

Un langage est une partie de $\mathcal{A}^*$. On peut associer à chaque langage une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}^*$:

Définition 32 *A tout langage L, on associe une relation sur $\mathcal{A}^*$, dite congruence syntaxique de L, par : $U \equiv V$ si et seulement si on a :*

$$(\forall X, Y \in \mathcal{A}^*)(XUY \in L) \Leftrightarrow (XVY \in L)$$

C'est-à-dire que U et V sont syntaxiquement équivalent si on peut remplacer l'un par l'autre au milieu d'un mot sans que cela change l'appartenance de ce mot à L.

On montre immédiatement :

Lemme 2 *La congruence syntaxique est une relation d'équivalence.*

et un peu plus difficilement :

Proposition 19 *La congruence syntaxique est compatible avec le produit de concaténation (c'est-à-dire que si $U \equiv V$ et $U' \equiv V'$, alors $UU' \equiv VV'$*

Dans ce cas, on sait bien que l'on peut munir de façon canonique l'ensemble quotient d'une opération, et on vérifie que cette opération en fait un monoïde.

Définition 33 *On appelle monoïde syntaxique de P le monoïde quotient de $\mathcal{A}^*$ par la congruence syntaxique de P*

On a alors une belle caractérisation des langages rationnels pour ceux qui aiment ce genre de choses :

Théorème 16 *Un langage est rationnel si et seulement si son monoïde syntaxique est fini.*

On a dans ce cas une caractérisation assez intuitive des classes d'équivalence : il s'agit de tous les mots qui joignent un état i à un état j dans l'automate minimal qui reconnaît le langage ; il est clair qu'ils sont tous interchangeables. Il existe une autre façon de présenter ce résultat :

Définition 34 *Etant donné un langage L est un mot U, on appelle quotient à gauche de L par U, et on note $U^{-1}L$, l'ensemble $U^{-1}L = \{V | UV \in L\}$*

On a alors une autre caractérisation :

Théorème 17 *Un langage est rationnel si et seulement si il n'a qu'un nombre fini de quotients à gauche.*

Les quotients à gauche sont en fait les états de l'automate minimal. Ils représentent en quelque sorte la quantité finie d'information dont la machine "se rappelle" une fois qu'elle a lu le mot X. Si deux mots X, X' ont même quotient pour L, cela veut dire qu'après les avoir lu en partant de l'état initial, l'automate minimal qui reconnaît L est dans le même état.

5.4.8 Une hiérarchie de langages

Nous avons étudié ici les langages les plus simples. Il est bien évident que les informaticiens ne s'en sont pas tenus là. Ils ont en fait défini toute une *hiérarchie de langages*, que l'on appelle, du nom de l'un de ses inventeurs (un linguiste), la hiérarchie de Chomsky.

Tout en bas, il y a les plus simples, les langages rationnels. Tout en haut, il y a les langages les plus complexes possibles, les langages récursivement énumérables. Ils ont été trouvés plus tôt, dans les années 30, et correspondent à tout ce qu'on peut effectivement calculer. Au milieu, nous citerons en particulier les langages algébriques, très utiles en informatique.

A toutes ces classes de langages, on peut faire correspondre des *machines* et des *grammaires*. Une grammaire est un ensemble de règles de transformations permettant de construire les mots du langage : on part des lettres de l'alphabet, et d'un nombre fini de symboles annexes dits non terminaux, une règle associe à un mot comprenant au moins un symbole non terminal un autre mot. L'idée est en quelque sorte de parodier les règles de grammaire du genre {Groupe Nominal} $\mapsto$ {Article}{Adjectif}{Nom}

Par exemple, la grammaire donnée par l'alphabet à deux symboles (et), un seul symbole non terminal X, et les deux règles $X \to \varepsilon$ et $x \to (X)X$ permet d'engendrer toutes les expressions bien parenthésées, telles que $(())()$.

- A la classe des langages récursivement énumérables correspond les machines de Turing, qui sont des ordinateurs universels, et des grammaires sans aucune restriction.

- Un peu au dessous dans la hiérarchie de Chomsky, on a les grammaires contextuelles, qui sont de la forme $UXV \to UMV$, où X est un symbole non terminal, M un mot non vide, et U et V deux mots quelconques. Le sens de cette règle est que l'on peut changer X en le mot non vide M s'il est encadré par U et V.

- Toujours en dessous, on a les grammaires indépendantes du contexte, ou algébriques, dont les règles sont de la forme $X \to M$ où M est un mot quelconque. Les langages correspondant sont dits algébriques, et sont reconnus par des automates à piles. Les langages de programmation sont des langages algébriques, dont la grammaire est toujours explicitement donnée. Il existe des programmes automatiques qui, à partir d'une grammaire algébrique, construisent l'automate à pile correspondant. C'est cet automate à pile qui, lors d'un essai de programmation, vous répond : "Syntax error in line 101". Il a lu le texte de votre programme, et reconnu qu'il n'appartient pas au langage algébrique considéré, en général faute d'une parenthèse ou d'un point-virgule.

- Enfin, au dernier cran, on a les règles de grammaire du type $X \to aY$ et $X \to \varepsilon$, où a est une lettre, et X, Y des symboles non terminaux. Les langages correspondants sont les langages rationnels, et les machines correspondantes les automates finis. En fait, les symboles non terminaux sont ici simplement les états, et la règle $X \to aY$ représente une transition de l'état X à l'état Y étiquetée par a.

5.4.9 Une autre généralisation : les automates avec sortie

Nous étions partis sur l'idée de traduire un texte, et nous nous sommes contentés de reconnaître si un mot appartient à un langage... Il serait bon d'avoir aussi des automates qui puissent exprimer quelque chose. De tels automates existent ; plutôt que d'en faire la théorie, nous donnerons juste un exemple. On en trouvera un autre, dû à Pascal, dans le prologue de [11]

Le graphe étiqueté ci-dessous permet de réaliser la multiplication par cinq d'un entier n. Son fonctionnement est un peu différent des exemples précédents. Il reçoit en entrée un nombre entier n dans sa représentation binaire et au fur et à mesure qu'il "épelle" les chiffres de la décomposition binaire il produit une suite de digits (les digits entre parenthèses à droite de la barre verticale) à chaque parcours d'un arc. Lorsque tous les digits de la décomposition binaire de n ont été examinés, la suite produite représente précisément le nombre $5n$. Un graphe étiqueté comme celui-ci qui produit du "code" est appelé un **transducteur**.

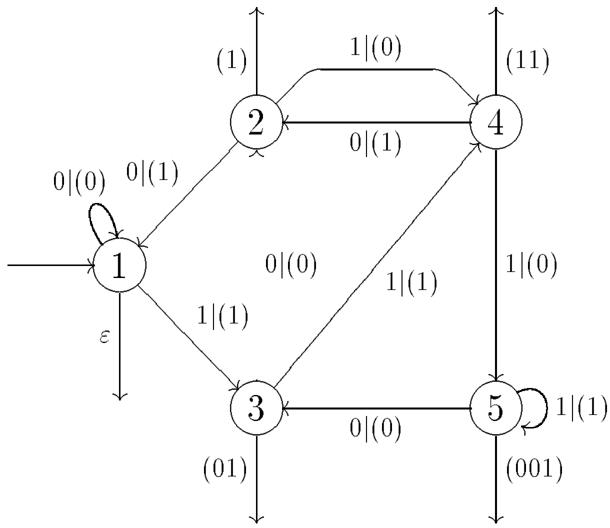


Figure 5.3: Un automate multiplicateur

En fait pour réaliser la multiplication par 5 on doit utiliser la représentation inverse. Par exemple, le nombre *onze* s'écrit en binaire 1011, on fournit donc au multiplicateur le mot 1101. Sur cet exemple son fonctionnement est le suivant. On démarre l'analyse à partir de l'état initial (état 1) indiqué par une flèche rentrante. On lit 1, on sort 1 et on se retrouve dans l'état 3. Ensuite on lit encore 1, on sort 1 et on arrive dans l'état 4. On lit ensuite 0, on sort 1 et on se retrouve dans l'état 2. On lit finalement 1, on sort 0 et on se retrouve en 4. Lorsque le dernier chiffre a été lu, on prend la flèche de sortie correspondant à l'état où l'on est arrivé (ici 4) et on sort la suite associée à cet arc (ici la suite 11). Le mot obtenu en sortie est donc 111011, en l'inversant on obtient
$110111 = \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0$
qui code l'entier 55, qui est bien égal à 5×11

5.4.10 Quelques utilisations des automates

En informatique on retrouve les automates dans de nombreux algorithmes : traitement de texte, compression de données, processus de compilation, modélisation des circuits et du temps réel, ... Ils sont aussi utilisés en linguistique, en mathématiques, en génétique (algorithmes liés au génome)

Signalons qu'aujourd'hui le concept d'automate est utilisé et étudié pour résoudre des problèmes de parallélisme et de synchronisation qui trouvent de nombreuses applications dans la commande de systèmes très complexes où un grand nombre d'informations doivent être traitées en temps réel.

De tels systèmes sont utilisés dans toutes les grandes réalisations industrielles : Airbus 330, Boing 767, TGV, fusées, centrales nucléaires, téléphonie, ...

5.5 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 34 :

- Les mots reconnus sont :"11","110".
- Liste des mots de quatre lettres reconnus par cet automate : "1100", "1101", "1110", "1111".
- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble de mots formés de 0 et de 1 commençant par deux 1 consécutif.

Solution de l'exercice 35 :

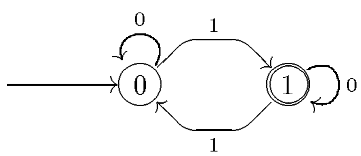
- Les mots reconnus sont :"000","001", "0011".
- Liste des mots de moins de quatre lettres reconnus par cet automate : "0", "1", "00", "01", "11", "000", "001", "011", "111".
- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble de mots formés de 0 et de 1 comportant des zéros suivis de 1 (0*1*).

Solution de l'exercice 36 :

- Les mots reconnus sont :"11","101", "110".
- Liste des mots de trois lettres reconnus par cet automate : "000", "011", "101", "110".
- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble de mots formés de 0 et de 1 qui comportent un nombre pair de 1.

Solution de l'exercice 37 :

- Automate reconnaissant les mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ayant un nombre impair de 1.



Solution de l'exercice 38 :

- Les mots reconnus sont :"11","110", "1010".
- Liste des mots de quatre lettres reconnus par cet automate : "0011", "0101", "0110", 1100", "1010", 1001".

- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble de mots formés de 0 et de 1 qui ne comportent que deux 1.

Solution de l'exercice 39 :

- Les mots reconnus sont :"010", "101010".
- Liste des mots de trois lettres reconnus par cet automate : "000", "100", "010", "001".
- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble de mots formés de 0 et de 1 qui ne comportent pas deux 1 consécutifs et qui se terminent par un 0.

Solution de l'exercice 40 :

- Les mots reconnus sont :"101","1011".
- Liste des mots de trois lettres reconnus par cet automate : "011", "101".
- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble de mots formés de 0 et de 1 qui comportent un seul 0 et qui se termine par un 1.

Solution de l'exercice 41 :

- Les mots reconnus sont :"11","1010", "1001".
- Liste des mots de quatre lettres reconnus par cet automate : "0000", "0011", "0101", "0110", "1100", "1010", 1001", "1111".
- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble de mots formés de 0 et de 1 qui comportent un nombre pair de 0, ainsi qu'un nombre pair de 1.

Solution de l'exercice 42 :

- Les mots reconnus sont :"0","105", "0.147", "12.050".
- Liste des mots de trois lettres reconnus par cet automate : "000", "011", "101", "110".
- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls et l'ensemble des nombres réels de la forme "nombre entier", suivi du point, suivi d'une suite non vide de chiffres.

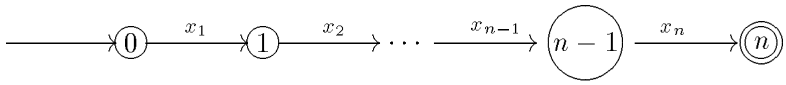
Solution de l'exercice 43 :

- La suite des états visités est : 0, 1, 1, 4("ni"), 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 4 ("ni"), 0, 1, 4 ("ni"), 0, 3, 6, 9, 12, 13("irene, rene"), 0, 1, 4 ("ni"),0, 1, 4 ("ni"), 1, 0.

Solution de l'exercice 44 :

- Le nombre 14 s'écrit en binaire 1110, son inverse est donc 0111 : on lit 0, on sort 0 et on se reste dans l'état 1. On lit 1, on sort 1 et on se retrouve dans l'état 3. On lit ensuite 1, on sort 1 et on est dans l'état 4. Finalement, on lit 1, on sort 0 et on va dans l'état 5. On sort de l'état 5 en produisant 001. On a produit la suite de chiffre : 0110001, l'inverse de cette suite est 1000110 et correspond à l'écriture binaire de $70 = 5 \times 14$.

Solution de l'exercice 45 : Le langage X est reconnu par l'automate suivant :



Chapitre 6

Graphes probabilistes

Dans ce chapitre, on étudie des exemples de graphes probabilistes, et on en fait la théorie complète dans le cas le plus simple, où il n'y a que deux états.

Les graphes probabilistes, aussi appelés chaînes de Markov, sont l'exemple le plus simple de dynamique probabiliste : on considère un sujet qui peut être dans un nombre fini d'états, et qui peut passer à chaque étape d'un état à un autre avec une probabilité qui ne dépend que de l'état dans lequel il est. Par exemple, une endémie peut se décrire par 3 états : non immunisé, immunisé et malade ; on observe l'évolution avec une certaine périodicité, et on suppose que les personnes en bonne santé non immunisées peuvent, avec une certaine probabilité, rester en bonne santé, ou au contraire, tomber malade, ou devenir immunisées ; de même, les personnes malades peuvent guérir, en étant immunisées ou non ; les personnes immunisées peuvent, avec une certaine probabilité, perdre leur immunité.

Ce modèle est très rudimentaire : on regarde uniquement le dernier état du sujet, en oubliant son histoire précédente (il est probable qu'une personne qui tombe malade pour la cinquième fois ne réagit pas de la même façon que celle qui tombe malade pour la première fois !) ; néammoins, il permet déjà d'obtenir des résultats intéressants, surtout quand on l'applique, non pas à un individu, mais à une population, donnée par un vecteur de répartition dans les divers états possibles.

Le résultat essentiel de ce chapitre est le théorème de convergence vers un état stationnaire, vrai dès qu'une puissance de la matrice associée a tous ses termes strictement positifs. Ce théorème sera démontré complètement pour deux états dans la deuxième section du chapitre.

Il est intéressant de remarquer l'analogie avec les problèmes de comptage de chemins : comme le nombre de chemins reliant deux sommets en n coups, la probabilité de passer d'un état à un autre en n coups se calcule, pour le même genre de raisons, à l'aide d'une puissance de matrice ; la matrice considérée n'est plus la matrice d'adjacence, mais la matrice de transition du graphe probabiliste.

6.1 Quelques exercices

Exercice 46 *Une évolution de population (Exercice du document d'accompagnement).*

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie. Sachant qu'en l'année 0 , un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1,2,5,10 ans.

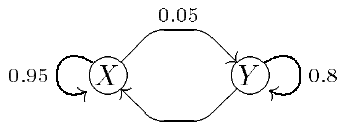
Que se passe-t-il si l'on suppose que 99% des habitants sont initialement en X ou en Y ? Ou que la population est également répartie entre les deux villes en l'année zéro ? Que constate-ton ?

Solution de l'exercice 46 : Commençons par nous demander à quelle condition les populations des deux villes sont stables. C'est intuitivement assez facile à calculer : il faut que les flux dans chaque sens s'équilibrent. Comme on part 4 fois plus facilement de Y que de X, il faut que la population de X soit 4 fois plus grande. Il faut donc qu'il y ait 200 000 habitants en Y et 800 000 en X ; dans ce cas, on voit que 40 000 habitants partent chaque année de chacune des deux villes vers l'autre, et la répartition globale ne change pas.

Mais que ce passe-t-il dans le cas général ? Comment évolue la répartition ? Appelons X_n (resp. Y_n) la population de la ville X (resp. Y) en l'année n. Quelles sont les populations l'année suivante ? L'énoncé nous dit que 95% des gens qui sont en X y restent, 5% partent en Y, et que 80% des gens qui sont en Y y restent, 20% partant en X. On peut donc représenter l'évolution par les équations :

$$X_{n+1} = 0,95X_n + 0,2Y_n \qquad Y_{n+1} = 0,05X_n + 0,8Y_n$$

Si l'on cherche la solution stable, le système dégénère, et l'on retrouve l'équation $0,05X = 0,2Y$, soit $X = 4Y$. En rajoutant l'autre information : $X + Y = 10^6$, on retrouve la population stable calculée ci-dessus. Dans le cas général, on peut schématiser l'évolution par le graphe très simple suivant :



où l'on a marqué, sur chaque arête joignant le sommet S au sommet S', la proportion de population qui passe à chaque étape de S à S'. Remarquons que, puisque la population ne peut disparaître ou apparaître, la somme des coefficients sur toutes les arêtes quittant le sommet S doit être 1.

Notons $P_n = \begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix}$ le vecteur ligne qui décrit la population de X et de Y au bout de n années. L'équation d'évolution trouvée ci-dessus peut se réécrire :

$$P_{n+1} = P_n M$$

où M, appelée *matrice de transition* du système est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}$$

Attention ! le produit ne se fait pas à droite de la matrice, comme on en a l'habitude, mais à gauche. Cela présente l'avantage de garder l'écriture des vecteurs en ligne, et c'est l'habitude en probabilité.

On calcule facilement à partir de cela la population P_n en fonction de P_0. En effet, on a $P_1 = P_0.M$, puis $P_2 = P_1.M = (P_0.M).M = P_0.M^2$. On peut donc imaginer que la formule générale est $P_n = P_0.M^n$, ce qui se montre facilement par récurrence : c'est vrai pour l'année 1. Supposons que ce soit vrai pour l'année n, alors on a $P_{n+1} = P_nM = (P_0.M^n).M = P_0.M^{n+1}$, donc c'est vrai pour l'année $n + 1$, d'où le résultat.

Si en l'année zéro, un quart des habitants sont en X , c'est que $P_0 = \begin{pmatrix} 250000 & 750000 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule pour n=1,2,5,10, on obtient :

$P_1 = P_0M = \begin{pmatrix} 250000 & 750000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 387500 & 612500 \end{pmatrix}$ et de même $P_2 = \begin{pmatrix} 490625 & 509375 \end{pmatrix}$. Puis, en arrondissant (car les nombres d'habitants sont des entiers !) on trouve que $P_5 = \begin{pmatrix} 669482 & 330518 \end{pmatrix}$, $P_{10} = \begin{pmatrix} 769028 & 230972 \end{pmatrix}$. Il est intéressant d'aller un peu plus loin que ce que demande l'énoncé ; on calcule facilement que $P_{30} = \begin{pmatrix} 799902 & 200098 \end{pmatrix}$, $P_{40} = \begin{pmatrix} 799994 & 200006 \end{pmatrix}$.

Si maintenant on change l'état initial, et que l'on suppose que la population de Y correspond au départ à 99% du total, on obtient : $P_0 = \begin{pmatrix} 10000 & 990000 \end{pmatrix}$, $P_1 = P_0M = \begin{pmatrix} 207500 & 792500 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 355625 & 644375 \end{pmatrix}$, $P_{10} = \begin{pmatrix} 755512 & 244488 \end{pmatrix}$, $P_{40} = \begin{pmatrix} 799992 & 200008 \end{pmatrix}$, tandis que si l'on suppose qu'au départ, c'est X qui contient 99% de la population , on obtiendra : $P_0 = \begin{pmatrix} 990000 & 10000 \end{pmatrix}$, $P_{10} = \begin{pmatrix} 810700 & 189300 \end{pmatrix}$, $P_{40} = \begin{pmatrix} 800002 & 199998 \end{pmatrix}$.

Enfin, pour une répartition initiale équilibrée, on obtient : $P_0 = \begin{pmatrix} 500000 & 500000 \end{pmatrix}$, $P_{10} = \begin{pmatrix} 783106 & 216894 \end{pmatrix}$, $P_{40} = \begin{pmatrix} 799997 & 200003 \end{pmatrix}$.

En conclusion, il semble bien que, quelle que soit la population de départ, on tende assez vite vers la population stable : à long terme, le système a sa propre logique, qui le conduit vers l'unique population stable, indépendamment de la position initiale. Si l'on veut agir à long terme sur ce système, ce n'est pas la position initiale qu'il convient de bouger, ce sont les coefficients de la matrice M, par exemple en rendant la ville Y plus agréable à vivre. Nous démontrerons cette convergence rigoureusement dans la section suivante.

Exercice 47 *L'allumeur de réverbère (exercice du document d'accompagnement).*

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité de $0,75$.

1) Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'états.

2) Au jour 0*, le réverbère est éteint. Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.*

3) Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Soit M *la matrice de transition associée à ce graphe.*

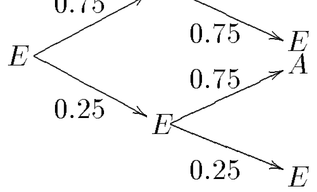
4) Vérifier que l'on a : $M = N - \frac{1}{2}R$*, où* $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *et* $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Calculer N^2*,* R^2*,* NR *et* RN*. En déduire* M^n*, pour* n *entier naturel supérieur ou égal à* 1.

5) Au jour 0*, le réverbère est allumé (resp. éteint). Calculer la probabilité* v_n*(resp.* u_n*) que le réverbère soit allumé (resp. éteint) au* n^{ieme} *matin. Déterminer la limite de* v_n*(resp.* u_n*) lorsque* n *tend vers l'infini.*

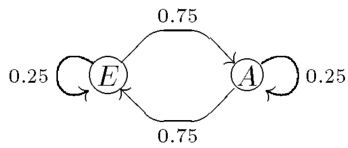
Solution de l'exercice 47 : 1) On observe que chaque matin, environ les trois quarts des réverbères changent d'état.

2) L'arbre décrivant les différentes possibilités de passage du jour zéro au jour 1 puis au jour 2 est le suivant :



Ainsi, la probabilité que le réverbère soit éteint le deuxième jour est $(0.75)^2 + (0.25)^2 = 0.625 = \frac{5}{8}$. la probabilité que le réverbère soit allumé le deuxième jour est donc $\frac{3}{8}$.

3) Le graphe probabiliste décrivant cette situation est :



4) En considérant les sommets E et A dans cet ordre, la matrice de transition associée est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

C'est à dire que, si l'on note u_n (resp. v_n) la probabilité que le réverbère soit éteint (resp. allumé) au jour n, on a : $\begin{pmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}.M$ ou encore, en notant $X_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = X_n.M$. Cette formule provient de la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements :$\{E_n, A_n\}$, où E_n désigne l'événement "le réverbère est éteint au jour n", tandis que A_n désigne l'événement "le réverbère est allumé au jour n".

On vérifie facilement que $M = N - \frac{1}{2}R$, que $N^2 = N$, $R^2 = R$, et que $NR = RN = 0$. Ensuite, on prouve par récurrence que pour tout entier naturel non nul on a :

$$M^n = N + \left(-\frac{1}{2}\right)^n R$$

en effet, la formule a été prouvée pour n=1 puisque $M = N - \frac{1}{2}R$. Si l'on suppose la formule vraie pour n, alors : $M^{n+1} = M^n M = \left(N + \left(-\frac{1}{2}\right)^n R\right)\left(N - \frac{1}{2}R\right) = N^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n RN - \frac{1}{2}NR + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} R^2$. Or on sait que $N^2 = N$, $R^2 = R$, et que $NR = RN = 0$. On obtient donc : $M^{n+1} = N + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} R$, ce qui est la propriété demandée, à l'ordre $n + 1$. Nous avons bien démontré le résultat cherché.

5) Si au jour 0 le réverbère est allumé, $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or $X_{n+1} = X_n.M$ donne par récurrence $X_n = X_0 M^n$, d'où en remplaçant : $X_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.\left(N + \left(-\frac{1}{2}\right)^n R\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Si par contre au jour 0 le réverbère est éteint, on a alors $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\left(N + \left(-\frac{1}{2}\right)^n R\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Dans tous les cas, la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est très facile à calculer, elle vaut $\frac{1}{2}$. On obtient donc la même limite $\frac{1}{2}$ pour u_n et v_n, quelle que soient les conditions de départ.

Exercice 48 *Un individu vit dans un lieu où il est susceptible de contracter une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois cas suivants : immunisé (I), malade (M), sain (c'est-à-dire ni malade ni immunisé) (S). D'un mois à l'autre, son état peut évoluer selon les règles suivantes :*

- *Etant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité de 0,1.*
- *Etant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité de 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité de 0,5.*
- *Etant malade, il peut le rester avec une probabilité de 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité de 0,8.*

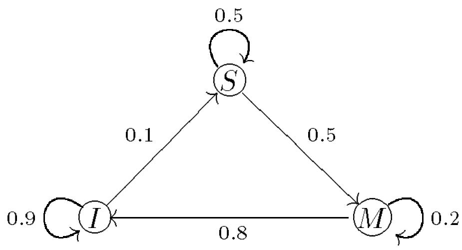
1) Tracer le graphe probabiliste qui décrit cette situation.

2) Calculer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, la probabilité que l'individu soit malade ou immunisé au bout de trois mois, six mois, un an, deux ans, dans chacune des situations suivantes :

- *au départ, il est immunisé.*
- *au départ, il est non malade et non immunisé.*
- *au départ, il est malade.*

3) Que peut on dire sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée au bout d'au moins une année ?

Solution de l'exercice 48 : 1) Le graphe probabiliste est :



2) En considérant les sommets dans l'ordre : I, M, S, la matrice de transition M associée à ce système est :

$$M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Notons $P_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$, u_n, v_n et w_n désignant les probabilités respectives que l'individu se trouve dans l'état I, M et S au bout de n mois. Nous avons $P_n = P_0 M^n$ (par récurrence sur n comme aux exercices 1 et 2, à partir de $P_{n+1} = P_n M$).

Si, au départ, l'individu est immunisé, on a $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule les probabilités P_n pour les états suivants en appliquant les puissances de la matrice M ; on obtient, à 10^{-5} près :

$P_3 = \begin{pmatrix} 0,769 & 0,08 & 0,151 \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} 0,75392 & 0.09481 & 0.15127 \end{pmatrix}$,

$P_{12} = \begin{pmatrix} 0,75472 & 0.09434 & 0.15094 \end{pmatrix}$, $P_{24} = \begin{pmatrix} 0.75472 & 0.09434 & 0.15094 \end{pmatrix}$.

On lit directement les probabilités cherchées dans ces résultats : la probabilité d'être immunisée est la première composante du vecteur, la probabilité d'être malade la deuxième.

De même, si au départ l'individu est dans l'état S, c'est que $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient alors :

$P_3 = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.195 & 0.165 \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} 0.75844 & 0.09273 & 0.14883 \end{pmatrix}$,
$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.75471 & 0.09434 & 0.15095 \end{pmatrix}$, $P_{24} = \begin{pmatrix} 0.75472 & 0.09434 & 0.15094 \end{pmatrix}$.
Si maintenant l'individu est malade au départ, c'est que $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On obtient alors :
$P_3 = \begin{pmatrix} 0.824 & 0.048 & 0.128 \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} 0.75513 & 0.09318 & 0.15169 \end{pmatrix}$,
$P_{12} = \begin{pmatrix} 0.75472 & 0.09434 & 0.15094 \end{pmatrix}$, $P_{24} = \begin{pmatrix} 0.75472 & 0.09434 & 0.15094 \end{pmatrix}$.

3) On remarque que les vecteurs P_n se stabilisent très vite ; un changement d'état initial entraîne une variation inférieure à 10^{-2} pour P_6, et une variation inférieure à 10^{-5} pour P_{12}, qui est, à 10^{-5} près, égal à P_{24}. En particulier, la probabilité qu'un individu soit malade au bout de une ou deux années est de 0.09434 avec une erreur inférieure à 0.00001, et ce, quel que soit l'état initial.

Rappelons-nous qu'il s'agit de données sanitaires, pour lesquelles une précision de 3 chiffres significatifs est illusoire. On peut donc dire que, quel que soit l'état initial de la population, il y aura au bout d'une année entre 9% et 10% de la population atteint par cette maladie.

Une fois de plus, ceci correspond à l'application du théorème de Perron-Frobenius (voir en 6.4).

Moralité : ce n'est pas l'état initial qui compte, pour maîtriser une telle maladie. Ce sont les probabilités de passage d'un état à l'autre qui déterminent la position limite, et la rapidité de convergence vers cet état limite. Ceci a des conséquences pratiques : si l'on veut améliorer l'état général de la population, une action ponctuelle ne donne pas de résultat à long terme. Ce qui est important, c'est de changer les caractéristiques du système (les coefficients de la matrice) : vaccination, amélioration des conditions sanitaires (par exemple, eau potable), lutte contre les insectes.

6.2 Récapitulation : les définitions et résultats

6.2.1 Généralités : graphes probabilistes à p états

On considère un système qui peut se trouver dans p états $1, 2, \ldots, p$, avec une certaine probabilité, variable au cours du temps, pour chaque état. On s'intéresse à l'évolution de ce système au cours du temps, et on fait l'hypothèse que la probabilité de transition de l'état i à l'état j est indépendante du temps, et ne dépend pas de l'histoire antérieure, mais seulement de l'état dans lequel on se trouve.

De bons exemples de tels sytèmes sont donnés par les jeux de hasard, tels que jeu de l'oie, Monopoly, jacquet, petits chevaux, etc. Pour de tels jeux, l'état est donné par la case sur laquelle on se trouve ; la façon dont on y est arrivé n'a pas d'importance pour la suite du jeu. Les systèmes qu'on observe dans la vie réelle sont en général beaucoup plus complexes, mais l'approximation simple qu'on en fait ici (comme dans le dernier des exercices précédents) donne souvent des indications utiles ; ce type de modèle est utilisé en pratique dans un grand nombre de situations, avec de bons résultats.

On peut représenter un tel système par un graphe orienté, dont les sommets sont les états du systèmes, et où l'on associe à chaque transition, de l'état i à l'état j, une arête orientée allant de i vers j, étiquetée par la probabilité de transition, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n. Remarquons que l'on peut rester dans un même état : le graphe peut avoir des boucles.

Définition 35 *On appelle* graphe probabiliste *un graphe orienté, tel que pour chaque couple de sommets (i, j) distincts ou confondus il existe au plus une arête de i vers j, et où chaque arête est* *étiquetée par un réel $p_{i,j}$ compris entre 0 et 1, la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet étant égale à 1.*

De même qu'à un graphe (orienté ou non), on associe une matrice d'adjacence A, dont le terme $a_{i,j}$ compte le nombre d'arêtes joignant le sommet i au sommet j, on peut associer à un graphe probabiliste une matrice qui décrit les probabilités de transition :

Définition 36 *Etant donné un graphe probabiliste à p sommets, on appelle* matrice!de transition *associée la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ à p lignes et p colonnes, dont le coefficient $m_{i,j}$ est l'étiquette de l'arête orientée de i vers j si elle existe (c'est-à-dire la probabilité de transition de i à j), et* 0 *sinon.*

Définition 37 *On appelle* matrice!stochastique *une matrice carrée dont tous les coefficients sont compris entre 0 et 1, et telle que la somme de chaque ligne est égale à* 1.

Les matrices stochastiques jouent un rôle fondamental en probabilité ; il est facile de voir que la matrice de transition d'un graphe probabiliste est toujours une matrice stochastique.

On veut étudier l'évolution d'un tel système au cours du temps ; on note X_n le vecteur ligne à p éléments dont l'élément d'ordre j est la probabilité que le système se trouve à l'instant n dans l'état j (Attention aux indices ! on a ici une suite de vecteurs lignes, avec chacun p composantes !). La propriété fondamentale est la suivante :

Lemme 3 *Pour tout entier n, on a $X_{n+1} = X_n.M$*

Démonstration : Posons $X_n = (a_1, \ldots, a_p)$, et $X_{n+1} = (b_1, \ldots, b_p)$, et notons A_j l'évènement "le système est dans l'état j à l'instant n", et B_i l'évènement "le système est dans l'état i à l'instant $n+1$".

En notant P la probabilité, on a par définition $b_i = P(B_i)$. Puisque les A_j forment un système complet d'évènements, on a $P(B_i) = \sum_{j=1}^{p} P(B_i \cap A_j)$. Mais, par définition de la probabilité conditionnelle, on a $P(B_i \cap A_j) = P(A_j)P(B_i|A_J)$; cette dernière probabilité conditionnelle n'est autre que le terme $m_{j,i}$ de la matrice de transition M.

On en déduit :

$$b_i = \sum_{j=1}^{p} a_j m_{j,i}$$

qui est exactement l'expression, sur les composantes, de la formule $X_{n+1} = X_n.M$. ■

On en déduit immédiatement par récurrence :

Proposition 20 *Pour tout entier $n > 0$, on a : $X_n = X_0.M^n$*

Cette formule, qui permet de calculer la répartition de probabilités au temps n si on la connaît au temps 0, est fondamentale pour tous les exercices. Un cas particulièrement intéressant est celui où la répartition de probabilité est stable au cours du temps.

Définition 38 *On appelle* état stable *un vecteur ligne $X = (x_1, \ldots, x_p)$ à p composantes $x_i \geq 0$ tel que $X = XM$ et $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$.*

La dernière condition ($\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$) est dû au fait que X représente une répartition de probabilité.

Remarque : Attention au vocabulaire ! on emploie le mot "état" dans deux sens : d'abord comme l'une des positions possibles du système, correspondant à l'un des sommets du graphe, puis, comme ici, comme une répartition de probabilité entre les différents sommets du graphe. Si l'on pense à l'exercice 48, chaque individu peut se trouver dans 3 états, immunisé, malade ou sain, et une population peut se trouver dans une grande quantité d'états, correspondant à une certaine répartition entre les 3 catégories ; l'un de ces états est privilégié, c'est l'état stable, correspondant à une répartiton entre gens immunisés, malades et sains qui est invariante au cours du temps (même si les individus, eux, changent d'état : les changements individuels se compensent au sein de la population).

Si, à un instant n, le système arrive en un état stable X_n, alors le système reste dans cet état : pour tout entier $n' \geq n$, on a $X_{n'} = X_n$ (par récurrence). Cela explique le nom : si l'on arrive dans un état stable, on y reste.

Remarquons que la recherche d'un état stable n'est pas difficile en pratique : il s'agit de résoudre l'équation $X = X.M$, et d'en chercher une solution satisfaisant $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$, ce qui se fait sans problème pour une matrice stochastique M donnée. Nous avons vu, au tout début du premier exercice, l'interprétation de cette équation : pour obtenir un état stable, il faut que toutes les transitions s'équilibrent ; si l'on considère le problème comme une évolution de population, il faut que, pour tout état i, la quantité de personnes qui quittent l'état i à chaque étape soit égale à la quantité de personnes qui y arrivent.

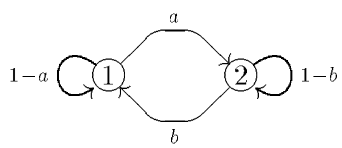
Ce qui est moins évident, c'est qu'un tel état existe, et qu'il soit unique. Ce qui se passe quand on ne part pas d'un état stable n'est pas évident non plus. Nous allons l'étudier en détail dans le cas d'un système à deux états, cas qui est accessible au niveau de la terminale.

6.2.2 Un cas particulier : les graphes probabilistes à 2 états

On suppose qu'il n'y a que deux états, notés 1 et 2. On note u_n (resp. v_n) la probabilité qu'à l'instant n, le système se trouve dans l'état 1 (resp. 2). L'événement correspondant sera noté : $E_{1,n}$ (resp. $E_{2,n}$). Pour tout entier n, on note X_n le vecteur-ligne à deux colonnes, $X_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$; remarquons que l'on a toujours $u_n + v_n = 1$.

On note a la probabilité de transition de l'état 1 à l'état 2, $a = P(E_{2,n+1}/E_{1,n})$, et b la probabilité de transition de l'état 2 à l'état 1, $b = P(E_{1,n+1}/E_{2,n})$. Un raisonnement facile nous donne les probabilités de demeurer dans l'état 1 ou dans l'état 2 : $P(E_{1,n+1}/E_{1,n}) = 1 - a$, $P(E_{2,n+1}/E_{2,n}) = 1 - b$.

Le système peut donc être représenté par le graphe probabiliste suivant :



et la matrice stochastique correspondante est :

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Les nombres a et b sont tous deux compris entre 0 et 1 ; il y a quelques cas triviaux que l'on peut traiter à part. Si a et b sont nuls, M est la matrice identité, et tous les états sont stables. Ce n'est pas étonnant, puisqu'il est impossible de changer ! Si l'un des deux seulement est nul, par exemple a, on voit que l'on finit toujours par arriver dans l'état 1. C'est le cas d'une population qui ne se renouvelle pas, et dont les individus peuvent être dans deux états, vivants (état 2) ou morts (état 1) : à long terme, la population ne sera plus composée que de morts. On parle alors d'état absorbant. Enfin, si les deux coefficients sont égaux à 1, le système “clignote” : il oscille sans se stabiliser entre l'état 1 et l'état 2, et se retrouve tous les deux coups dans le même état.

Ces cas particuliers étant faciles à étudier, et peu intéressants, on supposera désormais que a et b sont strictement positifs, et ne sont pas tous deux égaux à 1.

Par application du lemme 3, on a : $X_{n+1} = X_n M$. Refaisons le raisonnement dans ce cas simple : la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{E_{1,n}, E_{2,n}\}$ donne : $\mathrm{P}(E_{1,n+1}) = P(E_{1,n+1}/E_{1,n}).P(E_{1,n}) + P(E_{1,n+1}/E_{2,n}).P(E_{2,n})$, soit : $u_{n+1} = (1-a)u_n + bv_n$, et de même, $v_{n+1} = au_n + (1-b)v_n$. En écriture matricielle, on a bien : $X_{n+1} = X_n M$.

On en déduit comme ci-dessus $X_n = X_0 M^n$, pour tout entier naturel n. Il s'agit donc de calculer la matrice M^n. C'est assez facile dans le cas des matrices d'ordre 2, grâce au lemme suivant:

Lemme 4 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, *avec* a, b *strictement positifs. Posons* $c = 1 - a - b$, $\alpha = \frac{a}{a+b}$, $\beta = \frac{b}{a+b}$, *et définissons 2 matrices* N *et* R *par :*

$$N = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout entier naturel n, *on a :*$M^n = N + c^n R$

On montrera en annexe comment expliquer l'apparition des matrices N et R.

Démonstration : Par récurrence sur n.

L'initialisation est immédiate : pour $n = 1$, la relation à prouver est : $M = N + cR$, que l'on vérifie immédiatement par le calcul (exercice à faire faire aux élèves; on pourra leur faire remarquer que $\alpha + \beta = 1$, et $(a+b)\alpha = a$, $(a+b)\beta = b$).

On démontre ensuite facilement que les matrices R et N ont des propriétés bien particulières : d'une part, le calcul montre immédiatement que $NR = RN = 0$. D'autre part, ce sont des matrices de projections ; en effet, en utilisant la relation $\alpha + \beta = 1$, on a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(\alpha+\beta) & \alpha(\alpha+\beta) \\ \beta(\alpha+\beta) & \alpha(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = N,$$

et de même,

$$R^2 = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha+\beta) & -\alpha(\alpha+\beta) \\ -\beta(\alpha+\beta) & \beta(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R.$$

De $N^2 = N$ et $R^2 = R$, on déduit facilement $N^k = N$ et $R^k = R$ pour tout entier $k > 0$. On en déduit que, pour tout entier naturel $n > 0$, on a $M^n = N + c^n R$. L'initialisation a été faite ci-dessus pour $n = 1$; supposons la formule vraie à l'ordre n, alors on a $M^{n+1} = M.M^n = (N + cR).(N + c^n R) = N^2 + c^n NR + cRN + c^{n+1}R^2 = N + c^{n+1}R$ d'après les propriétés de R et N, et la formule est vraie à l'ordre $n+1$. Donc elle est vraie pour tout entier $n > 0$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat général suivant :

Théorème 18 *Considérons un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition* $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ *telle que* $0 < a+b < 2$.

Alors, le système se stabilise vers la position d'équilibre $\left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$, *indépendamment de l'état initial.*

Démonstration : La condition $0 < a+b < 2$ élimine les deux cas triviaux $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (identité) et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (clignotant) vus plus haut.

Nous allons calculer les coefficients u_n et v_n du vecteur X_n, en utilisant le lemme précédent, et le fait que $u_0 + v_0 = 1$. Il suffit de remplacer, dans la formule $X_n = X_0 M^n$, M^n par $N + c^n R$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_0 & v_0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + c^n \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} u_0 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta + c^n\alpha & \alpha - c^n\alpha \\ \beta - c^n\beta & \alpha + c^n\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (u_0+v_0)\beta + c^n(\alpha u_0 - \beta v_0) & (u_0+v_0)\alpha + c^n(-\alpha u_0 + \beta v_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta + c^n(\alpha u_0 - \beta v_0) & \alpha + c^n(-\alpha u_0 + \beta v_0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

.

Puisque, par hypothèse, on a $0 < a+b < 2$, le réel c est strictement compris entre -1 et $+1$. Donc la valeur absolue de c est strictement inférieure à 1, et la suite géométrique c^n converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Or la formule ci-dessus se réécrit :

$$\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \end{pmatrix} + c^n \begin{pmatrix} \alpha u_0 - \beta v_0 & -\alpha u_0 + \beta v_0 \end{pmatrix}$$

Puisque c^n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, les composantes du deuxième vecteur tendent vers zéro quand n tend vers l'infini. La limite de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$, est donc $\beta = \frac{b}{a+b}$, celle de v_n est $\alpha = \frac{a}{a+b}$. Ces limites sont indépendantes des conditions initiales u_0 et v_0.

Nous avons bien démontré le théorème annoncé.

■

Ce résultat est un cas particulier d'un théorème plus général : le théorème de Perron-Frobenius, voir dans les compléments.

Remarque : On peut retrouver l'état limite stable par le raisonnement élémentaire fait dans le premier exercice : pour qu'une répartion de probabilité $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$ soit stable, il faut que le flux de l'état 1 à l'état 2, ua, soit égal au flux en sens inverse vb ; on a donc une équation $ua = vb$. Comme c'est une répartition de probabilité, on doit aussi avoir $u + v = 1$. En résolvant le système

$$\begin{cases} ua &= vb \\ u+v &= 1 \end{cases}$$

on retrouve la solution ci-dessus.

6.2.3 Cas général : évolution vers un état stable

Que peut-il se passer quand il y a plus d'états ? Voici un exemple qui montre le problème que l'on peut rencontrer. On place un cavalier sur un échiquier, puis on joue en tirant au hasard, de façon équiprobable, l'une de ses possibilités de déplacement (il en a entre 8 s'il est au centre et 2 s'il est dans un coin). Si l'on joue un grand nombre de fois, est-ce que sa probabilité de présence sur une case donnée finit par se stabiliser ? Sûrement pas ! Si le cavalier a commencé sur une case blanche, il sera sur une case noire après tous les coups impairs, et sur une case blanche après tous les coups pairs. Donc sa probabilité de passer d'une case blanche à une case blanche en un nombre impair de coup est nulle, pour une raison combinatoire. Toutes les puissances de la matrice de transition de ce système ont la moitié de leurs coefficients nuls. On dit qu'on a un cycle (ici de longueur 2) entre des familles d'états.

Si l'on n'a pas ce problème, alors la répartition se stabilise exponentiellement vite vers un état stable. On pourra faire constater sur des exemples (comme le dernier exercice ci-dessus) cette stabilisation, et énoncer le théorème suivant, qu'il n'est pas question de prouver :

Théorème 19 *Soit un graphe probabiliste à n états, de matrice de transition M. S'il existe une puissance M^k de M dont tous les coefficients sont strictement positifs, alors il existe un seul état stable X, vérifiant $X = X.M$, et quel que soit l'état initial, le système converge exponentiellement vite vers l'état stable.*

Nous verrons dans les compléments que ce théorème est une conséquence du théorème de Perron-Frobenius.

6.3 Quelques exercices additionnels

Les exercices suivants permettent d'exercer les élèves à trouver la modélisation d'une situation donnée, la matrice associée, et constater la convergence vers un état stable.

Exercice 49 *On s'intéresse à la progression d'un jeton sur un plateau de jeu circulaire constitué par 6 secteurs circulaires numérotés de 1 à 6, dans le sens trigonométrique. Le joueur tire dans une urne, successivement avec remise une boule parmi trois identiques au toucher, numérotées de 1 à 3. Il répète l'opération deux fois de suite. Il note la somme S des chiffres obtenus et avance son pion d'autant de cases, en tournant dans le sens trigonométrique, et en entrant dans le plateau de jeu par la case numérotée 1. Par exemple, si la somme des numéros tirés est 3, il ira se positionner en case 3. Si la somme est 6, il ira se positionner en 6. Ensuite, il recommence, en repartant de la case d'arrivée au coup précédent, étant bien entendu que la case 1 suit la case 6.*

1) Expliquer comment on pourrait réaliser ce tirage au hasard avec des dés usuels, au lieu de boules numérotées, et établir la loi de probabilité de S.

2) Dessiner le graphe probabiliste correspondant, et écrire la matrice de transition du système, notée M.

On notera $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ les probabilités respectives que le joueur se trouve en case 1, 2, 3, 4, 5, 6 après le $n^{ième}$ coup, et X_n le vecteur ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n \end{pmatrix}$, pour $n \geq 1$.

3) Calculer X_0, X_1, puis quelques puissances de M et quelques termes de la suite X_n. Que constatez-vous ?

Faites une conjecture quant à la limite de X_n, lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 50 *On reprend le même principe qu'à l'exercice 1, avec huit cases au lieu de 6 :*

Le plateau de jeu a maintenant 8 secteurs circulaires numérotés de 1 à 8. Le joueur tire deux fois de suite dans une urne, avec remise, une boule parmi trois identiques au toucher, numérotées de 1 à 3. Il note la somme S des chiffres obtenus et avance son pion d'autant de cases, en tournant dans le sens trigonométrique, et en entrant dans le plateau de jeu par la case numérotée 1. Ensuite, il recommence, en repartant de la case d'arrivée au coup précédent, étant bien entendu que la case 1 suit la case 8.

1) Etablir la loi de probabilité de S.

2) Ecrire la matrice de transition M du système.

3) En notant $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n$ les probabilités respectives que le joueur se trouve sur les case 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 après le $n^{ième}$ coup, et en appelant X_n le vecteur ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n & g_n & h_n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$, calculer les premiers termes de la suite X_n. Que constatez-vous ?

Faites une conjecture quant à la limite de a_n, b_n, c_n , d_n, e_n, f_n, g_n, h_n lorsque n tend vers l'infini.

Ces exercices admettent d'innombrables variantes; on pourrait, par exemple, utiliser un ou deux dés à 6 valeurs, au lieu de deux dés à trois valeurs. On pourrait aussi modifier le nombre d'états. Une variante qui compliquerait considérablement le jeu serait de varier les probabilités de transition suivant l'état obtenu : si les exercices précédents se traitent facilement, c'est qu'ils sont très symétriques, et donc la matrice s'écrit rapidement.

Un grand nombre de jeux usuels sont très proches de graphes probabilistes. Le jeu de l'oie classique n'est rien d'autre qu'une chaîne de Markov à 63 états (en fait un peu plus, car il faut rajouter des états pour formaliser une case comme la prison), dont les probabilités de transition sont très différentes suivant les états. Le jeu du Monopoly contient une chaîne de Markov (le déplacement du pion sur le tableau), même s'il ne se réduit pas à cette chaîne de Markov, puiqu'il faut aussi prendre des décisions d'achat et de construction.

Exercice 51 *On considère un graphe probabiliste à 4 sommets numérotés de 1 à 4, de matrice de transition :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

1) Dessiner le graphe.

2) Calculer les premières puissances successives de M.

3) On note a_n, b_n, c_n, d_n les probabilités respectives que le système soit en 1, 2, 3, 4 après l'étape n, et X_n le vecteur ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 0$. Calculer les premières valeurs de X_n en fonction de X_0.

4) Montrer que le système semble évoluer vers un état d'équilibre à préciser, et ce, quel que soit l'état initial.

5) Que devient le résultat précédent si l'on remplace la matrice M par la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

le reste étant inchangé ?

Représenter le nouveau graphe.

6.4 Compléments pour les enseignants

6.4.1 Terminologie

Comme dans les chapitres précédents, on a parlé de graphe probabiliste pour réduire le vocabulaire au minimum.

Il faut savoir que les probabilistes ne parlent pas de graphe probabiliste, mais de *chaîne de Markov*. La matrice associée est dite matrice de transition.

L'habitude a été prise depuis longtemps de travailler sur des matrices stochastiques, telles que la somme des coefficients de chaque ligne est 1. Cela oblige à utiliser des vecteurs lignes, et à les multiplier à droite par les matrices de transition, contrairement à l'habitude du secondaire.

On s'intéressera particulièrement ici aux chaînes de Markov *primitives*, c'est-à-dire telles que leur matrice de transition possède une puissance dont tous les termes sont strictement positifs.

6.4.2 Retour sur le cas de deux états: valeurs propres, vecteurs propres

Le calcul qui a été fait dans le cas d'un graphe probabiliste à deux états devient très naturel si on réfléchit en termes de valeurs propres et de vecteurs propres. Le problème se réduit en fait à calculer une puissance arbitraire de la matrice M. On sait que pour cela, le plus simple est, si possible, de diagonaliser M par changement de base, puisqu'il est facile de calculer explicitement une puissance quelconque d'une matrice diagonale.

Or il est facile de voir que M est diagonalisable. Un petit calcul montre que son déterminant est $1 - a - b$. D'autre part, le fait que M soit une matrice stochastique implique que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre à droite, associé à la valeur propre 1. On en déduit que 1 est valeur propre à gauche aussi, et le déterminant étant le produit des deux valeurs propres, l'autre valeur propre est $1 - a - b$, qui est, par hypothèse, strictement plus petite que 1 en valeur absolue. M a donc deux valeurs propres distinctes, et est diagonalisable.

Il n'est pas nécessaire de faire le changement de base. Plus simplement, on peut commencer à calculer un vecteur propre à gauche v_1 associé à la valeur propre 1, et un vecteur propre à gauche v_2 associé à la valeur propre $1 - a - b$.

Dans le premier cas, on est conduit au système :

$$\begin{cases} (1-a)u + bv = u \\ au + (1-b)v = v \end{cases}, \text{ soit encore } \begin{cases} -au + bv = 0 \\ au - bv = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, v_1 est un multiple de (b, a).

Pour la valeur propre $1 - a - b = c$, on obtient le système :

$$\begin{cases} (1-a)u + bv = (1-a-b)u \\ au + (1-b)v = (1-a-b)v \end{cases} \text{ soit encore : } \begin{cases} bu + bv = 0 \\ au + av = 0 \end{cases}$$

Donc v_2 est un multiple de $(1, -1)$ (rappelons que ces systèmes de deux équations à deux inconnues ont une infinité de solutions car ils sont dégénérés, comme il arrive toujours quand on cherche un vecteur propre: c'est la condition d'annulation du déterminant du système qui permet de calculer les valeurs propres).

Comme (v_1, v_2) est une base du plan, tout vecteur v peut s'écrire sous la forme $v = \lambda v_1 + \mu v_2$, et on voit immédiatement que:

$$v.M^n = \lambda v_1 + (1-a-b)^n \mu v_2$$

Or λv_1 est la projection de v sur la droite engendrée par v_1 parallèlement à la droite engendrée par v_2. Un petit calcul montre que la matrice de cette projection n'est autre que N; la propriété $N^2 = N$ vue ci-dessus est d'ailleurs caractéristique d'une projection. On a donc $\lambda v_1 = v.N$. De même, μv_2 est la projection de v sur la droite engendrée par v_2 parallèlement à la droite engendrée par v_1, et le calcul montre que λv_2 est donnée par l'autre projection R.

On retrouve donc la formule :

$$v.M^n = v.N + (1-a-b)^n v.R$$

qui donne l'évolution de l'état en fonction du temps. On a en prime une interprétation des propriétés $N^2 = N$, $R^2 = R$, qui veulent dire que ce sont des projections, et $NR = RN = 0$, qui veulent dire qu'elles sont complémentaires, le noyau de l'une étant l'image de l'autre.

6.4.3 Le théorème de Perron-Frobenius

On aimerait généraliser les résultats précédents à une matrice stochastique de taille quelconque. Il faut donc pouvoir décrire les valeurs propres et les vecteurs propre de cette matrice. On a des informations assez précises si tous les termes de la matrice sont strictement positifs, ou plus généralement, si la matrice est *primitive.*

Définition 39 *On dit qu'une matrice est* primitive *si et seulement si elle admet une puissance dont tous les termes sont strictement positifs.*

On dispose d'un théorème puissant, valable pour les matrices primitives (il n'est pas nécessaire que la matrice soit stochastique)

Théorème 20 (Perron-Frobenius) *Soit A une matrice primitive à d lignes et d colonnes. Elle admet une valeur propre réelle $\lambda > 0$ telle que :*

1. *Pour toute autre valeur propre μ de A, on a $|\mu| < \lambda$.*
2. *λ possède des vecteurs propres à droite et à gauche à coordonnées toutes strictement positives.*
3. *λ est racine simple du polynôme caractéristique de A (Donc en particulier l'espace propre associé à λ est de dimension 1).*
4. *Pour tout vecteur v à coefficients positifs ou nuls, la suite $\frac{v.A^n}{\lambda^n}$ converge exponentiellement vite vers un vecteur propre pour la valeur propre λ.*

La valeur propre λ s'appelle la valeur propre de Perron de la matrice A. Un vecteur propre positif pour la valeur propre λ s'appelle un vecteur propre de Perron de A.

On trouvera une preuve de ce théorème dans les livres classiques consacrés aux matrices positives, ou dans la plupart des livres parlant de chaînes de Markov. Nous en donnons une plus loin.

On peut donner une interprétation géométrique de ce théorème qui permet en particulier de comprendre la propriété de convergence de la suite $\frac{v.A^n}{\lambda^n}$ vers le vecteur propre de Perron. Pour simplifier, on peut remplacer A par une puissance adéquate, et supposer que tous les coefficients de A sont strictement positifs. Soit v un vecteur non nul du cône positif (c'est-à-dire un vecteur dont les coordonnées sont positives ou nulles, et non toutes nulles). Alors, $v.A$ est un vecteur dont toutes les coordonnées sont strictement positives. Autrement dit, le cône positif C est envoyé par

A à l'intérieur de lui-même. Mais alors, par récurrence, $C.A$ est envoyé par A dans lui-même, et on a une suite de cônes emboîtés $C \supset C.A \supset C.A^2 \ldots \supset C.A^n \supset \ldots$ (voir la figure 6.1). L'intersection de tous ces cônes emboîtés est un cône non vide; ce qui n'est pas évident, c'est qu'il soit réduit à une droite. Pour le prouver, on peut étudier la façon dont A agit sur les directions de droites positives. Remarquons que chaque droite positive (c'est-à-dire dont un vecteur directeur a toutes ses coordonnées positives ou nulles) coupe en un seul point le simplexe standard des points $x = (x_1, \ldots, x_d)$ à coordonnées positives ou nulles tels que $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$ et qu'on peut donc assimiler l'ensemble des droites positives au simplexe standard.

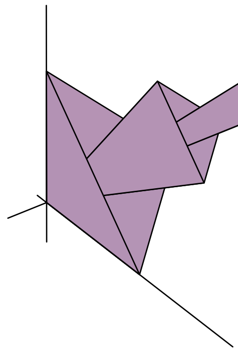


Figure 6.1: Une vision géométrique du théorème de Perron-Frobenius

On peut montrer que, si l'on prend une bonne distance sur ce simplexe standard, A agit de façon strictement contractante, et que donc, par un théorème de point fixe classique, il y a une droite et une seule, correspondant au vecteur propre de Perron, qui est fixée par A. Cependant, le calcul n'est pas facile, et nous proposons ci-dessous une autre preuve.

Remarque : On peut préciser la vitesse de convergence de la suite $\frac{v.A^n}{\lambda^n}$ vers le vecteur propre de Perron. Si on note λ_2 la deuxième valeur propre en module, pour toute constante K telle que $\lambda > K > |\lambda_2|$, la suite converge au moins aussi vite que $\left(\frac{K}{\lambda}\right)^n$. Si λ_2 est simple, alors la convergence est en $\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda}\right)^n$; c'est ce qu'on a observé dans le cas d'une chaîne de Markov à deux états, où $\lambda = 1$ et $\lambda_2 = 1 - a - b$ est simple.

Démonstration : Nous allons faire la démonstration dans le cas où tous les termes de A sont strictement positifs. Le cas général d'une matrice primitive s'en déduit sans peine.

Pour simplifier l'écriture, nous introduisons une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{R}^d$, définie par $u \geq v$ si, pour $i = 1 \ldots d$, on a $u_i \geq v_i$. En particulier, en notant 0 le vecteur nul, on dira que u est positif si $u \geq 0$, c'est-à-dire si toutes les coordonnées de u sont positives ou nulles. On définit de même la relation d'ordre strict $u > v$ par $u_i > v_i$ pour $i = 1 \ldots d$. On dit que u est strictement positif si $u > 0$, c'est-à-dire si toutes ses coordonnées sont positives ou nulles.

Commençons par chercher un vecteur propre positif. Si v est un tel vecteur, associé à une valeur propre λ, on doit avoir $v.A = \lambda v$, ce qui, sur chaque coordonnée non nulle, nous donne

$\lambda v_i = \sum_{j=1}^d v_j a_{j,i}$, ou encore :

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^d v_j a_{j,i}}{v_i}$$

On est ainsi amené à définir, pour tout vecteur positif v non nul :

$$r_i(v) = \frac{\sum_{j=1}^d v_j a_{j,i}}{v_i} \text{ si } v_i \neq 0 \qquad r_i(v) = \infty \text{ si } v_i = 0$$

La fonction r_i est continue sur le complémentaire de $v_i = 0$.

Posons maintenant $r(v) = \min_i r_i(v)$. La fonction $r(v)$ est bien définie, et finie, pour tous les vecteurs positifs non nuls, et elle est homogène de degré 0 (c'est-à-dire que $r(\alpha v) = r(v)$). Il suffit donc de la considérer sur le simplexe standard, qui est compact.

De plus, r est une fonction continue. Ce n'est pas évident ; c'est facile de montrer la continuité en un point dont toutes les coordonnées sont non nulles, car alors, sur un voisinage de ce point, r est le minimum d'un nombre fini de fonctions continues. Si par contre $v_i = 0$, la fonction r_i n'est plus continue en ce point. Mais comme elle tend vers l'infini en s'approchant de ce point, r est strictement plus petit que r_i sur un voisinage du point. Donc r, sur un voisinage du point considéré, est le minimum des r_j tels que $v_j \neq 0$, et est continue, comme minimum de fonctions continues.

Donc r est continue sur un compact ; elle admet un maximum λ en un point v, qui vérifie donc par construction $v.A \geq \lambda v$. Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 5 *Soit λ le maximum de r sur le simplexe standard. Alors, tout vecteur v tel que $v.A \geq \lambda v$ satisfait $v.A = \lambda v$*

Posons $w = v.A$. Par hypothèse, on a $w \geq \lambda v$. Donc le vecteur $u = w - \lambda v$ vérifie $u \geq 0$. Si u n'est pas nul, alors $u.A > 0$, puisque tous les termes de A sont strictement positifs. Mais comme $u.A = w.A - \lambda v.A = w.A - \lambda w$, cela implique que w vérifie $w.A > \lambda w$, c'est-à-dire, pour tout i, $r_i(w) = \frac{\sum_{j=1}^d w_j a_{j,i}}{w_i} > \lambda$, et donc $r(w) > \lambda$, ce qui est contradictoire. Donc u est nul, et v est un vecteur propre associé à λ.

Nous avons bien montré la propriété (2) : il existe une valeur propre λ, maximum de r, qui est associée à un vecteur propre positif.

Soit μ une autre valeur propre (éventuellement complexe), et u un vecteur propre associé. On a $\sum_{j=1}^d u_j a_{j,i} = \mu u_i$, et donc, en prenant les modules :

$$|\mu| \leq \frac{\sum_{j=1}^n |u_j| a_{j,i}}{|u_i|}$$

soit, avec des notations évidentes, $|\mu| \leq r(|u|) \leq \lambda$. On ne peut avoir l'égalité $|\mu| = r(|u|) = \lambda$ que si toutes les coordonnées du vecteur propre u ont même argument $e^{i\theta}$; mais dans ce cas, $e^{-i\theta}u = |u|$ est un autre vecteur propre associé à μ dont toutes les coordonnées sont positives, ce qui montre que μ est un réel positif, donc $\mu = \lambda$.

On a bien montré la propriété (1) : toute valeur propre μ différente de λ vérifie $|\mu| < \lambda$.

Il est clair que, puisque tous les termes de A sont strictement positifs, tout vecteur propre positif et non nul est strictement positif. Or la preuve précédente a montré que tout vecteur propre associé à λ est proportionnel, par une constante complexe, à un vecteur propre à coordonnées positives ou nulles. On en déduit que tout vecteur propre non nul associé à λ a toutes ses coordonnées non nulles. Donc l'espace propre associé à λ est de dimension 1 ; sinon, soient u et v deux vecteurs propres indépendants associés à λ, alors $u - \frac{u_1}{v_1}v$ a sa première coordonnée nulle, ce qui est contradictoire. L'espace propre $\ker A - \lambda I$ associé à λ est donc de dimension 1.

Pour montrer que λ est une valeur propre simple, il ne suffit pas de montrer que l'espace propre est de dimension 1. Il faut aussi prouver que $\ker(A - \lambda I)^2 = \ker(A - \lambda I)$. Supposons que u est un vecteur non nul de $\ker(A - \lambda I)^2 - \ker(A - \lambda I)$. On peut alors écrire $u.A = \lambda u + v$, où v est un vecteur propre associé à λ. Un petit calcul montre que l'on a :

$$u.A^n = \lambda^n u + n\lambda^{n-1} v$$

ou encore, en posant $v = \lambda w$, $u.A^n = \lambda^n(u + nw)$. Pour n assez grand, comme w a toutes ses composantes non nulles, on a $|u + nw| \geq |u|$, et donc le vecteur u satisfait $|u|.A^n \geq \lambda^n|u|$; d'après le lemme ci-dessus, $|u|$ est vecteur propre associé à la valeur propre dominante λ^n de A^n, et par le même raisonnement que ci-dessus, u aussi est vecteur propre associé à λ^n; on a donc $u.A^n = \lambda^n u$, ce qui montre que $v = 0$ et contredit l'hypothèse de départ.

Pour montrer la dernière assertion, il suffit de décomposer un vecteur positif comme somme du vecteur propre de Perron et d'un vecteur dans le sous espace stable complémentaire, et d'étudier la croissance des itérés de ces deux vecteurs par A.

■

6.4.4 Application aux matrices stochastiques

Pour une matrice stochastique, on sait que le vecteur diagonal dont toutes les coordonnées valent 1 est vecteur propre à droite.

On se limitera au cas d'une matrice stochastique primitive M. Dans ce cas, le vecteur diagonal est un vecteur propre positif. Par le théorème de Perron-Frobenius, c'est donc le vecteur propre de Perron, et 1 est la plus grande valeur propre. On en déduit qu'il existe aussi un vecteur propre à gauche associé à un, positif, et unique à une constante près. Ce vecteur propre à gauche se calcule simplement en résolvant le système $v.M = v$, qui est dégénéré, et admet donc des solutions non nulles.

On en déduit la preuve de la convergence que nous avons affirmée dans le cours :

Théorème 21 *Soit M une matrice stochastique primitive. Alors, il existe un unique état stable $S = (s_1, \ldots, s_n)$ pour la chaîne de Markov associée à n, complètement déterminé par $S.M = S$ et $\sum_{i=1}^n s_i = 1$.*

De plus, pour tout état probabiliste initial X_0, la suite d'états probabilistes $X_n = X_0.M^n$ converge exponentiellement vite vers l'état stable X_0.

Si l'on connaît la deuxième plus grande valeur propre λ_2 de M, on peut de plus donner explicitement la vitesse de convergence. En particulier, si λ_2 est une valeur propre simple, la convergence est en $|\lambda_2|^n$.

6.4.5 Quelques applications des chaînes de Markov

Commençons par un exercice qui est trop long pour être fait en cours, mais pourrait par contre faire l'objet d'un TPE intéressant.

Exercice 52 *On part d'un texte long (il serait bon d'avoir plus de 50 pages). Pour gagner du temps, il est nécessaire que ce texte soit sous forme de fichier ASCII, pour pouvoir être manipulé automatiquement.*

1) Compter la liste de tous les digrammes du texte (c'est-à-dire des suites de deux lettres apparaissant dans le texte; par exemple, les suites de *ou* le *apparaitront sûrement dans un texte en français, ainsi que la suite* qu*, mais pas la suite* qq*), avec leur nombre d'apparitions. Attention à ne pas oublier que, parmi les digrammes, il y en a qui contiennent des espaces, ou des symboles de ponctuation.*

2) Etablir la fréquence avec laquelle un digramme donné est suivi par un autre (par exemple, le digramme iq *apparaît en français, dans* musique*, et il est toujours suivi en français par le digramme* qu*, sauf dans les translittérations de noms arabes.*

3) Modéliser par une chaîne de Markov (cela doit être fait à la machine, car le nombre d'états est de l'ordre du millier, et le nombre de transitions de plusieurs milliers).

4) Fabriquer des textes automatiques, en jouant au hasard suivant les probabilités données par la chaîne de Markov; essayer avec des textes écrits dans des langues différentes. On reconnaît en général très bien, en lisant ce texte automatique et privé de sens, la langue de départ.

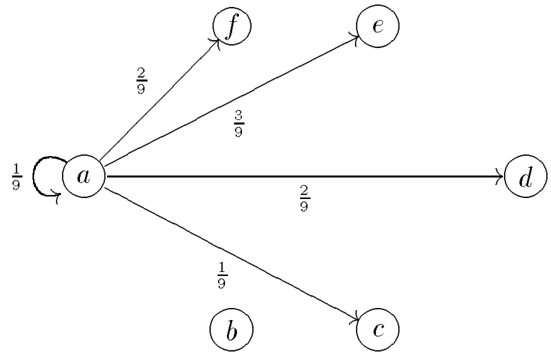
On peut faire de nombreuses variantes, en prenant des textes plus ou moins long (si le texte est court, on retrouvera dans les textes produits des mots entiers du texte initial), et en travaillant sur les trigrammes au lieu des digrammes, ce qui prend plus de place, mais est plus précis. Une autre variante serait de prendre une longueur variable, lettre, digramme ou trigramme suivant le cas; par exemple, en français, q *est toujours suivi de* u*, sans qu'il soit besoin de connaître la lettre précédente.*

Cet exercice peut sembler un pur jeu sans application; il n'en est rien! De nombreux programmes fonctionnent ainsi. On peut citer les programmes de reconnaissance vocale: la machine reconstitue le texte donné de proche en proche, en utilisant le texte déjà reconnu, le son dicté, et une table de probabilités. Une autre application est donnée par les programmes d'écriture de caractères chinois ou japonais, en tapant seulement la prononciation du caractère. C'est en général insuffisant, car il y a beaucoup de caractères avec la même prononciation; l'ordinateur utilise en plus une table de probabilité suivant les caractères précédents. De tels programmes sont susceptibles "d'apprentissage" : ils peuvent affiner leur table de probabilité en fonction de l'utilisateur. En effet, il est clair qu'un médecin n'utilisera pas les mêmes mots qu'un électricien. La machine peut s'adapter, si elle maintient une table de fréquence des textes écrits par l'utilisateur.

Les tables de fréquences utilisées pour le modèle markovien sont longues et coûteuses à établir, et elles peuvent avoir une grande valeur commerciale !

6.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 49 : 0) On peut commencer par représenter le graphe étiqueté. Il possède 6 sommets et 30 arêtes; nous ne représenterons que les arêtes issues de a, il suffit de compléter par rotation :



1) La loi de S est la suivante :
$P[S=2]=\frac{1}{9}$.
$P[S=3]=\frac{2}{9}$.
$P[S=4]=\frac{3}{9}$.
$P[S=5]=\frac{2}{9}$.
$P[S=6]=\frac{1}{9}$.

2) Pour arriver en case 1 à un coup donné, il faut que le pion ait été en case 1 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 6, ou le pion ait été en case 2 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 5, ou que le pion ait été en case 3 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 4, ou que le pion ait été en case 4 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 3, ou que le pion ait été en case 5 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 2.

Avec la formule des probabilités totales, on obtient :
$a_{n+1}=\frac{1}{9}a_n+\frac{2}{9}b_n+\frac{3}{9}c_n+\frac{2}{9}d_n+\frac{1}{9}e_n$.
De même, on obtient :
$b_{n+1}=\frac{1}{9}b_n+\frac{2}{9}c_n+\frac{3}{9}d_n+\frac{2}{9}e_n+\frac{1}{9}f_n$
$c_{n+1}=\frac{1}{9}c_n+\frac{2}{9}d_n+\frac{3}{9}e_n+\frac{2}{9}f_n+\frac{1}{9}a_n$
$d_{n+1}=\frac{1}{9}d_n+\frac{2}{9}e_n+\frac{3}{9}f_n+\frac{2}{9}a_n+\frac{1}{9}b_n$
$e_{n+1}=\frac{1}{9}e_n+\frac{2}{9}f_n+\frac{3}{9}a_n+\frac{2}{9}b_n+\frac{1}{9}c_n$
$f_{n+1}=\frac{1}{9}f_n+\frac{2}{9}a_n+\frac{3}{9}b_n+\frac{2}{9}c_n+\frac{1}{9}d_n$
Matriciellement, cela s'écrit, en posant $X_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n \end{pmatrix}$:
$X_{n+1}=X_n.M$,pour $n\geq 1$, avec :
$M=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

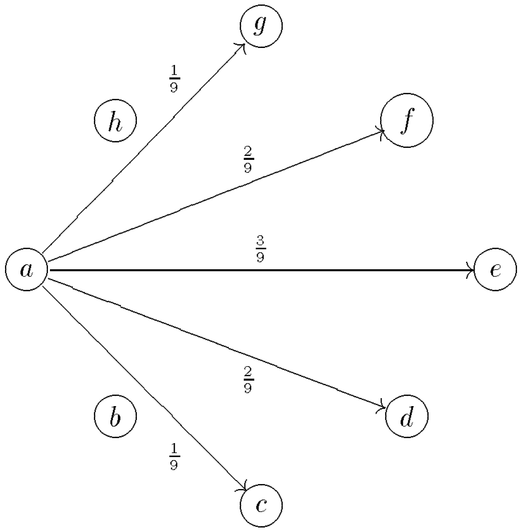
3) On a vu que $X_n=X_0.M^n$. On calcule donc facilement à la machine les premières valeurs de X_n; en particulier, à 10^{-5} près :

$$X_9=\begin{pmatrix} 0.16678 & 0.16655 & 0.16644 & 0.16655 & 0.16678 & 0.16689 \end{pmatrix}$$

$$X_{17}=X_{18}=\begin{pmatrix} 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 \end{pmatrix}$$

La conjecture qui s'impose donc est que lorsque n tend vers l'infini, les suites a,b,c,d,e,f convergent toutes vers la même limite :$\frac{1}{6}$. Le système semble évoluer vers une position de stabilité avec équirépartition du pion sur toutes les cases.

Solution de l'exercice 50 : 0) Le graphe étiqueté est obtenu en complétant le graphe suivant par rotation :



1) Même solution que l'exercice précédent.

2) Pour arriver en case 1 à un coup donné, il faut que le pion ait été en case 3 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 6, ou le pion ait été en case 4 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 5, ou que le pion ait été en case 5 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 4, ou que le pion ait été en case 6 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 3, ou que le pion ait été en case 7 après le coup précédent et que le joueur ait obtenu 2.

Avec la formule des probabilités totales, on obtient :

$a_{n+1} = \frac{1}{9}c_n + \frac{2}{9}d_n + \frac{3}{9}e_n + \frac{2}{9}f_n + \frac{1}{9}g_n$.

De même, on obtient :

$b_{n+1} = \frac{1}{9}d_n + \frac{2}{9}e_n + \frac{3}{9}f_n + \frac{2}{9}g_n + \frac{1}{9}h_n$
$c_{n+1} = \frac{1}{9}e_n + \frac{2}{9}f_n + \frac{3}{9}g_n + \frac{2}{9}h_n + \frac{1}{9}a_n$
$d_{n+1} = \frac{1}{9}f_n + \frac{2}{9}g_n + \frac{3}{9}h_n + \frac{2}{9}a_n + \frac{1}{9}b_n$
$e_{n+1} = \frac{1}{9}g_n + \frac{2}{9}h_n + \frac{3}{9}a_n + \frac{2}{9}b_n + \frac{1}{9}c_n$
$f_{n+1} = \frac{1}{9}h_n + \frac{2}{9}a_n + \frac{3}{9}b_n + \frac{2}{9}c_n + \frac{1}{9}d_n$
$g_{n+1} = \frac{1}{9}a_n + \frac{2}{9}b_n + \frac{3}{9}c_n + \frac{2}{9}d_n + \frac{1}{9}e_n$

$h_{n+1} = \frac{1}{9}b_n + \frac{2}{9}c_n + \frac{3}{9}d_n + \frac{2}{9}e_n + \frac{1}{9}f_n$

Matriciellement, cela s'écrit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n \end{pmatrix}$:

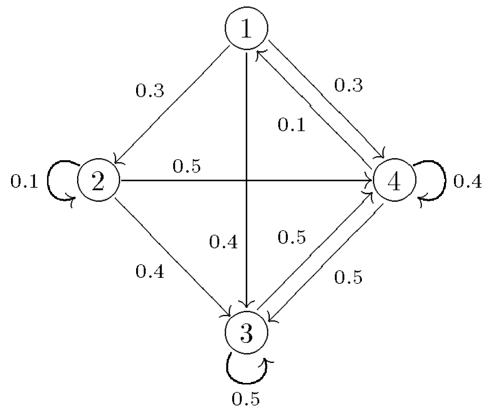
$X_{n+1} = X_n.M$, d'où $X_n = X_1.M^{n-1}$pour $n \geq 1$, avec :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Un calcul simple à la machine nous donne, à 10^{-5} près, $X_{33} = X_0.M^{33}$ est le vecteur dont les 8 coordonnées valent $0,125$.

De même, on trouve $X_{34} = X_{33}$, à 10^{-5} près. Ensuite, par récurrence,$X_n = X_{33}$ pour tout n supérieur ou égal à 33, toujours à la précision de la machine près. La conjecture qui s'impose donc est que lorsque n tend vers l'infini, les suites a, b, c, d, e, f convergent toutes vers la même limite : $\frac{1}{8}$. Le système semble évoluer vers une position de stabilité avec équirépartition du pion sur toutes les cases.

Solution de l'exercice 51 : 1) Le graphe est donné par :



2) On calcule $M^{32} = \begin{pmatrix} 0,04464 & 0,014881 & 0,49405 & 0,44643 \\ 0,04464 & 0,014881 & 0,49405 & 0,44643 \\ 0,04464 & 0,014881 & 0,49405 & 0,44643 \\ 0,04464 & 0,014881 & 0,49405 & 0,44643 \end{pmatrix}$. On vérifie qu'à 10^{-5} près, on a $M^{32} = M^{33}$.

3) On sait que X_n=X_0 M^n. Comme ici, à 10^{-5} près, toutes les lignes de M^{32} sont les mêmes, on voit que X_{33} ne dépend pas de la valeur de départ à 10^{-5} près et vaut

$$X_{33} = \begin{pmatrix} 0,04464 & 0,014881 & 0,49405 & 0,44643 \end{pmatrix}.$$

4) De même par récurrence :

$$X_n = \begin{pmatrix} 0,04464 & 0,014881 & 0,49405 & 0,44643 \end{pmatrix}$$

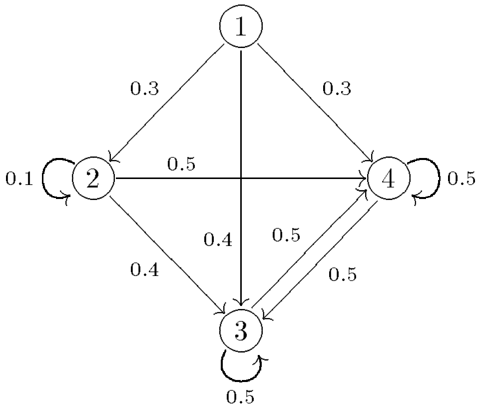
à 10^{-5} près, pour tout n supérieur ou égal à 33. Le système évolue bien vers une position limite indépendante de l'état initial.

5) Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, on vérifie à la machine quà 10^{-5} près,

$$N^{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le système évolue vers une position limite où deux des états ont disparu, puisque X_n tend vers : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, lorsque n tend vers l'infini, indépendemment de l'état initial.

Le graphe correspondant est donné par :



Bibliographie commentée

[1] Il existe aussi plusieurs sites sur les graphes, en particulier :

- à l'IREM de Marseille, adresse :
  `http://www.irem.univ-mrs.fr/activites/activites-lycee2.php`
  contenant des activités réalisées par Daniel Muller, formateur à l'IUFM d'Aix-Marseille.
- le site de l'IREM de Lyon :
  `http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/panorama/graphes.html`
  qui donne de nombreuses adresses.
- Le site du ministère à l'adresse :
  `http://www.eduscol.education.fr/?./D0015/LLPHAG00.htm`
  donne les informations oficielles.
- taper "graphes terminales ES" dans un moteur de recherche amène plusieurs centaines de réponses.

[2] J.-M. Autebert *Langages algébriques* Masson, Paris, 1987

[3] C. Berge *Graphes et hypergraphes* Dunod, 1983.
Le classique du sujet en langue française.

[4] C. Berge *Théorie des graphes et ses applications* Dunod, Paris, 1958.

[5] B. Bollobas*Extremal graph theory* Academic Press, London, 1978.

[6] J.A Bondy, U.S.R. Murty *Graph theory with applications* American Elsevier, New York, 1976.

[7] F. Droesbeke, M. Hallin, Cl. Lefèvre *Les graphes par l'exemple* Ellipses, 1987
De très nombreux exercices concrets.

[8] F. Harary Graph theory Addisson-Wesley, Reading, Mass., 1969.
Utile pour se familiariser avec les graphes de De Brujin et avec dÕautres graphes issus de la théorie des communications dans un réseau.

[9] J. De Rumeur *Communications dans les réseaux de processeurs* Masson, Paris, 1994.

[10] Aimé Sache *La théorie des graphes* Que sais-je **1954** 1974.
Petit livre très complet sur la théorie des graphes (écrit par Claude Berge sous un pseudonyme); malheureusement épuisé, mais se trouve en bibliothèque.

[11] J. Sakarovitch éléments de théorie des graphes à paraître

[12] Le document d'accompagnement du programme de terminale ES possède une liste d'exercices couvrant tout le programme, et le CD qui lui est joint contient des animations, en particulier sur les graphes étiquetés, qui peuvent être utiles.

[13] Revue Tangente, Numero Hors série 12, numéro entièrement consacré aux graphes.

[14] Quadrature, les numéros 42, 43, 44 contiennent des articles sur les graphes.

Index

k-coloriage, 34
k-cycle, 6
état, 53, 58
    stable, 80
état final, 58
état initial, 58

algorithme de coloriage de Welch et Powell, 35
algorithme de Dijkstra, 45
arc, 11
arête, 3
arêtes
    parallèles, 3
automate fini, 58

boucle, 3

chaîne, 6
    eulérienne, 7
    hamiltonien, 14
    orientée, 9
chaîne de Markov, 86
chemin, 11
circuit, 11
coloriage, 34
composante connexe, 7
cycle, 6
    eulérien, 7
    hamiltonien, 14

degré d'un sommet, 5
diamètre, 22
distance, 22
déterministe, 54, 58

expression régulière, 61
extrémité
    initiale, 8
    terminale, 8

formule d'Euler-Descartes, 15

graphe, 3
    étiqueté, 54
    bi-parti, 14, 39
    complet, 5
    complémentaire, 39
    connexe, 7
    de de Bruijn, 13
    des mots, 13
    dual, 15
    fortement connexe, 11, 25
    hamiltonien, 14
    orienté, 8
    planaire, 14
    pondéré, 45
    probabiliste, 79
    simple, 3

langage
    rationnel, 60
    reconnaissable, 59
    reconnu, 55
langages
    algébriques, 69
loi de Kirchoff, 26
longueur (d'une chaîne), 6

matrice
    d'adjacence, 22
    d'incidence, 26
matrice de transition, 80
matrice primitive, 87
matrice stochastique, 80
monoïde, 68
monoïde syntaxique, 68
mot, 55
    reconnu, 55

nombre
    chromatique, 34
    cyclomatique, 26

de stabilité, 38

ordre (d'un graphe), 3
origine, 8

parallèles, 3

sommet, 3
adjacent, 3
impair, 5
isolé, 3
pair, 5
sous-ensemble stable, 34
sous-graphe, 5
engendré , 5
stable, 6

théorème
d' Euler, 8
de Cobham, 67
de Kleene, 60
de Kuratowski, 16
de Perron-Frobenius, 87
des 4 couleurs, 39
transition, 53, 58