Mathématiques en Terminale ES

David ROBERT

2007–2008

Sommaire

Progression

Mois	Sem	Intitulé du chapitre
Sept	1	Rappels et compléments sur les fonctions (8 sem) en particulier :
	2	Continuité
	3	Composition
	4	Dérivation
Oct	5	Limites
	6	
	7	
	8	
		Vacances d'automne du sam 27 oct au jeu 8 nov
Nov	9 (3 j)	Statistique à deux variables (2,5 sem)
	10	
	11	
	12	Primitives, calcul intégral (4 sem)
Déc	13	
	14	
	15	
		Vacances de Noël du sam 22 déc au lun 7 jan
Jan	16	Fonction logarithme (3 sem)
	17	
	18	
	19	Probabilité conditionnelles (3 sem)
Fév	20	
	21	
		Vacances d'hiver du sam 16 fév au lun 3 mar
Mars	22	Fonction exponentielle (3 sem)
	23	
	24	
	25	Loi de probabilité, schémas de Bernouilli (3 sem)
Avr	26	
	27	
		Vacances de printemps du sam 12 avr au lun 28 avr
Mai	28	Fonction puissance (2 sem)
	29	
	30	Adéquation à une loi équirépartie (1 sem)
	31	
	32	
Juin	33	

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions : Rappels et compléments

Sommaire

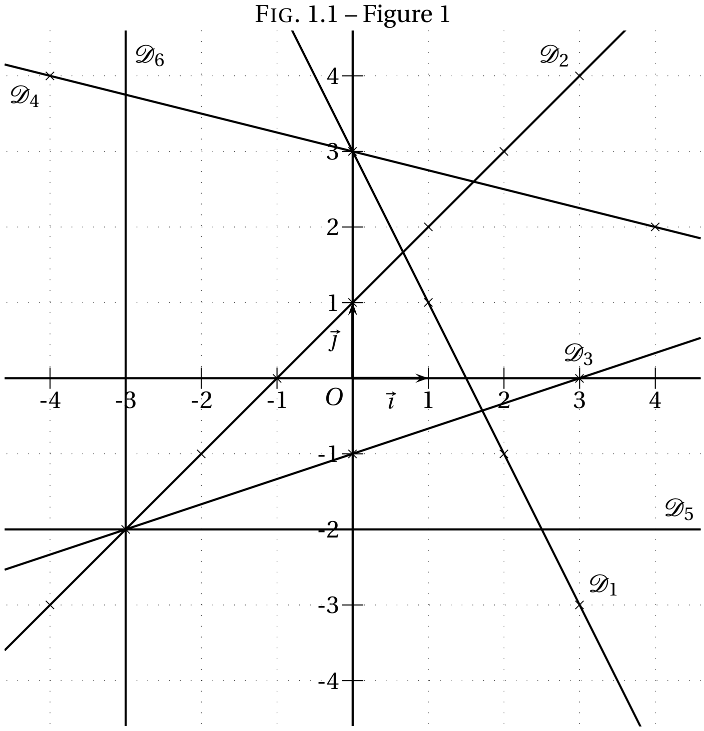
1.1 Généralités

1.1.1 Fonctions affines

Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x + 0,5$, définie sur $\mathbb{R}$? Déterminer si $A(150,5\,;\,-451)$ ou $B(-73,25\,;\,-219,5)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.
2. Mêmes questions dans les cas suivants :
   - $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{13}{6}\right)$ et $f(x) = 6x + \frac{1}{6}$;
   - $A(1\,;\,-7)$ et $f(x) = -\frac{3}{4}(x+2) - 5$;
   - $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6}\right)$ et $f(x) = \frac{1}{6}$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5}{2}x - 1$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
   (b) B est le point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?
4. Dans un même repère, tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :
   - $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 5$;
   - $f_2(x) = 4x - 2$;
   - $f_3(x) = -3$;
   - $f_4(x) = \frac{3}{4}x - 4$.
5. Même question avec :
   - $f_1(x) = -5x + 10$;
   - $f_2(x) = \frac{3x-1}{6}$;
   - $f_3(x) = 6x - 14$;
   - $f_4(x) = \frac{-2x+1}{4}$.
6. Dans un même repère, tracer les droites suivantes :
   - $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3\,;\,1)$ et de coefficient directeur -1 ;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3\,;\,2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1\,;\,0)$ et de coefficient directeur 3 ;
   - $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0\,;\,2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
   - $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2\,;\,2)$ et de coefficient directeur 0 ;
7. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :
   - $A(1\,;\,2)$ et $B(3\,;\,-1)$;
   - $A(0\,;\,-1)$ et $B(2\,;\,3)$;
   - $A(1\,;\,3)$ et $B(1\,;\,4)$;
   - $A(4\,;\,4)$ et $B(-1\,;\,2)$;
   - $A(-2\,;\,2)$ et $B(3\,;\,2)$;
   - $A\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ et $B(3\,;\,5)$.
8. Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 1.1 de la présente page.

FIG. 1.1 – Figure 1



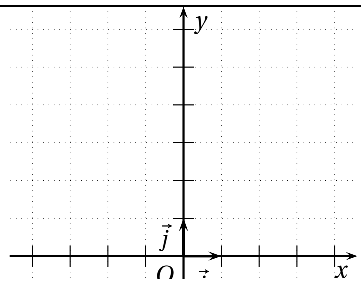
9. Même question pour les droites représentées sur la figure 1.2 page 6.

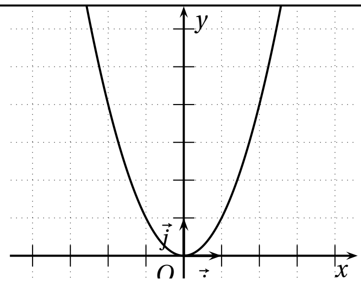
1.1.2 Autres fonctions usuelles

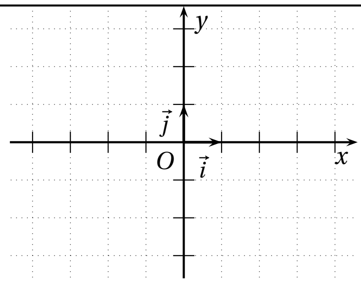
Compléter le tableau 1.1.2, page ci-contre, sur le modèle de la deuxième ligne.

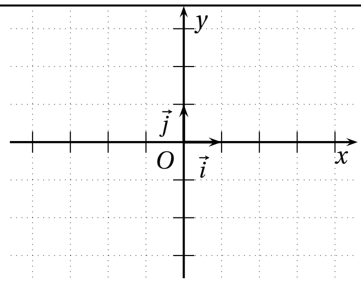
TAB. 1.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité 1.1.2

<table>
<tr><th>Fonction
Définie sur</th><th>Parité
Variations</th><th>Allure de la courbe représentative</th></tr>
<tr><td>Affine
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Carré
$f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R}$</td><td>D_f est centré sur 0 et
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
donc la fonction carré est paire
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) = x^2$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td></tr></table></td><td>
Parabole</td></tr>
<tr><td>Cube
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Inverse
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Racine carrée
$f(x) =$

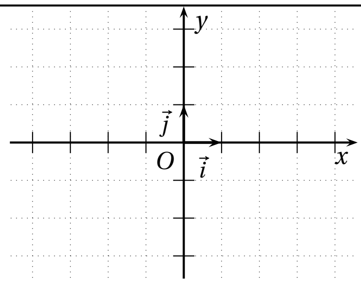
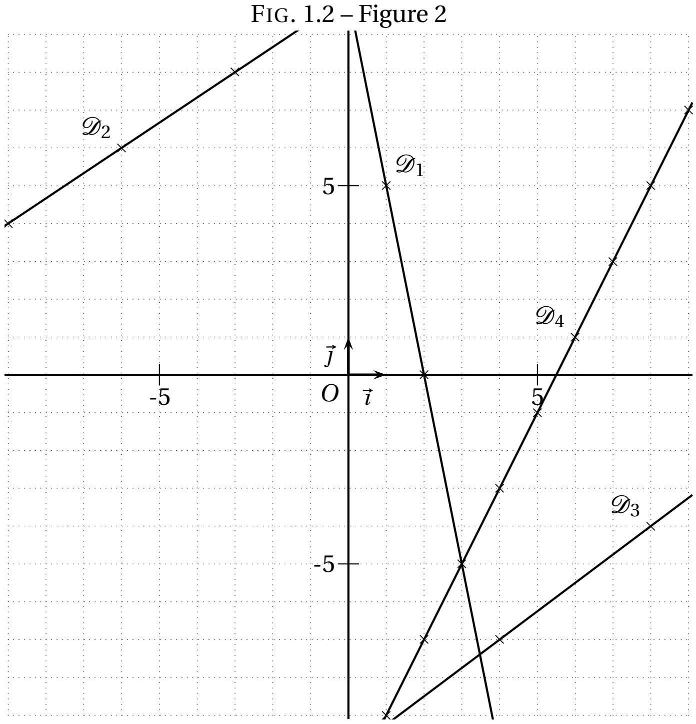
$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

FIG. 1.2 – Figure 2



1.1.3 Fonction trinôme

1. Une entreprise produit de la farine de blé.
   On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
   On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.
   (a) Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
   (b) Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
      i. tracer la courbe repésentant le bénéfice ; quelle est sa nature ?
      ii. déterminer graphiquement puis par le calcul la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
      iii. déterminer graphiquement puis par le calcul la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.
2. Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est* une fonction affine du prix p du billet. Plus précisement on a : $x = 300 - 12p$.
   (a) Entre quelles valeurs peut varier le prix du billet ?
   (b) Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1 848 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
   (c) En déduire graphiquement puis par le calcul pour quelles valeurs de p le séance est rentable.
   (d) Déterminer graphiquement puis par le calcul le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

1.1.4 La continuité (approche graphique)

1. Voici quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$:
   - $f(x) = x^2$;
   - $g(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$;
   - $h(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$;
   - $l(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 2 \\ 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$.

   Représenter graphiquement ces fonctions et commenter les courbes obtenues.
2. La fonction *partie entière* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe l'entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.
   On note E cette fonction.

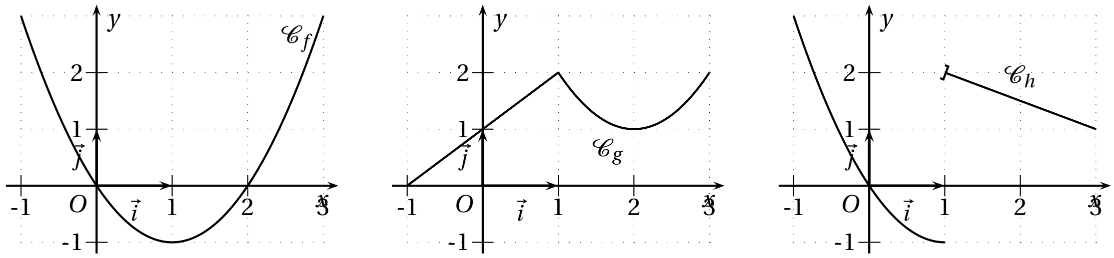
(a) Compléter le tableau ci-dessous :

x	$-1,2$	-1	$-0,5$	0	$0,99$	1	$1,5$	2
$E(x)$								

(b) Représenter graphiquement E.

3. Les fonctions f, g et h représentées de la présente page par leurs courbes respectives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, sont définies sur $[-1\,;\,3]$.

FIG. 1.3 – Trois courbes



(a) Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1\,;\,3]$?

(b) Donner des intervalles sur lesquels chacune de ces fonctions est continue.

4. f est la fonction définie sur $[-2\,;\,5]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in [-2\,;\,1[\\ f(x) = x + p & \text{si } x \in [1\,;\,5] \end{cases}$$

(a) f est-elle continue sur $[-2\,;\,1[$? Sur $[1\,;\,5]$?

(b) Comment choisir p pour que f soit continue sur $[-2\,;\,5]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

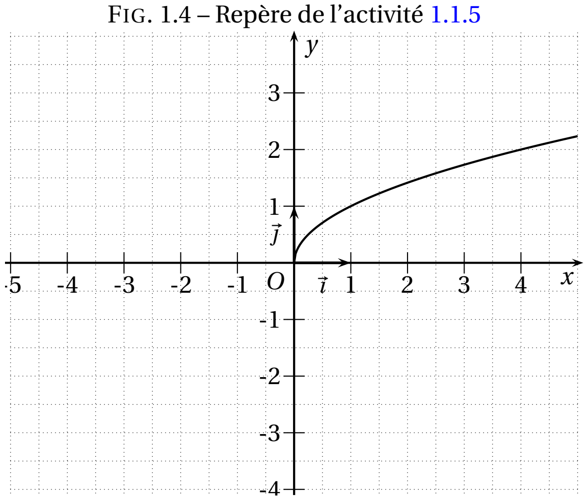
1.1.5 Fonctions associées aux fonctions usuelles

Soit f, g, h, k, l les fonctions définies par :

- $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $g(x) = 3 + \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $h(x) = \sqrt{x+4}$ pour $x \in [-4\,;+\infty[$
- $k(x) = -\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $l(x) = 4\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

1. (a) Dans le repère de la présente page, où la courbe représentative de f est déjà tracée, tracer la courbe représentative de g.
   (b) Décrire la transformation permettant de passer de la courbe de f à celle de g en précisant ses caractéristiques si cette transformation est une transformation usuelle (symétrie, etc.).
2. Mêmes questions en remplaçant g par chacune des autres fonctions.

FIG. 1.4 – Repère de l'activité 1.1.5



1.1.6 Composition de fonctions

Une entreprise raffine de la matière première puis vend le produit raffiné. La fonction f qui donne le nombre de tonnes de produit raffiné en fonction du nombre de tonnes x de matière première est $f(x) = 5 - \dfrac{5}{x+1}$ pour $x \geq 0$. La fonction g qui donne le bénéfice de la vente (en milliers d'€) de x tonnes de produit raffiné est $g(x) = -x^2 + 6x - 7$.

1. Que représente la fonction $h(x) = g(f(x))$?
2. Déterminer h pour $x = 0$, $x = 2$, $x = 5$, $x = 10$.
3. (a) Déterminer l'expression de h en fonction de x.
   (b) Qu'aurait-on obtenu si g donnait le nombre de tonnes de produit raffiné et f le bénéfice ?
4. Sur la calculatrice graphique, représenter les courbes de f, de g et de h.
5. Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x + 2$ et soit h la fonction définie par $h(x) = f\left(g(x)\right)$.
   (a) Déterminer, s'ils existent, $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ et $h(5)$.
   (b) Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x.
   (c) Déterminer l'expression de $l(x) = g\left(f(x)\right)$. A-t-on $l = h$?
6. Mêmes questions qu'au 5 avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
7. Mêmes questions qu'au 5 avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.

1.2 Dérivation

1.2.1 Variations : Fonctions associées – Somme de fonctions

1. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{-4}{x+1}$.
   À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g et son ensemble de définition.
2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.
   Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.
   (b) Placer les points trouvés aux questions précédentes dans un repère approprié et tracer soigneusement $\mathscr{C}$.

1.2.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Compléter le tableau 1.2 de la présente page.

TAB. 1.2 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	définie sur	Fonction dérivée f'	définie sur
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) =$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$	$f'(x) =$	

1.2.3 Opérations algébriques et dérivation

Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I. Compléter le tableau 1.3 de la présente page.

TAB. 1.3 – Opérations sur les fonctions dérivées

Fonction	Fonction dérivée
ku avec $k \in \mathbb{R}$	
$u + v$	
$u \times v$	
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	
$\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	

1.2.4 Fonction rationnelle – Tangentes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient direteur -3.
7. (a) Déterminer une approximation affine locale au voisinage de 2.
   (b) En déduire une valeur aprochée de $f(2,003)$ et de $f(1,996)$.

1.2.5 Tableau de variations

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

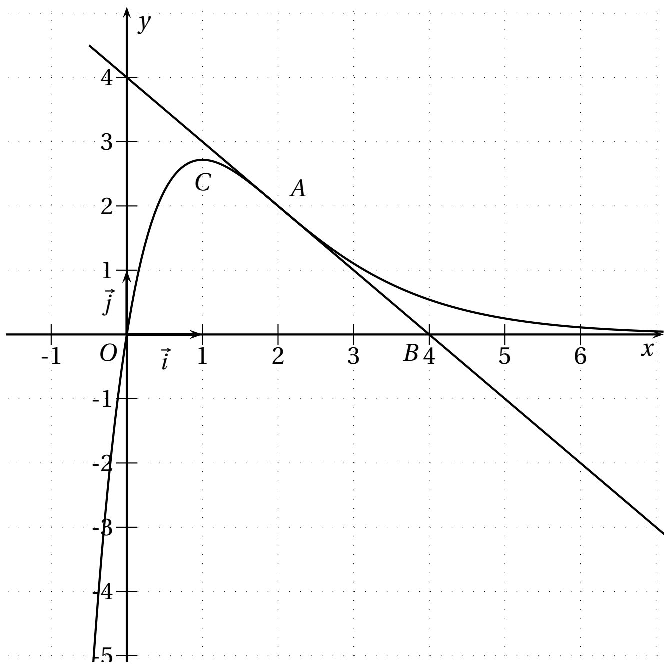
x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4,5$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = -2$
   - admet une seule solution
   - admet deux solutions
   - admet quatre solutions.
2. On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   - $y = 4$
   - $y = 4(x-2)$
   - $x = 4$.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées (1 ; 2) est $y = 3x - 1$.
   On a :
   - $f(2) = 1$
   - $f'(1) = -1$
   - $f'(1) = 3$.
4. Sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$, la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
   - est croissante
   - est décroissante
   - n'est pas monotone.

1.2.6 Lectures graphiques

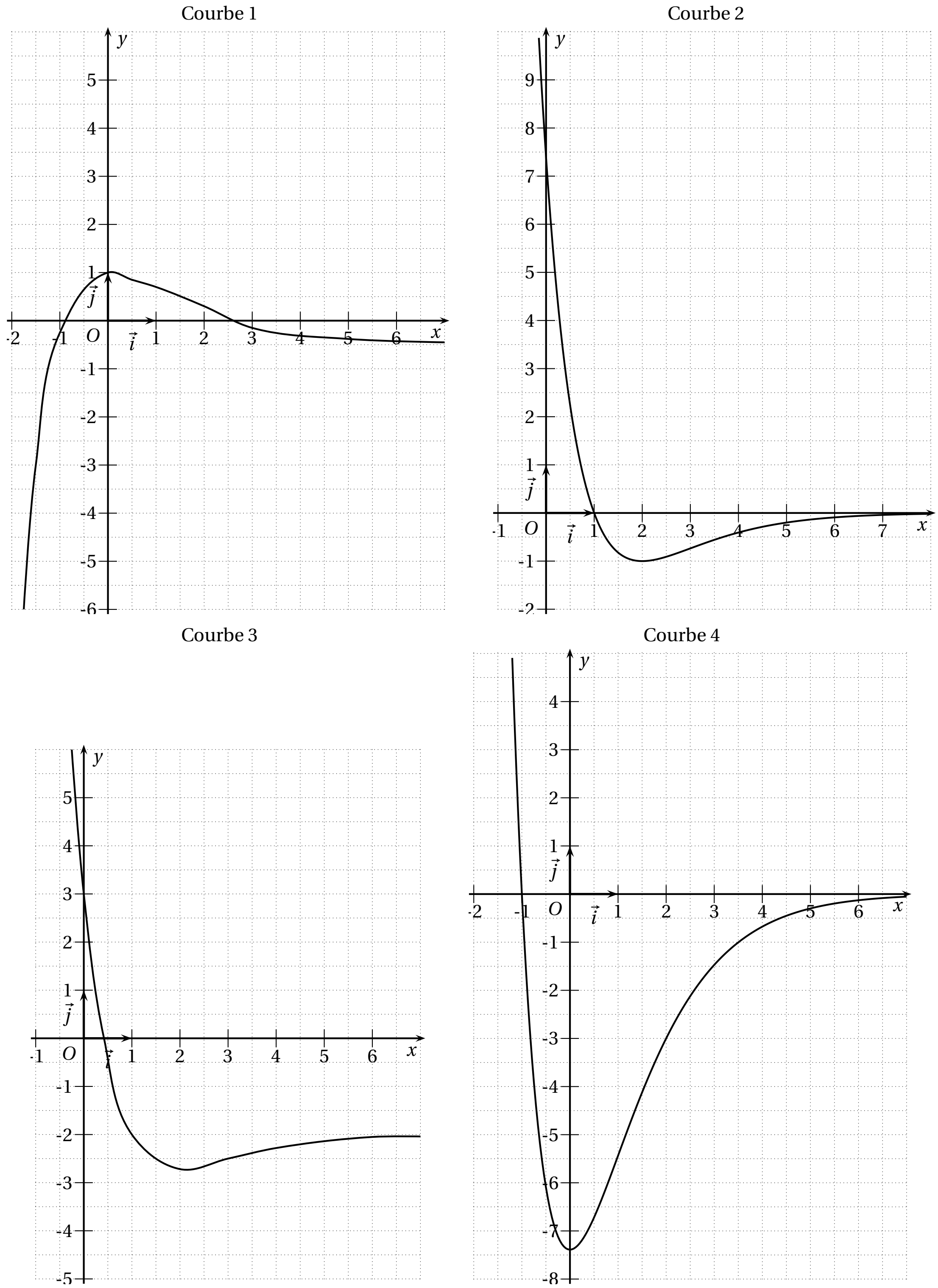
On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $O(0\,;\,0)$ et $A(2\,;\,2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Déterminer, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = \lambda$.
3. Une des représentations graphiques page suivante, figure 1.5, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
4. Une des représentations graphiques page ci-contre, figure 1.5, représente une fonction h telle que $h' = g$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

FIG. 1.5 – Courbes de l'activité 1.2.6



1.2.7 Lectures graphiques (bis)

On a représenté de la présente page la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\,;\,2)$ et $C(-2\,;\,0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$;
   - $f(x) \leq 2$;
   - $f(x) \geq 3$;
   - $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques 1.7 de la présente page, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

FIG. 1.6 – Courbe de l'activité 1.2.7

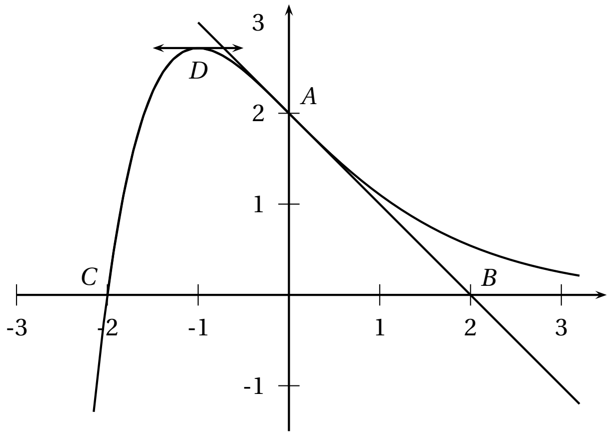
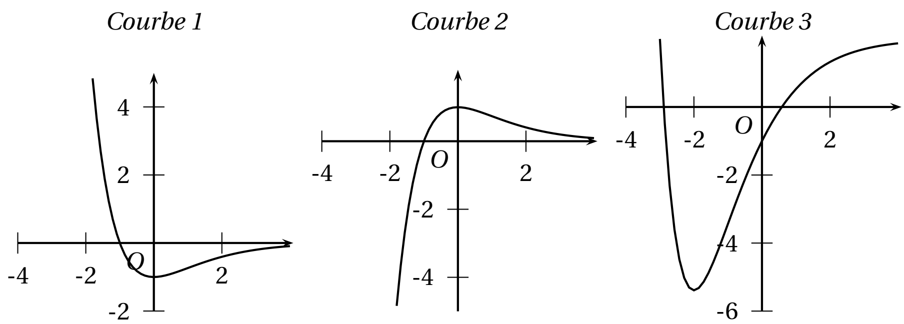


FIG. 1.7 – Courbes de l'activité 1.2.7



1.2.8 Fonction dérivée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau des variations de f.
3. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -1.
   (d) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
5. (a) Dans un repère orthogonal placer les points et représenter les tangentes rencontrés dans les questions précédentes. (*unités graphiques 1 cm = 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm = 2 unités sur l'axe des ordonnées*)
   (b) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

1.2.9 Fonction dérivée (bis)

f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 11x + 28}{x - 3}$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
   (d) Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 4.
   Soit T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.
      i. Déterminer une équation de la droite T.
      ii. Déterminer une fonction g, approximation affine de f au voisinage de 4.
      iii. Indiquer une approximation, à 0,001 près, de l'image de 3,999 par la fonction f.
2. (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$ pour tout réel $x \neq 3$.
   (b) Soit h la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - 8$.
   On note $\mathscr{D}$ la droite qui représente la fonction h.
      i. Étudier le signe du réel $f(x) - h(x)$.
      ii. Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
3. Dans un repère :
   (a) placer les points correspondant aux extremums locaux de f et A ;
   (b) tracer T et les tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$;
   (c) tracer $\mathscr{D}$ puis $\mathscr{C}$.

1.2.10 Dérivée et composition

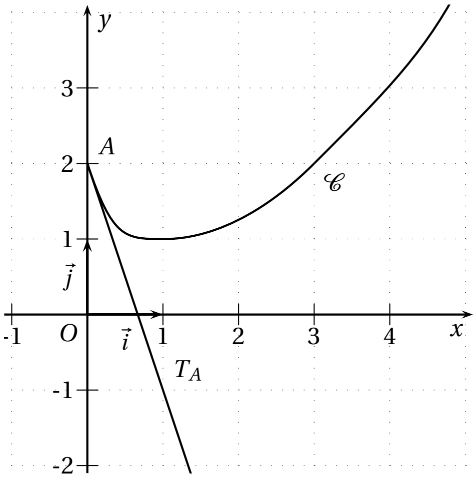
1. On donne dans le tableau ci-dessous pour plusieurs fonctions f données, la dérivée de $f(x)$ et la dérivée de $f(g(x))$ où g est une fonction définie, dérivable et telle que la composée de f et de g est aussi définie et dérivable.

$f(x)$	$f'(x)$	$(f(g(x))'$
$mx+p$	m	$m \times g'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{-n}{(g(x))^{n+1}} \times g'(x)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}} \times g'(x)$

Conjecturer la formule générale qui donne la dérivée de la fonction $f(g(x))$.

2. L'appliquer dans chacun des cas précédents pour $n = 5$ et :
   - $g(x) = 2x - 4$;
   - $g(x) = x^2 + 3x - 4$.
3. En supposant que les fonctions soient définies et dérivables et à l'aide de la formule générale obtenue en 1 :
   (a) Que peut-on dire du signe de $f'(X)$ et de $g'(x)$ si f et g sont croissantes ? En déduire le signe de $(f(g(x))'$ puis le sens de variation de $f(g(x))$.
   (b) Mêmes questions quand les deux fonctions sont décroissantes.
   (c) Mêmes questions si l'une est croissante et l'autre décroissante.
4. u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + x - 6$ et f la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction u sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;+\infty[$.

FIG. 1.8 – Courbe de l'activité 1.2.11



1.2.11 Fonctions composées, sujet d'annales

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 1.8 de la présente page représente une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On note f' la fonction dérivée de f.
La droite T_A est la tangente au point A d'abscisse 0. La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.
Enfin, la fonction f est croissante sur $[1\,;+\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.

1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes.
   (a) Compléter le tableau :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

   (b) Donner le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.
2. On considère la fonction g inverse de la fonction f, c'est-à-dire $g=\frac{1}{f}$. On note g', la fonction dérivée de g.
   (a) Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.
   (b) Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$? Justifier la réponse donnée.
   (c) Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.
   (d) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g.
   Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonromal (unité : 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

1.3 Limites

1.3.1 Limites des fonctions usuelles (rappels)

Compléter le tableau 1.4 de la présente page.

TAB. 1.4 – Tableau du 1.3.1

f	D_f	Limites
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	Si $m>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ Si $m<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ Si $m=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=\ldots\ldots$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=\ldots\ldots$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\ldots\ldots$

1.3.2 Opérations sur les limites (rappels)

Compléter les tableaux 1.5, 1.6, 1.7 et 1.8 de la présente page en indiquant dans chaque case, lorsqu'on peut conclure, respectivement, les valeurs de $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$, de $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)\times g(x)]$, de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ et de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ (l et l' sont des réels).

TAB. 1.5 – Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l			
$+\infty$			
$-\infty$			

TAB. 1.6 – Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$			
$l=0$			
$\pm\infty$			

TAB. 1.7 – Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$	$l\neq0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$					

TAB. 1.8 – Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$			
$l=0$			
$\pm\infty$			

1.3.3 Détermination de limites (rappels)

Déterminer les limites suivantes et indiquer les asymptotes que l'on peut en déduire :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{-6}{x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

1.3.4 Limites, asymptotes et lectures graphiques (rappels)

On donne, sur les figures 1.9 et 1.10 page ci-contre, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.

Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition ;
3. indiquer les asymptotes à chacune des courbes.

1.3.5 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles (rappels)

1. Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x\right)$
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x\right)$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
   (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
2. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{-x+1}{x+3}$.
   On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
   (a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
   (b) Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
   (c) Étudier les variations de f.
   (d) Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$.
   On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx}{x^2+1}$
   (b) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
   (d) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
4. Soit f la fonction qui a x associe $f(x)=\dfrac{1-2x}{-x^2+2x+3}$.
   (a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (c) En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

FIG. 1.9 – Lectures graphiques : premier cas

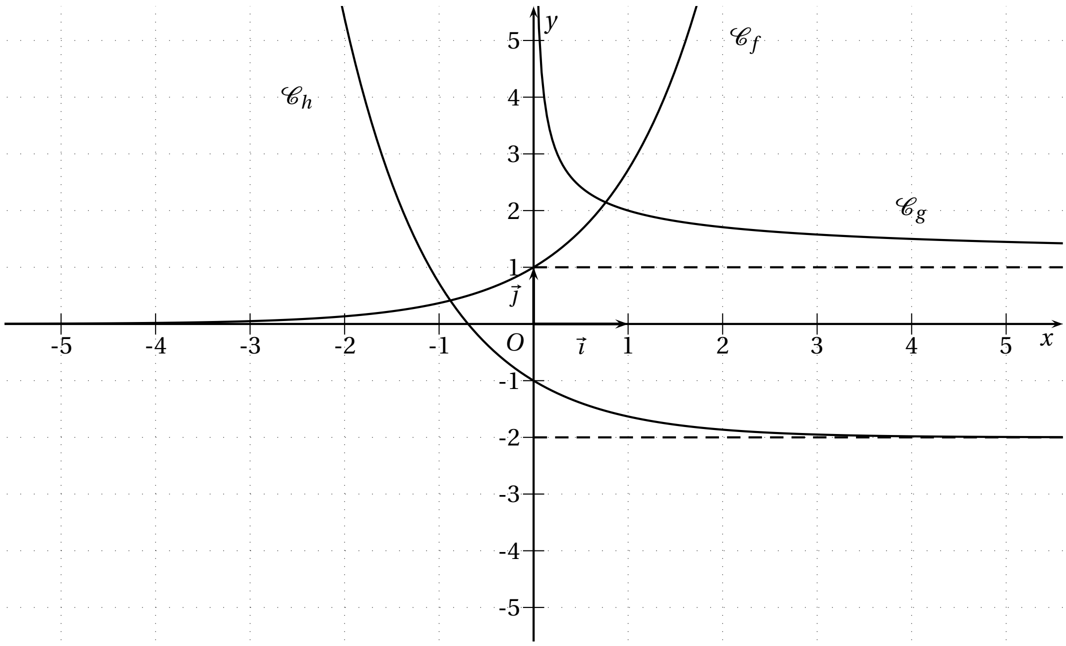
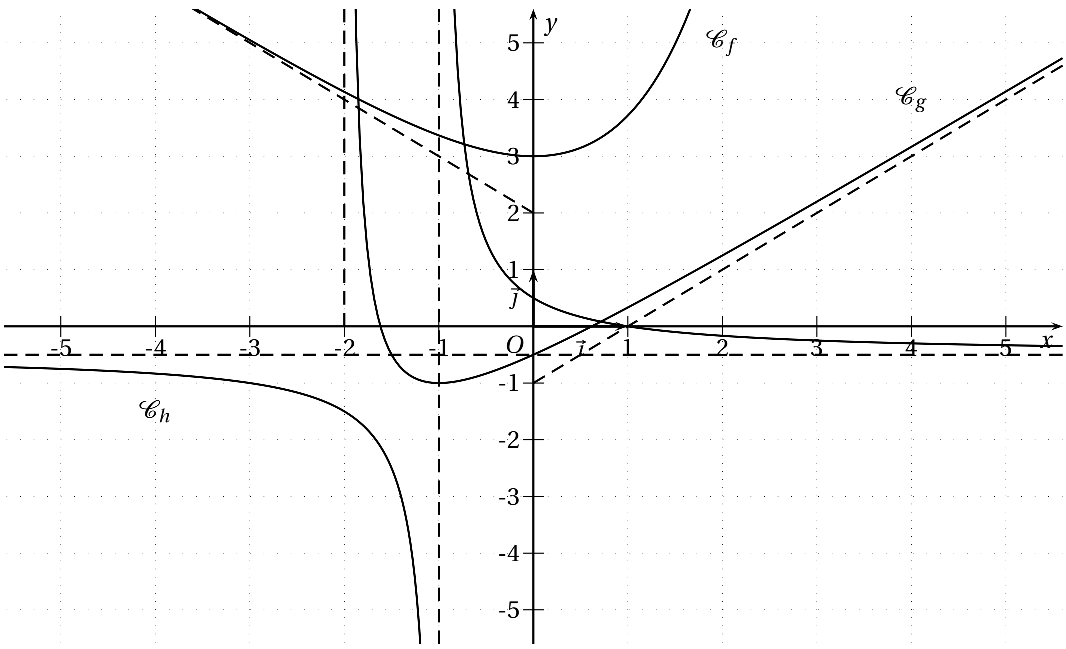


FIG. 1.10 – Lectures graphiques : second cas (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties)



1.3.6 Limites de fonctions composées : lectures graphiques

Les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_u$ de la figure 1.11 page suivante représentent respectivement la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et une fonction u définie sur $]4\,;+\infty[$.

On considère la fonction composée $f = u \circ g$ définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;2\right[\cup]3\,;+\infty[$.

1. Déterminer graphiquement $f(1)$, $f(3{,}5)$ et $f(10)$
2. Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} u(X)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} g(x)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$?
4. Déterminer $a = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} g(x)$ et $\lim\limits_{X\to a} u(X)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$?
5. Déterminer de la même manière la dernière limite aux bornes de son ensemble de définition de f.

1.3.7 Limites de fonctions composées : calculs

On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} g\circ f(x)$.
3. Déterminer l'expression de $g\circ f$ et retrouver les limites de $g\circ f$ en $+\infty$ et $-\dfrac{1}{2}$

1.3.8 Inégalités et limites

1. Soit f, u et v les fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+\sin x}{x} \qquad u(x) = \frac{2x-1}{x} \qquad v(x) = \frac{2x+1}{x}$$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$: $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.
   Indication : on commencera par encadrer $\sin x$.

   (b) Étudier les limites en $+\infty$ de u et de v.

   (c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

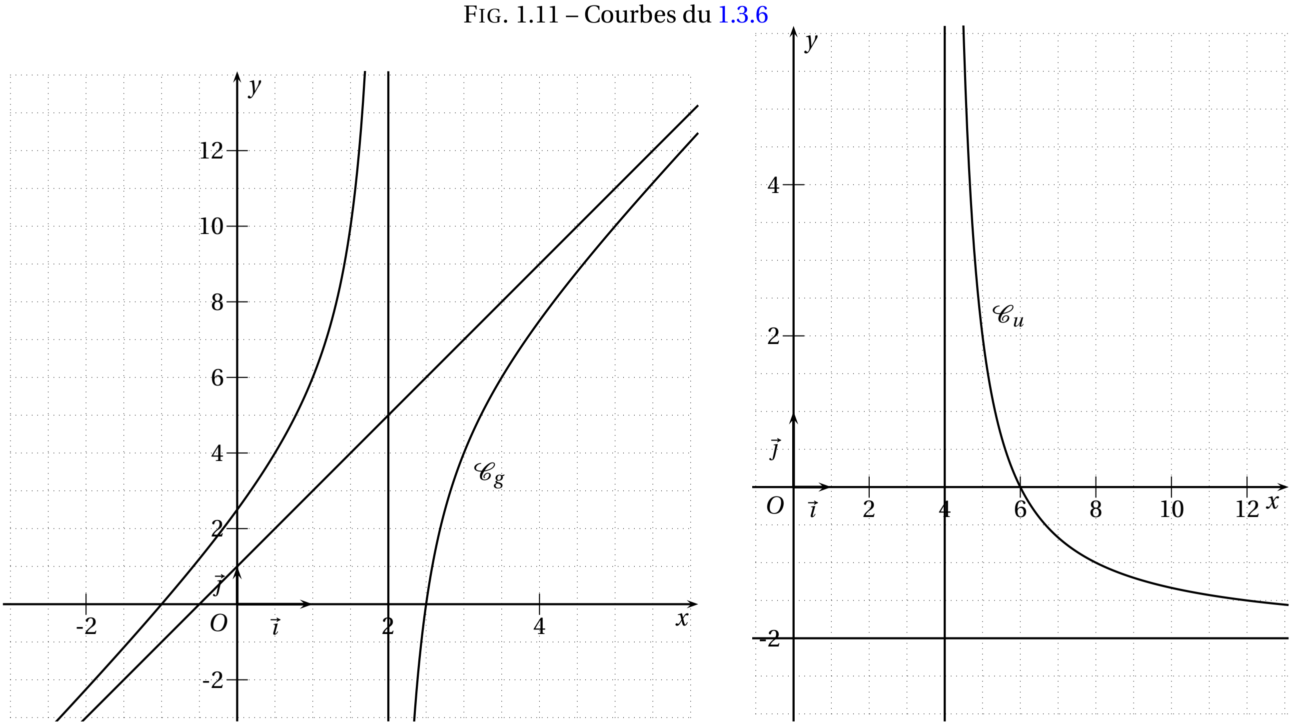
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{9x^2+1} - 2x$.

   (a) Montrer que $\sqrt{9x^2+1} \geq 3x$.

   (b) En déduire que $f(x) \geq x$.

   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

FIG. 1.11 – Courbes du 1.3.6



1.4 Bilan et compléments

1.4.1 Fonction continue

En terminale ES on ne vous demandera pas de démontrer qu'une fonction est continue et l'appréhension graphique de la notion est suffisante. Ainsi une fonction est dite continue si sa courbe représentative ne présente aucun saut, aucun trou, aucune asymptote verticale. Cependant la continuité est définie précisément en mathématiques de la façon suivante :

Définition 1.1. Une fonction f est dite continue en un réel a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarques. Cette définition implique que :
- il est nécessaire que $f(x)$ soit définie en a pour être éventuellement continue ;
- il faut en plus que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ pour qu'elle y soit continue.

Définition 1.2. Une fonction f est dite continue sur un intervalle I si, pour tout réel $a \in I$, f est continue en a.

Propriété 1.1. *Les fonctions affines, carrée, cube, racine, polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
Les fonctions inverses et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition, c'est-à-dire en tout point où leur dénominateur ne s'annule pas.

On l'admettra.

Valeurs intermédiaires

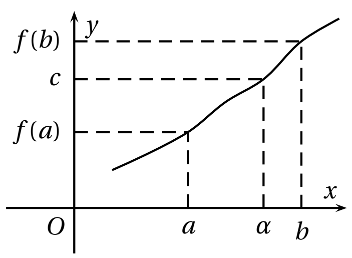
Propriété 1.2 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution $\alpha \in [a\,;b]$.*

Théorème 1.3 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution $\alpha \in [a\,;b]$.*

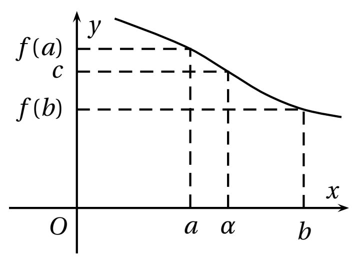
On l'admettra.

Exemples 1.1. La figure 1.12 de la présente page présente quatre cas typiques.

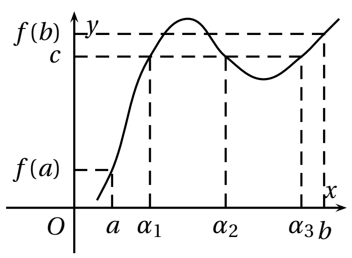
FIG. 1.12 – Quatre schémas illustrant propriété et théorème des valeurs intermédiaires



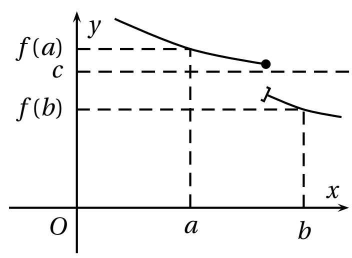
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'équation $f(x) = c$ peut avoir plusieurs solutions.



f n'est pas continue sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solution.

Tableau de variation

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation signifie que sur l'intervalle considéré la fonction est continue et strictement croissante. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (voir l'activité 1.2.5 page 10).

1.4.2 Inégalités et limites

Propriété 1.4. *Soient f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I et soient α et β pouvant être des réels ou $\pm\infty$.*

- *Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.*
- *Si $f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.*
- *Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = \beta$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.*

On l'admettra.

Remarque. La dernière propriété est parfois appelée « le théorème des gendarmes ».

1.4.3 Fonctions composées

Définition 1.3. Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.
On appelle fonction composée de f et de g la fonction h définie pour tout $x \in D_f$ par $h(x) = g\big(f(x)\big)$.
On notera parfois $h = g \circ f$.

Propriété 1.5. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.*
Si f et g sont dérivables alors la fonction $h = g \circ f$ est dérivable et $h'(x) = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$.

On l'admettra.

Exemples 1.2. On démontre facilement les formules suivantes (qui sont plus faciles à appliquer que celle de la propriété) :

- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété 1.6. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.*
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{X\to\beta} g(X) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g\big(f(x)\big) = \gamma$ où α, β et γ peuvent être des réels ou $\pm\infty$.

On l'admettra.

1.5 Exercices

Exercice 1.1.

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 24$.

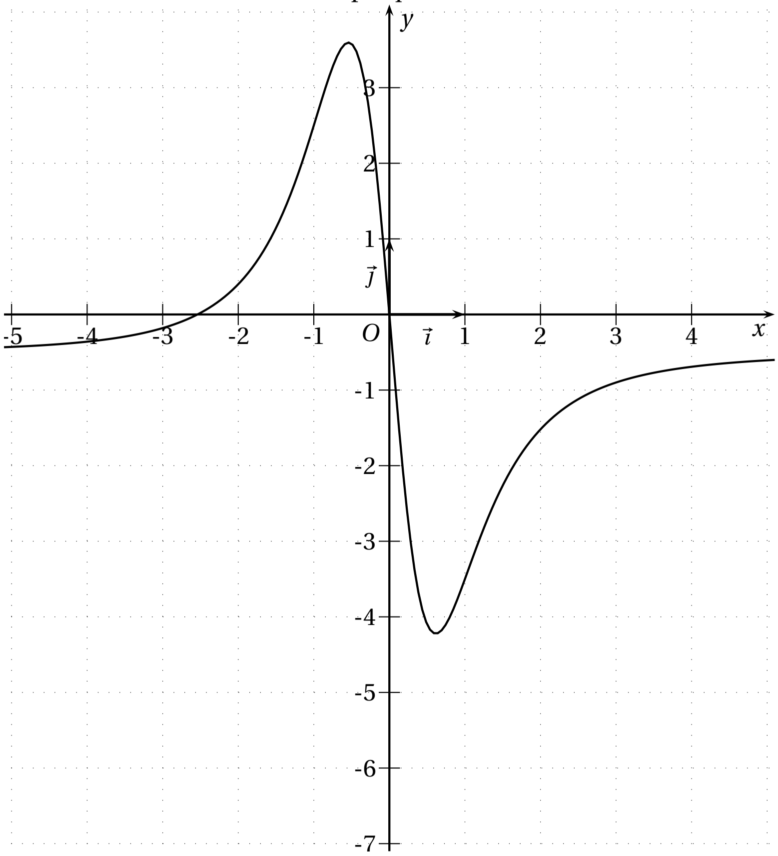
1. Étudier la fonction g (limites aux bornes et variations).
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(x) = 0$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B. Étude de la fonction f.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^3 - 8x^2 + 4}{2x^2 + 2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-2x \times g(x)}{\left(2x^2+2\right)^2}$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f.
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -\frac{x}{2} - 4$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.
5. Donner les équations des tangentes $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectviement aux points d'abscisses 1 et -1.
6. Le courbe Γ représentative de la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous dans le repère $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Représenter les droites Δ, $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ puis $\mathscr{C}_f$.

FIG. 1.13 – Graphique de l'exercice 1



Exercice 1.2 (D'après Liban 2005).

Le tableau d'informations n°1 ci-dessous fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

TAB. 1.9 – Tableau d'informations n°**1**.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $u(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $u'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	

1. Établir un tableau des variations de la fonction u.
2. On considère maintenant les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ et $g(x) = (u(x))^3$ où u désigne la fonction de la question précédente.
   (a) Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :
   Affirmation 1 : « La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ » ;
   Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ ».
   (b) Donner les variations des fonctions f et g. Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).
   (c) Déterminer, en justifiant avec soin, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.
   (d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u'.

TAB. 1.10 – Tableau d'informations n°**2**.

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$u(x)$	4	-2	$-\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	-5	1	0	3	5

Terminer chacune des deux phrases **a.** et **b.** par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres ci-dessous, en justifiant votre choix.

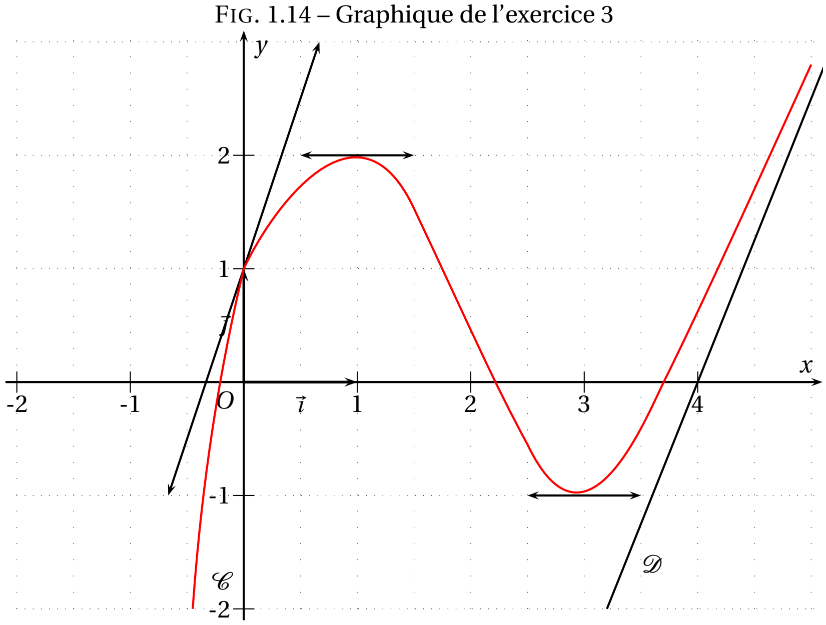
(a) La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :
- à l'axe des abscisses
- à la droite d'équation $y = x$
- à la droite d'équation $y = 3x$

(b) Le nombre $f'(-2)$:
- n'existe pas
- vaut -20
- vaut $-\frac{4}{5}$
- vaut $-\frac{5}{4}$
- vaut $\frac{5}{4}$

Exercice 1.3 (D'après Liban 2006).

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. On sait que la fonction f est croissante sur $]-1\,;1]$ et sur $[3\,;+\infty[$ et que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

FIG. 1.14 – Graphique de l'exercice 3



I. Étude graphique de la fonction f

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point ; une mauvaise réponse retire* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point.*

1. Une asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation :
   - $y=-1$
   - $x=1$
   - $x=-1$
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation :
   - $y=\frac{5}{2}x-10$
   - $y=\frac{5}{2}x-9$
   - $y=3x-10$
3. Le nombre dérivé de f en 0 est :
   - 1
   - 3
   - -3
4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $]-1\,;+\infty[$ est :
   - 2
   - 1
   - 3

II. Étude d'une fonction g

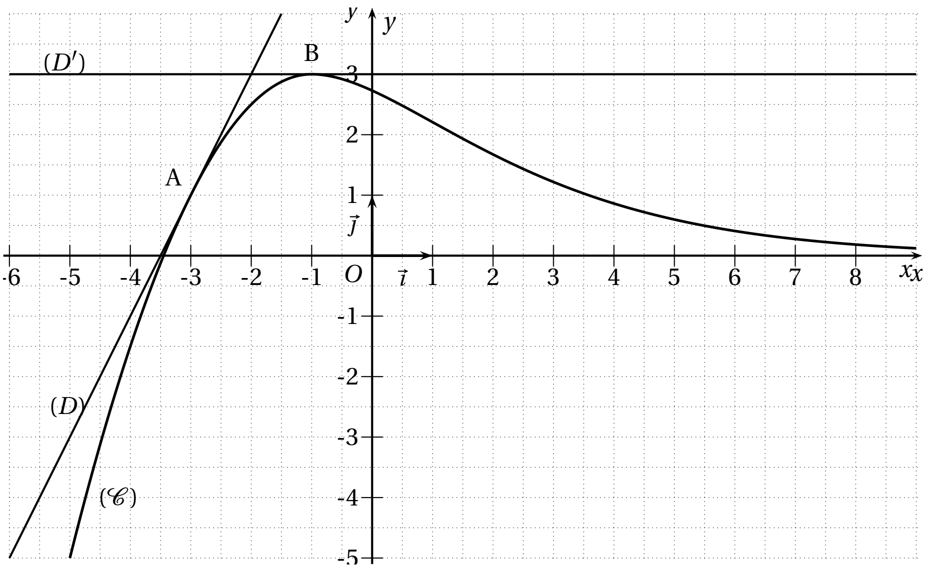
On note g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$.
2. Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.
3. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, l'ensemble des solutions sur $]-1\,;+\infty[$ de l'inéquation $g(x)\leqslant 1$.

Exercice 1.4 (D'après Nouvelle Calédonie mars 2007).
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	3	$\searrow$ 0

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points A$(-3\ 1)$ et B$(-1\,;3)$ et son intersection avec l'axe des abscisses a pour abscisse α. Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.



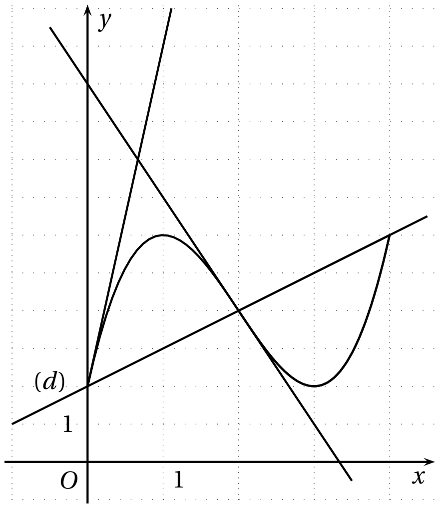
1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(f(x)\right)^3$.
   On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier que f et g ont les mêmes variations.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (on justifiera les résultats).
   (c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   On admet que h est dérivable sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$.
   (a) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition (on justifiera le résultat).
   (b) Calculer $h'(-3)$.

Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions – Dérivation

EXERCICE 1 *D'après Centres étrangers 2007 – 7 points*

On considère une fonction f définie et dérivable sur $I = [0; 4]$; sa courbe représentative est donnée, sur la figure de la présente page, dans un repère orthogonal. On note f' la fonction dérivée de f.
Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 2 , ainsi que la droite (d) d'équation $y = x+2$.
Aux points d'abscisses 1 et 3 les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(1)$ et $f'(1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leqslant x+2$.
2. (a) Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de f sur I ; on indiquera le signe de $f'(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0; 4]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
3. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, où m, n, p et q sont des réels.
   (a) En utilisant les résultats de la question 1a, déterminer p et q.
   (b) En utilisant les résultats de la question 1b, déterminer m et n.
4. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$. Démontrer que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.

EXERCICE 2 *Adaptation libre de Centres étrangers 2007 – 7 points*

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégories d'articles par une entreprise E. On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500. On suppose que le coût total, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par

$$C_T(x) = 0,75x^2 + 3x + 4$$

où x représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

1. La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur $]0; 5]$ par :
$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}.$$
   Donner une expression de $C_M(x)$, en fonction de x.
2. (a) Déterminer $C'_M(x)$ où C'_M désigne la fonction dérivée de C_M.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $0,75x^2 - 4 = 0$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $0,75x^2 - 4 > 0$.
   (d) En déduire le sens de variation de C_M sur $]0; 5]$.
3. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?
4. Chaque centaine d'articles est vendue 7 000 €. La recette totale pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R_T(x) = 7x$ en milliers d'euros.
   Le bénéfice est donc défini par $B(x) = R_T(x) - C_T(x)$.
   Par le calcul déterminer :
   (a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x (à un article près) pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E ;
   (b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

EXERCICE 3 *Continuité – Composition – 6 points*

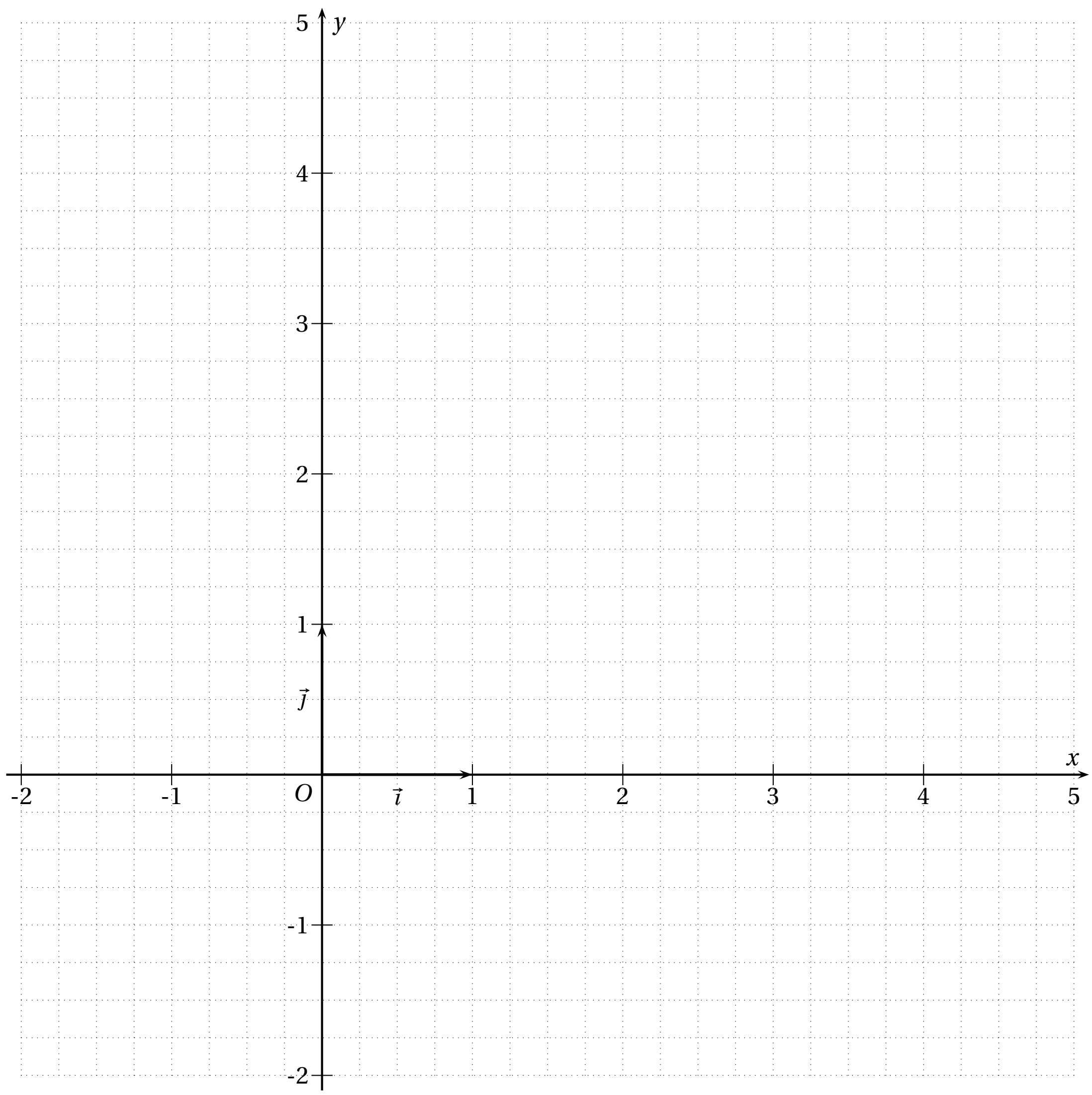
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + p & \text{si } x < 2 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. (a) f est-elle continue sur $]-\infty; 2[$? Sur $[2; +\infty[$?
   (b) Comment choisir p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?
   Tracer alors la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous.
2. On suppose dans cette partie que $p = 2$.
   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h = g \circ f$ la composée de f et de g.
   (a) Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	0,5	1	1,5	1,75	2	2,25	2,5	3	4
$f(x)$												
$h(x)$												

   (b) Tracer, sur le même repère que précédemment, la représentation graphique de h.



Devoir surveillé n°2

Généralités sur les fonctions – Limites

EXERCICE 1 *4 points*

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.
On demande de recopier sur la copie chaque proposition complétée par la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

On considère une fonction f définie sur et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

1. On peut affirmer que …
   - $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$.
   - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
2. La courbe représentative de la fonction f admet …
   - pour asymptotes les droites d'équation $y = -1$ et $y = 3$.
   - pour asymptotes les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$.
   - la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote.
   - la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote.
3. Dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ admet …
   - 0 solution.
   - 1 solution.
   - 2 solutions.
   - 3 solutions.
4. Dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 3$ …
   - n'a pas de solution.
   - a toutes ses solutions positives.
   - a pour solutions l'ensemble des réels $x > 2$.
   - a toutes ses solutions négatives.

EXERCICE 2 *5,5 points*

1. Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x + \dfrac{1}{4-2x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote pour $\mathscr{C}_f$.
   (c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une deuxième asymptote d'équation $y = 1 - 2x$.
2. Soit g la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-4}$. Calculer la limite en $+\infty$ du quotient $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

EXERCICE 3 *6,5 points*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 2$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$.
   (c) Donner le tableau des variations de f. (*Faire figurer les limites obtenues, ainsi que les valeurs des extremums de f*)
3. Montrer que l'équation $f(x) = 7$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[-4;-3]$.
   Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie de α au dixième près.

EXERCICE 4 *4 points*

La courbe $(\mathscr{C})$ de la figure 1.15 de la présente page est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$. On sait que :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(2\,;\,0)$;
- la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote l'axe des abscisses.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$?
3. Une des trois courbes de la figure 1.16 de la présente page est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   (a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) Laquelle de ces trois courbes est la courbe représentative de la fonction g ?

FIG. 1.15 – Courbe $(\mathscr{C})$

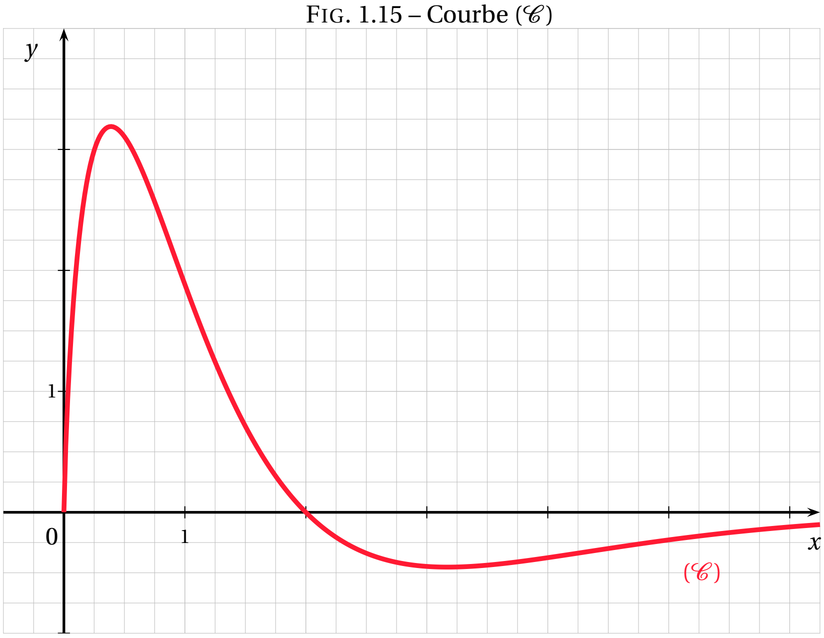
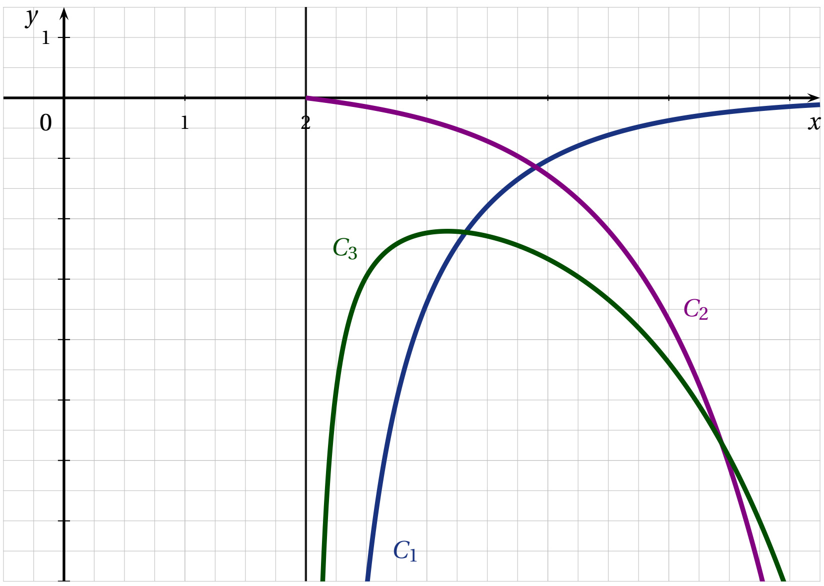


FIG. 1.16 – Trois courbes



Chapitre 2

Statistiques

Sommaire

2.1 Statistiques à une variable (rappels)

Étant des rappels de Première, les exemples seront limités et les propriétés ne seront pas démontrées.

2.1.1 Moyenne, variance et écart-type

Définitions

Définition 2.1. Soit S une série statistique quantitative comportant N données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$.
On appelle *moyenne*, *variance* et *écart-type* de S, notés respectivement $\overline{x}$, V et s, les nombres tels que :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = N\overline{x} \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x} - x_i\right)^2 \qquad s = \sqrt{V}$$

Remarques.
- La *moyenne* d'une série statistique quantitative est le nombre $\overline{x}$ tel que la somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$.
- La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.
- La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs autour de la moyenne et permet de comparer la dispersion de deux séries, quand l'ordre de grandeur des données des deux séries est le même. Elle n'est pas très parlante car elle s'exprime dans le carré de l'unité du caractère.
- L'écart-type a le même rôle que la variance mais a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que le caractère.

Propriétés

Les formules de la définition sont équivalentes aux suivantes :

Propriété 2.1. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$. Dans le cas où n_i est l'effectif de la valeur x_i et où $f_i = \frac{n_i}{N}$ est sa fréquence, éventuellement exprimée en pourcentage, les formules deviennent :*

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i = \sum_i \frac{n_i}{N} x_i = \sum_i f_i x_i \qquad V = \frac{1}{N}\sum_i n_i\left(\overline{x} - x_i\right)^2 = \sum_i \frac{n_i}{N}\left(\overline{x} - x_i\right)^2 = \sum_i f_i\left(\overline{x} - x_i\right)^2$$

On dispose d'une formule plus pratique pour calculer la variance :

Théorème 2.2. *Soit S une série statistique quantitative comportant N données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$, n_i l'effectif de la donnée x_i et f_i sa fréquence. Alors on a :* $V = \left(\frac{1}{N}\sum_i n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2 = \left(\sum_i f_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$

Effet d'une transformation affine des données

Théorème 2.3. *Soit S une série statistique quantitative comportant N données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$ de moyenne $\overline{x}$, de variance V_x et d'écart-type s_x et S' la série $S' = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_N\}$ de moyenne $\overline{y}$, de variance V_y et d'écart-type s_y telle que $y_i = ax_i + b$ pour tout i, $a \neq 0$ et b étant deux réels. Alors :* $\overline{y} = a\overline{x} + b \qquad V_y = a^2 V_x \qquad s_y = |a| s_x$

Moyenne mobile

Dans le cas d'une série chronologique, afin d'atténuer les variations saisonnières, on peut remplacer chaque donnée par la moyenne de cette donnée avec les $n-1$ précédentes données. On obtient alors *un lissage par moyenne mobile d'ordre n*.

Avec la série suivante :

Année	1 997				1 998				1 999				2 000			
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Ventes	36	44	45	106	38	46	47	112	42	49	48	118	42	50	51	118
Lissage d'ordre 4				57,75	58,25	58,75	59,25	60,75	61,75	62,5	62,75	64,25	64,25	64,5	65,25	65,25

On peut alors observer une progression faible mais régulière des ventes au cours du temps, ce que ne permettaient pas les données trimestrielles.

2.1.2 Médiane, quartiles et déciles

Définitions

Définition 2.2. Soit S une série statistique quantitative.

- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté m (ou parfois Q_2), tout réel tel que
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à m
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à m
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3

De la même manière qu'on a défini les quartiles, on peut définir les *déciles* : ce sont les 9 nombres qui partagent la série en dixièmes (comme les trois quartiles partagent la série en quarts).

On s'intéressera à deux d'entre eux :

Définition 2.3. Soit S une série statistique quantitative.

- On appelle *premier décile*, noté D_1, tout réel tel que
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_1
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_1
- On appelle *neuvième décile*, noté D_9, tout réel tel que
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_9
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_9

Définition 2.4. Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. On appelle :

- *étendue* de la série la différence $e = x_n - x_1$;
- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$;
- *écart interdécile* la différence $D_9 - D_1$;
- *intervalle interdécile* l'intervalle $[D_1 ; D_9]$.

Remarques. • Toutes ces mesures statistiques sont dans la même unité que les valeurs de la série.

- La médiane, les quartiles et les déciles ont l'avantage de ne pas être influencés par les valeurs extrêmes. La médiane n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

Propriétés

Propriété 2.4. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.
- *Si n est impair,* ***la*** *médiane m de S est le* $\frac{n+1}{2}$*-ième élément de la série :* $m = x_{\frac{n+1}{2}}$
- *Si n est pair, tout nombre compris entre le* $\frac{n}{2}$*-ième et le* $\left(\frac{n}{2}+1\right)$*-ième élément de la série est* ***une*** *médiane. On prend généralement* $m = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.

Heureusement, une formule permet de trouver une valeur convenable dans tous les cas :

Théorème 2.5. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. *Les réels suivants définissent toujours des valeurs convenables pour, respectivement, le premier quartile, la médiane et le troisième quartile :*

$$Q_1 = x_{\left(E\left(\frac{n}{4}\right)+1\right)} \qquad m = x_{\left(E\left(\frac{n}{2}\right)+1\right)} \qquad Q_1 = x_{\left(E\left(\frac{3n}{4}\right)+1\right)}$$

Remarques.
- $E(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier n tel que $n \leq x < n+1$. Par exemple, $E(2,3) = 2$ et $E(3) = 3$.
- Les réels obtenus avec le théorème sont toujours des éléments de la série.
- On n'obtient pas toujours la même valeur pour la médiane ou pour les quartiles pour une même série car, comme plusieurs nombres conviennent, les façons d'en obtenir un peuvent différer d'un statisticien à l'autre ou d'un logiciel à l'autre. Cela n'a pas beaucoup d'importance car, quand les séries ont un grand effectif, les différences sont minimes et quand les séries ont un faible effectif on ne mobilise pas la statistique.

Effet d'une transformation affine des données

Théorème 2.6. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, *où* Q_1, Q_3, *m et Q sont respectivement les premier et troisième quartile, la médiane et l'écart interquartile et* S' *la série* $S' = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n\}$, *où* Q'_1, Q'_3, m' *et* Q' *sont respectivement les premier et troisième quartile, la médiane et l'écart interquartile et telle que* $y_i = ax_i + b$ *pour tout i,* $a \neq 0$ *et b étant deux réels.*
- *Si* $a > 0$, *alors* $Q'_1 = aQ_1 + b$, $m' = am + b$ *et* $Q'_3 = aQ_3 + b$ *sont respectivement des premier quartile, médiane et troisième quartile de* S'.
- *Si* $a < 0$, *alors* $Q'_1 = aQ_3 + b$, $m' = am + b$ *et* $Q'_3 = aQ_1 + b$ *sont respectivement des premier quartile, médiane et troisième quartile de* S'.
- $Q' = |a|Q$.

2.1.3 Représentations graphiques

Diagramme à bâtons, Histogramme

Si les données sont regroupées en classes (intervalles), la série peut-être représentée par un histogramme où chaque rectangle a son *aire* proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) de la classe.

Ainsi si on considère la série :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	3	5	6	5	6	7	7	10	13	20	25	21	23	12	10	5	7	5	3	2	1

Et la même regroupée en classe :

x_i	$[0;5,5]$	$]5,5;8,5]$	$]8,5;11,5]$	$]11,5;14,5]$	$]14,5;20]$
n_i	30	30	66	45	23

On obtient les diagramme en bâtons et histogramme des figures 2.1 et 2.2 page suivante.

FIG. 2.1 – Diagramme en bâtons

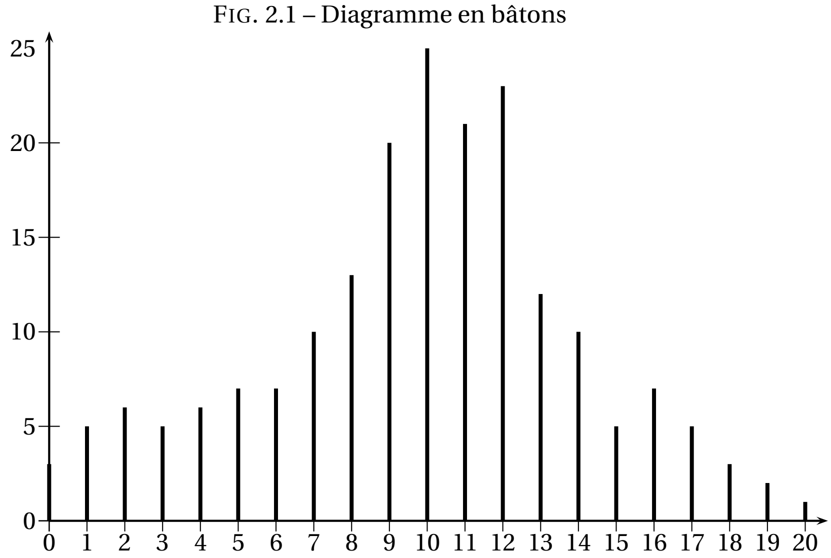
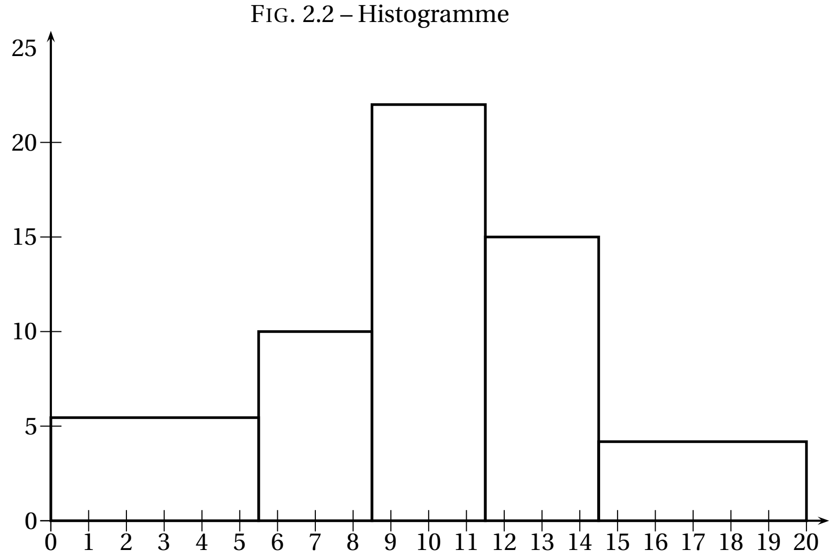


FIG. 2.2 – Histogramme

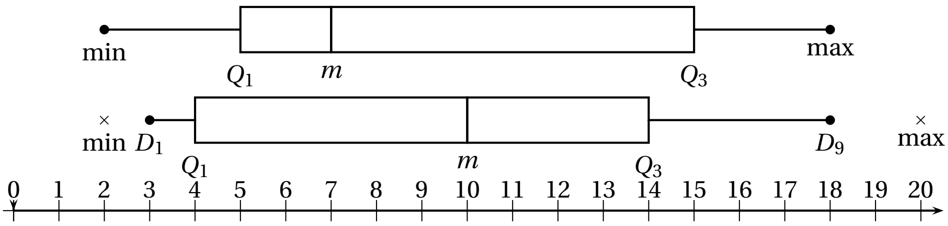


x_i	$[0;5,5]$	$]5,5;8,5]$	$]8,5;11,5]$	$]11,5;14,5]$	$]14,5;20]$
n_i	30	30	66	45	23
Aire = n_i	30	30	66	45	23
Largeur = amplitude de la classe	5,5	3	3	3	5,5
Hauteur = $\dfrac{\text{Aire}}{\text{Largeur}}$	5,45	10	22	15	4,18

Diagramme en boite

On peut représenter graphiquement les valeurs extrêmes, les quartiles et la médiane par un diagramme en boite, appelé aussi boite à moustaches, conçues de la manière suivante :

- au centre une boite allant du premier au troisième quartile, séparée en deux par la médiane ;
- de chaque côté une moustache allant du minimum au premier quartile pour l'une, et du troisième quartile au maximum pour l'autre.



Ces diagrammes permettent une interprétation visuelle et rapide de la dispersion des séries statistiques. Ils permettent également d'apprécier des différences entre des séries (lorsqu'elles ont des ordres de grandeurs comparables).

Remarques.
- La hauteur des boites est arbitraire (on les fait parfois proportionnelles à l'effectif total de la série).
- La boite contient les 50% des données centrales.
- On coupe parfois les moustaches de part et d'autre à la hauteur du premier et neuvième décile ; on fait alors apparaître les minimum et maximum par un point (voir la seconde boite du schéma précédent).

2.1.4 Exercices

Exercice 2.1.

On a relevé le prix de vente d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs. Les résultats forment une série statistique à une variable donnée par le tableau ci-dessous.

Prix de vente (en €)	15	16	17	18	19
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

1. Quelles sont les différentes valeurs de la série.
2. Donner la fréquence correspondant à chacune de ces valeurs.
3. Donner la moyenne et l'écart-type de la série. Que représentent ces nombres ?
4. Représenter la série par un diagramme à bâtons.

Exercice 2.2.

Dans une classe de 30 élèves, la moyenne des 20 filles est 11,5 et la moyenne des 10 garçons est 8,5. Donner la moyenne de classe.

Exercice 2.3.

On donne la série suivante : 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 17.

1. Représenter le diagramme en boîte correspondant en coupant les moustaches aux premier et neuvième décile.
2. Quel est l'écart interquartile de la série ?
3. Quel est l'intervalle interdécile de la série ?

Exercice 2.4.

Le tableau ci-dessous donne une répartition des salaires mensuels en euros des employés dans une entreprise.

Salaire	[1 000 ; 1 200[	[1 200 ; 1 500[	[1 500 ; 2 000[	[2 000 ; 3 000[	[3 000 ; 10 000[
Effectif	326	112	35	8	3

1. Quel est le nombre d'employés de l'entreprise ?
2. Quel est le nombre d'employés touchant un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 200 € ?
3. Représenter les données par un histogramme.
4. Quel est le salaire moyen des employés de l'entreprise ?

Exercice 2.5.

Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes.
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1. Organiser les relevés dans le tableau d'effectifs suivant :

Valeur	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Effectif																		
Effectif cumulé croissant																		

2. Représenter les données par un diagramme à bâtons. Un diagramme circulaire serait-il intéressant ?
3. Calculer la moyenne de la série. Déterminer sa médiane. Déterminer les premier et troisième quartiles puis les premier et neuvième déciles.
4. Construire le diagramme en boîte correspondant.
5. On regroupe les données en classes. Compléter le tableau des effectifs suivants :

Valeur	[33 ; 37[	[37 ; 340[	[40 ; 42[	[42 ; 44[	[44 ; 47[	[47 ; 51[
Effectif						

Dessiner l'histogramme correspondant.

Exercice 2.6 ((d'après Gilbert Gasse)). 1. Le fichier Lissage1.xls contient un tableau permettant de comparer les variations annuelles de la productivité horaire du travail en pourcentages pour la France et les États-Unis de 1 980 à 1 998.
   (a) En utilisant le type de graphique « courbes », représenter ces deux séries statistiques sur un même graphique.
   (b) Pour opérer un lissage, compléter le tableau avec les variations corrigées pour chaque pays de 1 981 à 1 997 en calculant la moyenne de trois années : celle qui précède, l'année en cours et l'année qui suit. (Pour 81, on fait la moyenne de 2,8 4,0 et 5,5 qui correspondent aux années 80, 81 et 82.)
   (c) Faire trois nouveaux graphiques de deux courbes : (les cases grises doivent être sélectionnées)
      i. Variations corrigées pour la France et les États-Unis.
      ii. Variations et variations corrigées pour la France
      iii. Variations et variations corrigées pour les États-Unis
      (Garder les mêmes couleurs pour représenter les mêmes données)
   (d) i. Comparer les graphiques du 1a et du 1(c)i.
      Comparer les sens de variations de la productivité du travail dans les deux pays.
      ii. Comparer les lissages obtenus grâce aux deux derniers graphiques.
   (e) Pour chaque pays, calculer l'augmentation totale de productivité horaire de 1 980 à 1 998.

2. Le fichier Lissage2.xls continet un tableau qui donne l'évolution de la température de l'air à la surface de la Terre, en degrés Celsius, depuis 1 860. *Source : Alternatives Economiques, hors-série 46.* Compléter la troisième colonne, en calculant la moyenne des températures de trois années : celle qui précède, l'année en cours et l'année qui suit. (pour 1 862, on fera la moyenne des températures de 1 860, 1 862 et 1 864).
   Tracer un graphique avec les données et la courbe de lissage en utilisant un graphique « courbes ».
3. Le fichier Lissage3.xls contient un tableau qui donne l'évolution sur plus de 5 ans de l'indice trimestriel du chiffre d'affaires total d'un secteur.
   (a) Représenter graphiquement ces données (graphique « courbes ») en utilisant le tableau de la feuille suivante. En abscisses, on placera les 22 trimestres et en ordonnées, les indices.
   (b) Ces indices sont des données brutes. Nous allons remplacer chacun d'eux, à partir du 3e trimestre 1996 et jusqu'au 4e trimestre 2 000 par une moyenne pondérée.
   L'indice brut x_i sera remplacé par : $\dfrac{\frac{x_{i-2}}{2}+x_{i-1}+x_i+x_{i+1}+\frac{x_{i+2}}{2}}{4}$.
   Ces indices sont des indices corrigés.
   Compléter le tableau de la feuille « tableau »et placer les points correspondants dans le même repère que les précédents (d'une autre couleur).
   (c) Ces nouveaux points sont presque alignés et la tendance générale est à l'accroissement.
   Pour permettre des prévisions pour 2 001 et 2 002, l'idée est de définir une droite représentant cette tendance moyenne et de la prolonger pour les trimestres futurs.
      i. Calculer les coordonnées du point A dont l'abscisse est la moyenne des abscisses des neuf premiers points et l'ordonnée la moyenne des ordonnées de ces neuf points.
      Calculer de même les coordonnées du point B pour les neuf derniers points.
      ii. Déterminer une équation de la droite (AB). (On arrondira les coefficients à 0,01 près)
      Compléter les cases sous le tableau. Tracer cette droite dans le même repère.
      Cette droite est une droite de tendance. Les ordonnées de ses points sont les indices tendanciels

(d) Compléter le tableau avec les indices tendanciels tirés de l'équation de la droite (AB) à partir du premier trimestre 1 996 et jusqu'au deuxième trimestre 2 001.

(e) Ces indices tendanciels ne suivent pas les fluctuations trimestrielles des données.
Pour permettre des estimations par trimestre, on doit appliquer des coefficients correcteurs.
On calcule tout d'abord les rapports des indices connus par les indices tendanciels calculés.
Compléter la colonne correspondante.
Le coefficient correcteur pour chaque trimestre est alors la moyenne des rapports correspondant à chacun des quatre trimestres.
Dans la partie rouge, en bas du tableau, compléter la colonne coefficients trimestriels en commençant par le troisième trimestre.
Remarques : les coefficients sont les mêmes pour chaque troisième trimestre, chaque quatrième etc ; la somme des quatre coefficients correcteurs est 4.

(f) Compléter le bas de la colonne « indice tendanciel »comme au 3d Puis multiplier ces indices par le coefficient correcteur pour obtenir les indices prévus dans la dernière colonne.

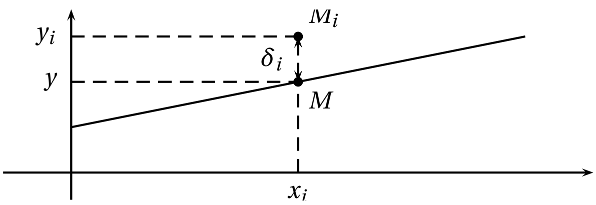
2.2 Statistiques à deux variables

2.2.1 Activité

Activité 2.1 (Délit d'initié (d'après Yallouz Arie)).
La petite histoire racontée ci-dessous n'a bien sûr rien à voir avec des faits réels.
Un financier assure lors d'un procès intenté contre lui sous le motif de « délit d'initié », avoir basé ses achats d'actions d'une grande entreprise sur les données publiques résumées dans le tableau ci-dessous, donnant pour onze trimestres consécutifs un indicateur des ventes et un indicateur de la valeur de ses actions en bourse.

Trimestre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vente	100	95	67	80	87	55	70	90	82	50	90
Cours	85	77	74	62	67	69	56	63	71	68	54

1. Représenter graphiquement l'évolution du cours des actions en fonction de l'indicateur des ventes.
Cette représentation graphique permet-elle d'anticiper le cours de l'action ?
2. Au cours du procès l'avocat du financier présente un graphique où l'on regarde comment évolue l'indicateur du cours boursier (y) en fonction de l'indicateur de vente du trimestre *précédent* (x).
   (a) Représenter graphiquement l'évolution du cours des actions en fonction de la vente au trimestre précédent.
   (b) Quelle est la forme du nuage de points obtenu ?
   (c) N_1 désigne le nuage correspondant aux cinq premiers points et N_2 celui correspondant aux cinq derniers points.
   - Calculer les coordonnées du point moyen G_1 du nuage N_1 et celles du point moyen G_2 du nuage N_2.
   - Donner une équation de la droite (G_1G_2) (*on arrondira les coefficients au centième*) et la tracer.
   - Vérifier que cette droite passe par le point moyen G du nuage de points.
3. Le financier assure avoir basé sa prévision du cours de bourse à l'aide d'une droite Δ d'équation : $y = 0,44x+31,86$.
L'objet de cette question est de comparer les deux types d'ajustement.
   (a) On ajuste les points (M_i) d'un nuage par une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$, on note δ_i l'écart entre le point $M_i\left(x_1 ; y_i\right)$ du nuage et le point M de même abscisse x_i appartenant à la droite Δ.
   Ainsi $\delta_i = y_i - y = y_i - (ax_i + b)$ (voir figure ci-contre).
   Compléter le tableau 2.1 page suivante.



   (b) La somme $\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$ est appelée somme des résidus en y. Comparer les deux sommes. Que remarquez-vous ?
4. L'objet de cette question est d'effectuer un ajustement affine par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire de déterminer la droite D d'équation $y = ax + b$ tele que la somme des résidus $S = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$ soit minimale.
Cette droite est apellée droite de régression.
   (a) Dans un premier temps, on suppose connu le coefficient directeur a de la droite D.
   - Le premier résidu est : $(77 - 100a - b)^2 = b^2 - 2b(77 - 100a) + (77 - 100a)^2$.
   Développer de même les neufs autres résidus.

- Vérifier que la somme S est un polynôme du second degré en b.
- Montrer que la somme S est minimale pour $b = 66,1 - 77,6a$.
- En déduire que le point moyen G appartient à la droite D.

(b) Calcul du coefficient directeur a.
- En remplaçant b par $66,1 - 77,6a$, vérifier que la somme S est un polynôme du second degré en a.
- En déduire la valeur de a pour laquelle S est minimal, puis celle de b.
- Donner l'équation réduite de la droite D. Comparer avec celle de Δ.

TAB. 2.1 – Comparaison des ajustements

x_i (vente au trimestre i)	y_i (cours au trimestre $i+1$)	Avec la droite (G_1G_2) $\left[y_i - (0,43x_i + 32,59)\right]^2$	Avec la droite Δ $\left[y_i - (0,44x_i + 31,86)\right]^2$
100	77		
95	74		
67	62		
80	67		
87	69		
55	56		
70	63		
90	71		
82	68		
50	54		
Somme			

2.2.2 Bilan et compléments

Nuage de points, point moyen

On suppose que, suite à une étude, on s'intéresse à deux variables numériques discrètes sur une population. À chaque individu de cette population on associe ainsi un couple $(x_i\,;\,y_i)$, où x_i est la aleur de la première variable et y_i la valeur de la seconde.
L'ensemble des couples forme une série satistiques double à deux variables, notée simplement $(x_i\,;\,y_i)$.
Si la première variable est le temps, on parle de série chronologique.

Définition 2.5. Soit $(x_i\,;\,y_i)$ une série satistique à deux variables.
- L'ensemble des points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ est appelé le *nuage de points* de la série.
- Le *point moyen* de ce nuage est le point $G\,(\overline{x}\,;\,\overline{y})$ où $\overline{x}$ est la moyenne des x_i et $\overline{y}$ la moyenne des y_i.
- On appelle *droite de régression*, ou ajustement affine, toute droite conçue pour passer *au plus près* des points du nuage.

Remarque. Un ajustement affine n'a de sens que si les points sont presque alignés (si le nuage a une forme allongée régulière). Il existe d'autres types d'ajustements quand le nuage de point n'a pas cette allure et nous en verrons quelques uns en exercice.

Droite de régression par la méthode de MAYER

Définition 2.6. Soit N un nuage de points. Soient N_1 et N_2 les deux sous nuages constitués respectivement de la première moitié des points de N et de la dernière moitié des points de N. Soient enfin G_1 et G_2 les points moyens respectifs de N_1 et N_2.
Alors la droite (G_1G_2) est appelée *droite de* MAYER.

Remarque. Si le nombre de points de N est impair, l'un des deux sous nuages contient un point de plus que l'autre.

Droite de régression par la méthode des moindres carrés

La distance d'un point $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ à une droite d'équation $y = ax + b$ étant celle entre le point M_i et le point de la droite d'abscisse x_i et S la somme des carrés de ces distances, on admet qu'il existe une droite pour laquelle S est minimale :

Propriété 2.7. *La* droite de régression *de y en x par la méthode des moindres carrés est la droite :*
- *passant par le point moyen* $G\left(\overline{x};\overline{y}\right)$ *;*
- *de coefficient directeur :* $a=\dfrac{cov(x;y)}{V(x)}$ *où :*
  - $V(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$ *est la variance des* x_i
  - $cov(x;y)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$ *est la* covariance *de x et y.*

L'équation réduite de cette droite de régression est alors $y=a(x-\overline{x})+\overline{y}$.

On l'admettra.

Remarques.
- La calculatrice permet d'obtenir directement les coefficients de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, ce qui évite les longs calculs.
- La droite de régression de y en x n'est pas la même que la droite de régression de x en y. La première minimise la somme des carrés des distances « verticales », la seconde a somme des carrées des distances « horizontales ».

2.2.3 Exercices

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Exercice 2.7.

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
Nombre de lits X	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes Y	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i;y_i\right)$ correspondant à cette série (*unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 10 lits ; en ordonnée 1 cm pour 20 postes*).
   D'après l'allure du nuage, un ajustement affine est-il justifié ?
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. (a) Déterminer une équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer $\mathscr{D}$ qur le graphique.
   (b) On dit que la droite de régression obtenue par la méthode des moindres carrés est très sensible aux valeurs extrêmes (ou aberrantes). Faites une expérience pour illustrer cette affirmation en changeant l'une des données.
4. Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 3a, à combien peut-on estimer, par le calcul, le nombre de postes de personnel non médical ? Illustrer votre réponse sur le graphique.

Exercice 2.8.

La tableau suivant donne le PNB (en € par habitant) ainsi que le nombre d'hôpitaux (pour 1 million d'habitants) dans quelques pays européens :

Pays	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X = PNB (en € par habitant)	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	22 500	26 200	28 900
Y = nombre d'hôpitaux par million d'habitants	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 250	3 800	4 200

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(X;Y)$ (*unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 000 € ; en ordonnée 1 cm pour 200 hôpitaux*).
   On prendra pour origine le point (5 000 ; 600).
   D'après l'allure du nuage un ajustement affine est-il justifié ?
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Placer G sur le graphique.
3. *Droite de* MAYER
   Dans cete question, on considère deux sous-nuages : celui constitué des points correspondants aux pays P_1, P_2, P_3 et P_4 et celui constitué des points P_5, P_6, P_7 et P_8.
   (a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux sous-nuages. Placer G_1 et G_2 sur le graphique.
   (b) Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2), où les coefficients sont arrondis à 10^{-2}, est : $y=0,15x-199$. La représenter sur le graphique.

(c) Compléter le tableau suivant :

X	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	22 500	26 200	28 900
Y	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 250	3 800	4 200
$0,15X-199$								
$Y-(0,15X-199)$								
$[Y-(0,15X-199)]^2$								

En déduire la somme des résidus quadratiques S associée à la droite de MAYER.

4. *Par les moindres carrés*
Déterminer une équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés. La représenter sur le graphique.
5. La somme des résidus quadratiques S' associée à $\mathscr{D}$ est $S' \approx 35\,482,50$. Laquelle des deux droites réalise-t-elle le meilleur ajustement affine ?
6. *Estimations*
À l'aide de l'équation de $\mathscr{D}$ et en détaillant les calculs répondre aux questions suivantes :
   (a) Un pays a un PNB de 23 400 € par habitant. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux par million d'habitants dans ce pays ? (*Arrondir à l'unité*)
   (b) Un pays a 3 500 hôpitaux par million d'habitants. À cobmien peut-on estimer son PNB en € par habitant ? (*Arrondir à l'unité*)

Exercice 2.9.
Un hypermarché dispose de 20 caisses. Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes :

Nombre de caisses ouvertes X	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

1. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ correspondant à cette série statistique. (*Unités graphiques : en abscisse 1 cm pour une caisse ouverte ; en ordonnée 1 cm pour une minute d'attente*).
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. *Un ajustement affine*
   (a) Déterminer l'équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés. La représenter sur le graphique.
   (b) Estimer, à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de $\mathscr{D}$:
      i. le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes ;
      ii. le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.
      Pensez-vous dans ce cas que l'ajustement affine soit fiable ?
4. *Un ajustement non affine*
On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(X)=\dfrac{\lambda}{X}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer λ de façon à avoir : $f(3)=16$.
   (b) Tracer alors $\mathscr{C}$ dans le repère utilisé pour le nuage.
   (c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant la fonction f :
      i. le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 min ;
      ii. le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.

Exercice 2.10.
Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau en m^3 utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne les résultats suivants :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé en m^3 : y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

1. Représenter la série statistique $\left(x_i\,;\,y_i\right)$.
(*Unités graphiques : abscisse 1 cm pour un jour ; ordonnée 0,5 cm pour un m^3*).
2. Donnez l'équation de la droite Δ des moindres carrés sous la forme $y=mx+p$ où m et p sont les coefficients arrondis à 10^{-2}. La représenter sur le graphique.

3. Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par une parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $A(1\,;2,25)$ et $B(10\,;27)$, et qui a pour équation $y = ax^2 + b$ où a et b sont des réels.
Déterminer a et b et donnez l'équation de la parabole $\mathscr{P}$. La représenter sur le graphique.
4. Dans cette question, on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	10
y_i	2,25	4,3	8	17,5	27
$\lvert y_i - (mx_i + p)\rvert$	2,54	0,91	2,71		
$\lvert y_i - (ax_i^2 + b)\rvert$	0	0,05	0,25		

Les sommes des deux dernières lignes évaluent, pour chaque ajustement, la somme des écarts entre les ordonnées des points du nuage et les ordonnées des points de même abscisse de l'ajustement.
Donnez les arrondis à 10^{-1} des deux totaux.
Déduisez l'ajustement qui paraît le mieux adapté.

Exercice 2.11.

Une étude fictive faite en France sur le taux d'équipement des ménages en automobile et l'âge des femmes lors de leur premier mariage donne les résultats suivants :

années	1 979	1 981	1 984	1 986	1 990	1 991	1 992	1 979	1 993	1 994	1 995
taux x_i	68,6	70	72,9	73,4	74,6	76,5	76,8	77	78	79,5	79
âge y_i	22,9	23,1	23,9	24,5	25	25,6	25,8	26,1	26,4	26,7	26,9

1. Représenter la série statistique.
(Unités graphiques : abscisse 1 cm pour 1 % origine à 66 ; ordonnée 1 cm pour 1 an origine à 22)
L'allure du nuage semble-t-il justifier un ajustement affine ?
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis déterminer l'équation réduite de la droite de regression de y en x par la méthode des moindres carrés.
3. Suivant cet ajustement affine, quel serait l'âge au premier mariage pour un taux de 90 % ? Ce calcul a-t-il un sens ?
4. Peut-on en déduire qu'il y a un lien entre le taux d'équipement des ménages en automobile et l'âge du premier mariage ? Comment expliquer la corrélation entre ces deux grandeurs ?

Chapitre 3

Calcul intégral

Sommaire

3.1 Activités

Activité 3.1 (Somme de coûts marginaux).

Production à l'unité

Une petite usine fabrique des casseroles toutes identiques.
À chaque casserole fabriquée, le service de gestion calcule le coût de sa fabrication. Ce coût est appelé coût marginal et est donné dans le deuxième colonne du tableau 3.1 page 43.
Les coûts fixes se montent à 80 €.
Au fur et à mesure de la fabrication, on somme les coûts marginaux des casseroles déjà fabriquées ; en ajoutant les coûts fixes on obtient alors le coût total.

1. (a) Lire le coût marginal de la 15$^{\text{ième}}$ casserole.
   (b) Calculer la somme des coûts marginaux de la 1$^{\text{ière}}$ à la 15$^{\text{ième}}$ casserole. À quoi correspond ce nombre ?
   (c) Où retrouve-t-on ce nombre sur chacun des graphiques obtenus sur la figure 3.1 page 43 ?
2. Faire de même pour la 20$^{\text{ième}}$ casserole et la somme des coûts marginaux de la 1$^{\text{ière}}$ à la 20$^{\text{ième}}$ casserole.
3. Quelle casserole a le plus petit coût marginal ? Quel est alors le coût total de fabrication pour ce niveau de production ?

Production continue

Dans une autre usine, on produit une pâte à bois.
Le coût marginal, en euros par kg produit, est donné par : $C_m(x) = 0{,}3x^2 - 4{,}8x + 21{,}2$ pour $x \in [0\,;\,20]$. C'est une fonction continue car on peut produire quelques grammes.

1. Calculer le coût marginal du quinzième kg produit, du vingtième et du huitième. Comparer au cas précédent.
2. La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la figure 3.1 page 43 représente le coût marginal pour x kg produits.
   (a) Comment interprèter la somme des aires des rectangles dessinés sur ce graphique ?
   (b) Calculer la somme, pour x variant de 1 en 1 : $\sum_{x=1}^{x=8} 1 \times C_m(x) = 1 \times C_m(1) + 1 \times C_m(2) + \dots + 1 \times C_m(7) + 1 \times C_m(8)$.

3. On étudie les coûts marginaux des huit premiers kg en calculant ces coûts pour chaque 500 g ou 0,5 kg.
   (a) À l'aide de la calculatrice, calculer les coûts marginaux de 0,5 kg à 8 kg de tous les 500 g, en euros par 0,5 kg, et les placer dans une liste.
   (b) Calculer la somme, pour x variant de 0,5 en 0,5 : $\sum_{x=0,5}^{x=8} = 0,5 \times C_m(0,5) + 0,5 \times C_m(1) + \cdots + 0,5 \times C_m(8)$.
   Comment pourrait-on représenter cette somme sur le graphique 3.1 ?
4. Si vous disposez d'un tableur, procéder de même en calculant les coûts marginaux tous les 100 g, en euros par 0,1 kg.
   Expliquez pourquoi la somme, pour x variant de 0,1 en 0,1 : $\sum_{x=0,1}^{x=8} 0,1 \times C_m(x)$ est très proche de l'aire sous la courbe.

Activité 3.2 (Fonctions dont on connaît la dérivée). 1. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = 2x - 3$. Vérifier que g est la dérivée de f. Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.

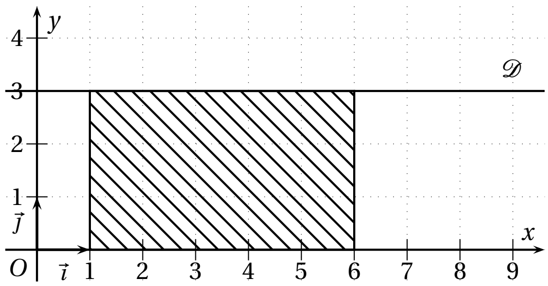
2. (a) Quelles sont les fonctions définies sur un intervalle dont la dérivée est toujours nulle sur cet intervalle ?
   (b) Soit F une fonction de dérivée f sur un intervalle I. Quelle est la dérivée de F ? De la fonction $x \longmapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$?
3. À l'aide du tableau des dérivées, trouver **une** fonction F ayant pour dérivée la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :
   (a) $f(x) = 5x^4$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$;
   (e) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$;
   (f) $f(x) = 6(2x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$

Activité 3.3 (Aire et primitive).

Fonction constante

Le droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3$ dans le repère ci-contre.

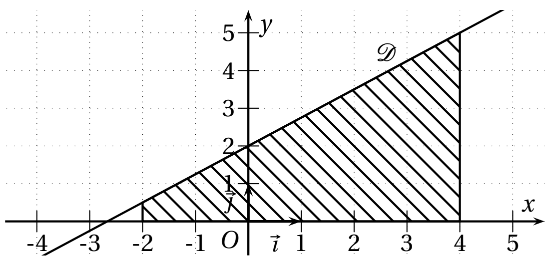
1. Calculer l'aire du rectangle hâchuré, en carreaux.
2. Donner une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(1)$.
   Comparer avec l'aire du rectangle.



Fonction affine

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{3}{4}x + 2$ représente la fonction $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$.

1. Calculer l'aire du trapèze[1] hachuré, en carreaux.
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(4) - F(-2)$.
   Comparer avec l'aire du trapèze.

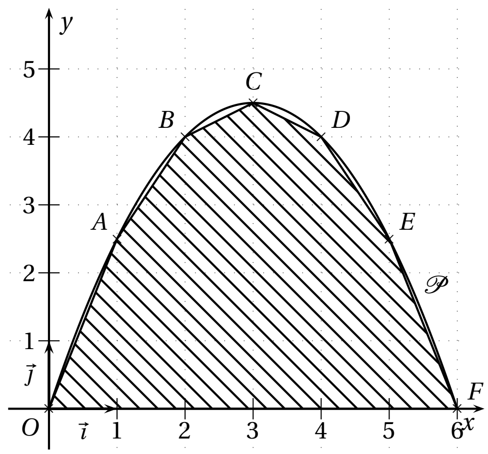


Aire sous la parabole

ARCHIMÈDE démontra à l'aide de suites que : « Un secteur parabolique compris entre une droite et une parabole est égal à 4 fois le tiers de l'aire d'un triangle ayant même base et même hauteur que ce secteur ».
Puis il le vérifia expérimentalement en cherchant la masse d'une plaque métallique ayant cette surface.
Les points O, A, B, C, D, E et F appartiennent à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.

1. Calculer l'aire $\mathscr{A}_1$ du polygone hachuré (qu'on pourra découper en plusieurs figures connues : triangles, trapèzes, etc.), puis l'aire $\mathscr{A}_2$ du triangle OCF. Vérifier que l'on a $\mathscr{A}_1 < \frac{4}{3}\mathscr{A}_2$.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.

Calculer $F(6) - F(0)$. Comparer à $\frac{4}{3}\mathscr{A}_2$.



[1] L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(b+B)\times h}{2}$ où b est la petite base, B la grande base et h la hauteur du trapèze

TAB. 3.1 – Production à l'unité

unité	coût marginal	coût total
0		80
1	16,7	96,7
2	12,8	109,5
3	9,5	119
4	6,8	125,8
5	4,7	130,5
6	3,2	133,7
7	2,3	136
8	2	138
9	2,3	140,3
10	3,2	143,5
11	4,7	148,2
12	6,8	155
13	9,5	164,5
14	12,8	177,3
15	16,7	194
16	21,2	215,2
17	26,3	241,5
18	32	273,5
19	38,3	311,8
20	45,2	357

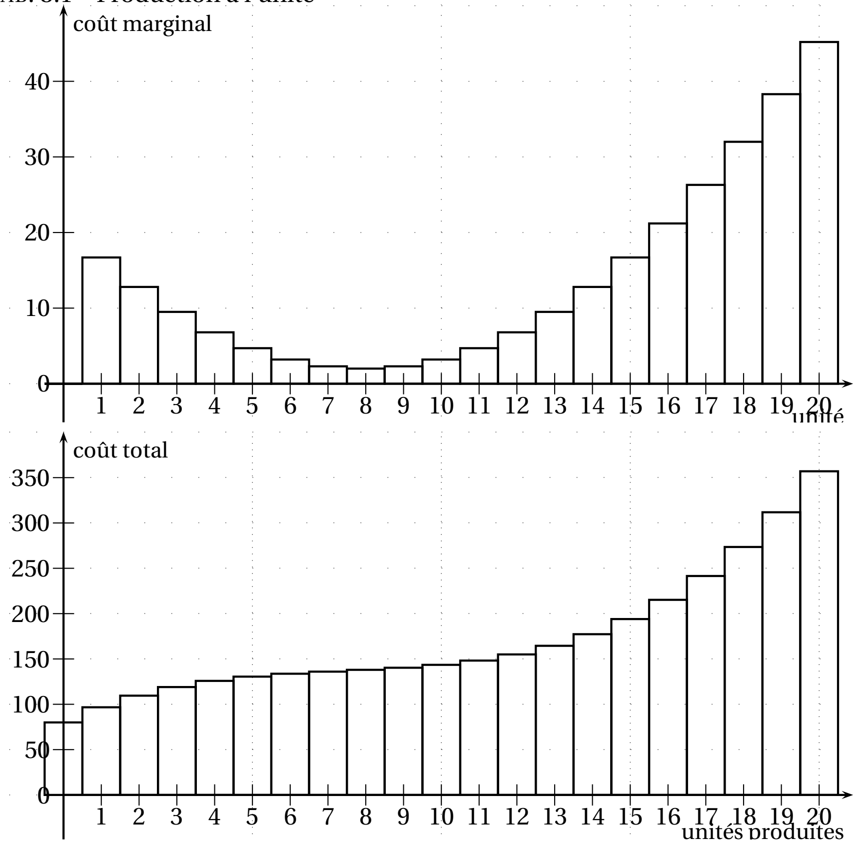
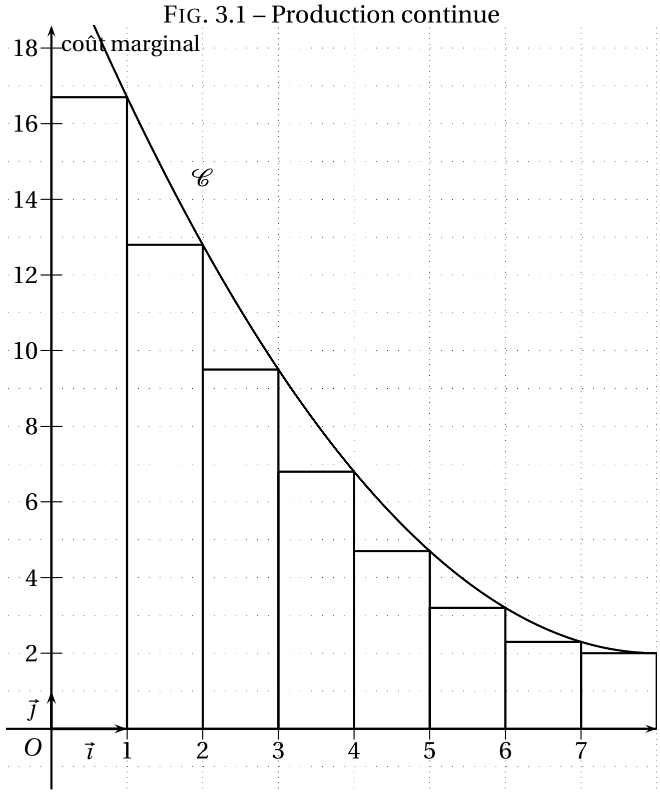


FIG. 3.1 – Production continue



3.2 Primitive d'une fonction

3.2.1 Définition et conséquences

Définition 3.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle *primitive de f* toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.

Théorème 3.1. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I*

On l'admettra.

Théorème 3.2. *Soit F une primitive de f sur un intervalle I.*
Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G = F + k$, où $k \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$.

Preuve.
- Supposons que F et G sont deux primitives de f sur I. Montrons qu'alors $G = F + k$.
  Par définition $F' = f$ et $G' = f$, donc $F' - G' = f - f = 0$, mais $F' - G' = (F - G)'$.
  Comme les seules fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes, $F - G$ est une fonction constante.
  Donc $F - G = k$, où $k \in \mathbb{R}$. Donc $F = G + k$.
- Soit F une primitive de f sur I. Montrons que $G = F + k$ est aussi une primitives de f.
  $G' = (F + k)' = F' + 0 = f$ donc G est aussi une primitive de f sur I.

◊

3.2.2 Primitive satisfaisant une condition initiale

Propriété 3.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.*
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Preuve.
- *Existence.*
  f étant continue, elle admet des primitives. Soit H l'une d'elles.
  Supposons que $H(x_0) = z_0 \neq y_0$.
  D'après le théorème 3.2, la fonction $F = H - z_0 + y_0$ est aussi une primitive de f.
  Or $F(x_0) = H(x_0) - z_0 + y_0 = z_0 - z_0 + y_0 = y_0$. Il existe donc bien une primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.
- *Unicité.*
  Soient F et G deux primitives telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$.
  D'après le théorème 3.2, $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Donc $G(x_0) = F(x_0) + k \Leftrightarrow y_0 = y_0 + k \Leftrightarrow k = 0$.
  Donc $G = F$.

◊

Exemple 3.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Déterminer **la** primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.
- On remarque que $G(x) = x^3 + x^2 + x$ est **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- On sait que toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^3 + x^2 + x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- On cherche k tel que $F(1) = -1$. Or $F(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + k = k + 3$. Donc $-1 = k + 3 \Leftrightarrow k = -4$
  Donc $F(x) = x^3 + x^2 + x - 4$ est **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.

3.2.3 Primitives des fonctions usuelles

Le tableau 3.2 page ci-contre donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré.

Les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

3.2.4 Opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau 3.3 page suivante. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

TAB. 3.2 – Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction primitive ($k \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + px + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ?$	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + k$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + k$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0\,;\,+\infty[$

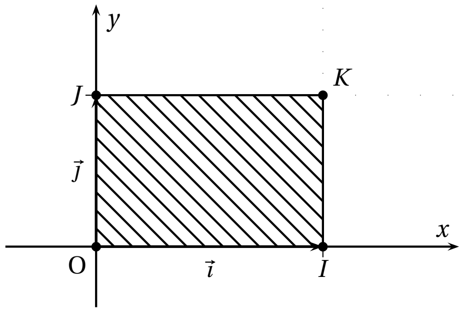
TAB. 3.3 – Opérations sur les primitives

Conditions	alors la fonction s'écrivant sous la forme	admet comme primitive
	$u' + v'$	$u + v$
Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante	ku'	ku
	$u'u^2$	$\frac{1}{3}u^3$
	$u'u^3$	$\frac{1}{4}u^4$
Soit $n \in \mathbb{N}$	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u}$	?
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^3}$	$-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}$
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$
Si $u > 0$ sur I	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
	$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$

3.3 Calcul intégral

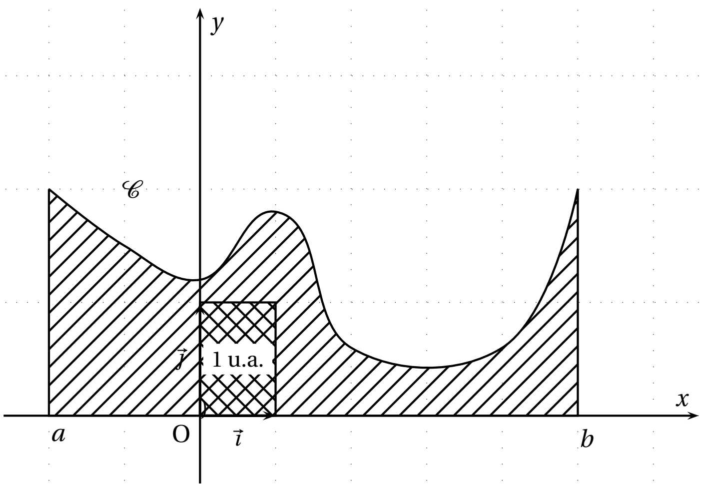
3.3.1 Interprétation graphique

Définition 3.2 (L'unité d'aire)**.** Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire$(OIKJ)=1$ u.a.



Remarques.
- $OIKJ$ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
- Si l'on a, par exemple, $OI=3$ cm et $OJ=2$ cm, alors 1 u.a. $=6$ cm^2.

Définition 3.3 (Aire sous la courbe d'une fonction positive)**.** Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I dont la représentation graphique est appelée $\mathscr{C}$.
Soient $a\leq b$ deux réels de I.
On appelle *aire sous la courbe de f de a à b* l'aire, exprimée en u.a., du domaine $\mathscr{D}$ délimité par :
- les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ (à gauche et à droite) ;
- $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses (en haut et en bas).



On a vu, dans l'activité 3.1 page 41, que la somme des aires rectangles « situés sous la courbe » s'approchait d'autant plus de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ que la base du rectangle était petite. En extrapolant ce raisonnement : lorsque la base du rectangle est infiniment petite, on la note alors dx (le d signifiant une différence infiniment petite entre deux valeurs de x), sa hauteur vaut alors $f(x)$ et l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est la somme de cette infinité de rectangle. D'où la notation suivante :

Définition 3.4 (Notation de l'aire sous la courbe)**.** Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I. Soient $a\leq b$ deux réels de I.
On note l'aire sous la courbe de f de a à b : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarques.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit aussi « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- La variable peut être indifférement t, x, y... On dit que c'est une variable *muette*.

3.3.2 Intégrale d'une fonction

Définition 3.5. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I. Soit F une primitive de f.

On appelle *intégrale de a à b de f* le nombre réel, noté $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, égal à $F(b)-F(a)$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

Remarques.
- Si $f \geq 0$ et si $a \leq b$ alors l'intégrale n'est rien d'autre que l'aire sous la courbe (on l'admettra).
- On note aussi : $F(b)-F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$.
- Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale. En effet, si on prend à la place une primitive $G = F + k$, on a $G(b)-G(a) = F(b)+k-(F(a)+k) = F(b)-F(a)$.

Propriété 3.4 (Premières propriétés)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors*
- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Preuve.
- Par définition $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a)-F(a) = 0$
- Par définition $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

◇

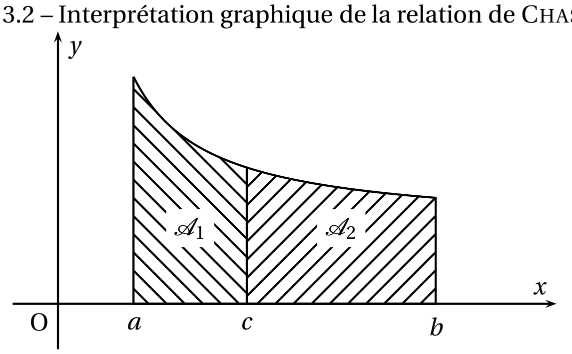
Propriété 3.5 (Relation de CHASLES)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Preuve. Par définition $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ◇

Remarque. Dans le cas où $a \leq c \leq b$ et où $f \geq 0$, on peut interpréter la relation de CHASLES en termes d'aires : sur la figure 3.2 de la présente page, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

FIG. 3.2 – Interprétation graphique de la relation de CHASLES



Propriété 3.6 (Linéarité)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I et α et β deux réels quelconques. Alors :*
- $\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
- *Plus généralement :* $\int_a^b \big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Preuve.
- Soit F une primitive de f sur I. Alors αF est une primitive de αf. Donc :
$\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)\mathrm{d}t = \alpha F(b)-\alpha F(a) = \alpha(F(b)-F(a)) = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ donc :
  $\displaystyle\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t = (F+G)(b)-(F+G)(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$
- Le dernier point est l'application des deux premiers.

◇

Remarque. À cause du deuxième point on dit que l'intégration est compatible avec l'addition.

Propriété 3.7 (Inégalités)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur I et $a \leq b$ deux réels de I.*

- *Si $f \geq 0$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.*
- *Si $f \leq g$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.*

Preuve.

- Dans le premier cas $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire sous la courbe et une aire est positive.
- Dans le cas où $0 \leq f \leq g$, les deux intégrales sont les aires sous les courbes respectives de f et de g. Comme $f \leq g$, la courbe de f est sous celle de g et l'aire sous la courbe de f est inférieure à celle sous la courbe de g. On admettra le cas général.

◇

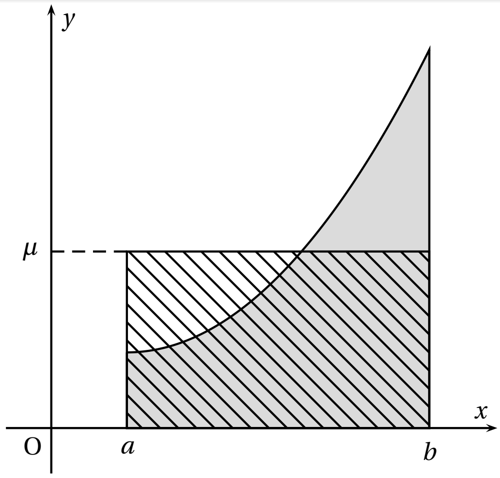
Remarques.

- La réciproque du premier point est fausse : on peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$ sans avoir $f \geq 0$.
- À cause du second point on dit que l'intégration est compatible avec l'ordre.

Définition 3.6 (Valeur moyenne)**.** La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est le nombre :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque. Dans le cas où $f \geq 0$, on peut interpréter la valeur moyenne en termes d'aires (ici $a < b$).
On cherche un nombre μ tel que, en remplaçant chaque valeur de f par μ, la somme des $\mu\mathrm{d}x$ soit la même que la somme des $f(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à chercher une fonction constante telle que l'aire sous la courbe de cette fonction soit la même que l'aire sous la courbe de la fonction f.
Or l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction constante μ vaut $(b-a)\mu$.
On a donc $\displaystyle(b-a)\mu = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Sur la figure ci-contre, l'aire grise et l'aire hâchurée sont égales quand μ est égale à la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[a\,;b]$.



Remarques.

- On note parfois $\overline{f}$ la valeur moyenne de f.
- La valeur moyenne de f est dans la même unité que celle de f.

3.4 Exercices

3.4.1 Primitives

Exercice 3.1.
Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer F, une primitive de f.

1. $f(x) = 5$;
2. $f(x) = x$;
3. $f(x) = 3x$;
4. $f(x) = 3x^2$;
5. $f(x) = -4x + 3$;
6. $f(x) = x^2$;
7. $f(x) = 7x - 1$;
8. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$;
9. $f(x) = 4x^3 + x$;
10. $f(x) = \frac{x-5}{3}$;
11. $f(x) = -5x^2$;
12. $f(x) = x^4$;
13. $f(x) = 2x^5 + 3x$;
14. $f(x) = \frac{3x^4+x}{2}$;
15. $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

Exercice 3.2.
1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'ensemble des primitives F de f sur l'intervalle I.
   (a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = -x^2 + 1$ sur $I = \mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$;
   (d) $f(x) = 5x + \dfrac{2}{x^2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
2. Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x^2}$.
   Déterminer les primitives F de f sur $]0\,;+\infty[$.
   Existe-t-il une primitive de f prenant la valeur 2 lorsque $x = 1$?

Exercice 3.3.
Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.

1. $f(x) = x^9$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$;
3. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$;
4. $f(x) = 2x^3 + \dfrac{3}{x^2}$;
5. $f(x) = 5x^2 + x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;
6. $f(x) = 2x - 7 - \dfrac{5}{x^3}$.

Exercice 3.4.
Pour chacune des fonctions f suivantes, donner une primitive F vérifiant la condition imposée.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$; $F(2) = 3$;
2. f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{3}{x^2}$; $F(3) = -1$.

Exercice 3.5.
Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, donner une primitive F.

1. $f(x) = 2(2x-1)^2$;
2. $f(x) = -(3-x)^3$;
3. $f(x) = 4(4x+3)^3$;
4. $f(x) = -(-5x-2)^3$;
5. $f(x) = (2x+1)^{-4}$;
6. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$;
7. $f(x) = (2x+1)^5$;
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$;
9. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+2\right)^3}$;
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$;
11. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
12. $f(x) = \dfrac{3x}{\left(2x^2+3\right)^3}$;
13. $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$;
14. $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$;

Exercice 3.6.
On considère la fonction f définie sur $]0\,;1[$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.
2. En déduire la primitive F de f sur $]0\,;1[$ vérifiant : $F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

Exercice 3.7.
On considère la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Étudier la limite de F en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. Étudier la limite de F en $-\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
3. Calculer la dérivée F' de la fonction F.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction F.

5. Résoudre l'équation $F(x) = 1$.
6. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
   Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(2) = 0$.

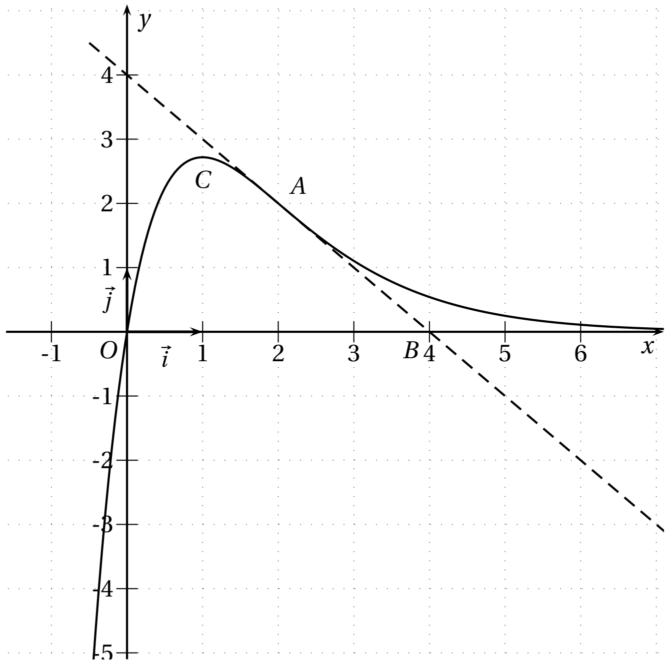
Exercice 3.8.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x - 6}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{4x-6}$.
2. En déduire une primitive de f sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$.

Exercice 3.9.

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(2\,;2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Déterminer, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = \lambda$.
3. Une des représentations graphiques page ci-contre, figure 3.3, représente la fonction dérivée g' de g, une autre représente une primitive G de g sur $\mathbb{R}$. Déterminer lesquelles.
   Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

Exercice 3.10.

On a représenté page 52 la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ 2)$ et $C(-2\,;0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$;
   - $f(x) \leq 2$;
   - $f(x) \geq 3$;
   - $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques 3.5 page 52, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.
   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

Si vous avez bien suivi, les deux exercices précédents doivent vous rappeler des exercices déjà traités.

FIG. 3.3 – Courbes de l'exercice 3.9

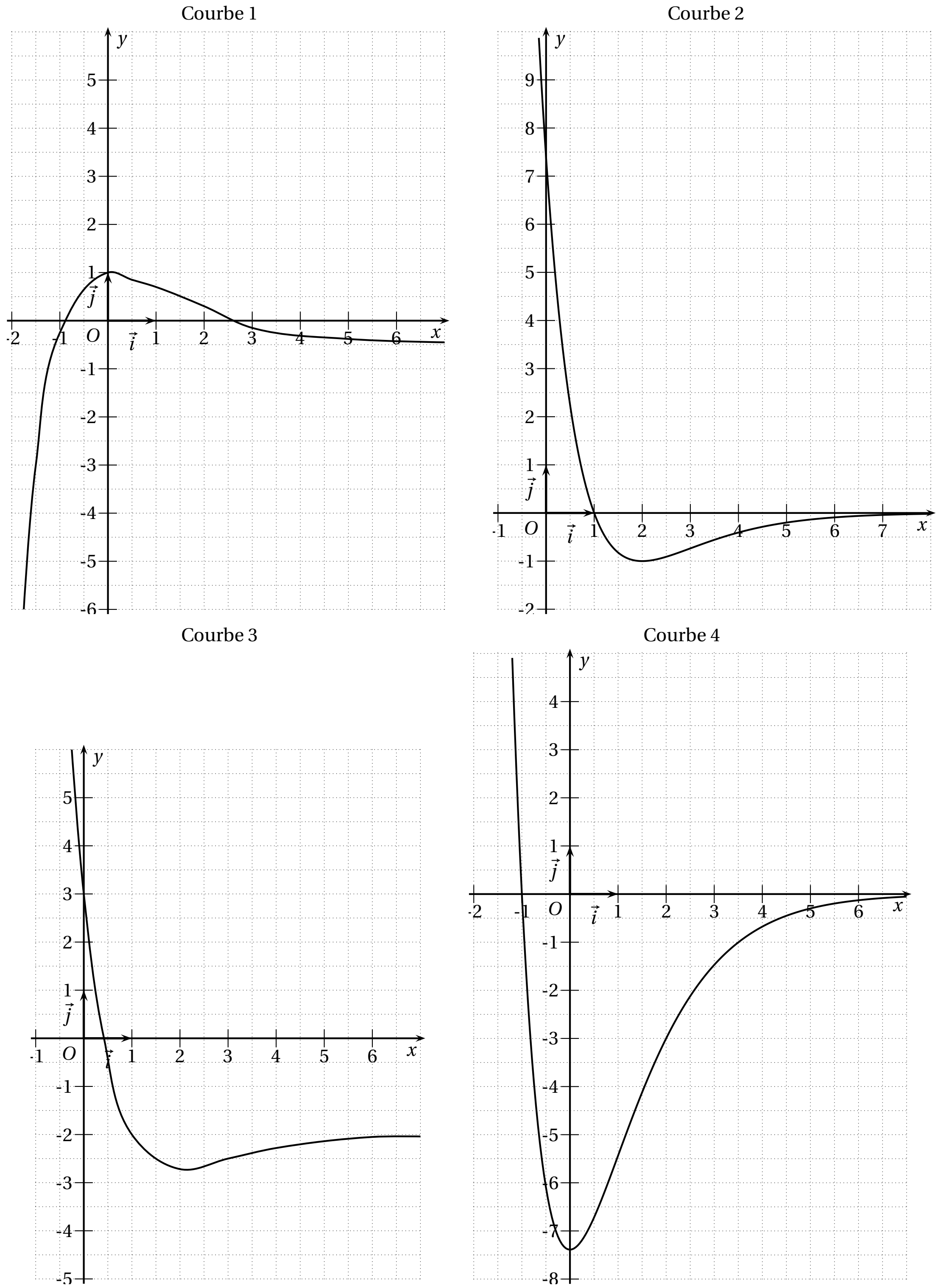


FIG. 3.4 – Courbe de l'exercice 3.10

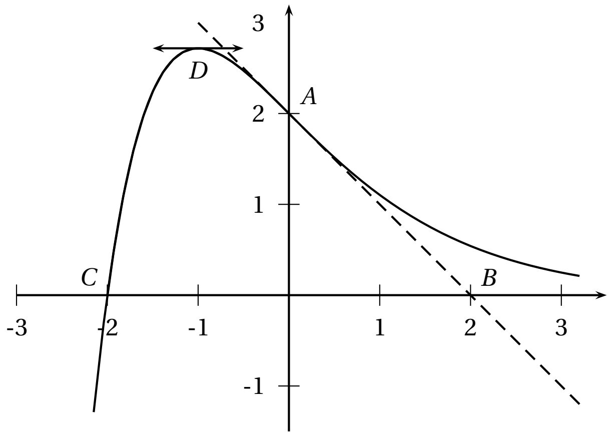
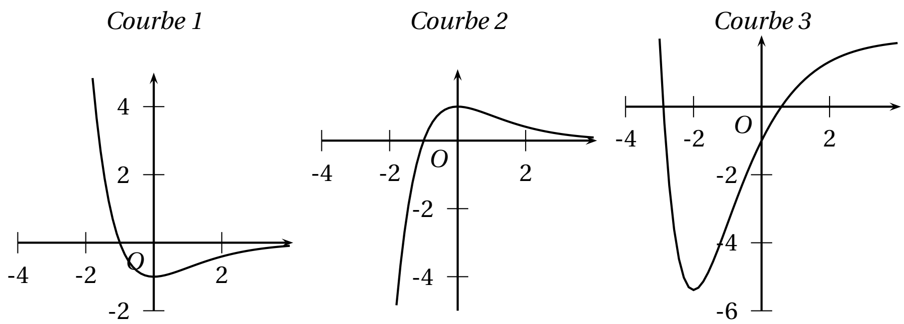


FIG. 3.5 – Courbes de l'exercice 3.10



3.4.2 Calcul intégral

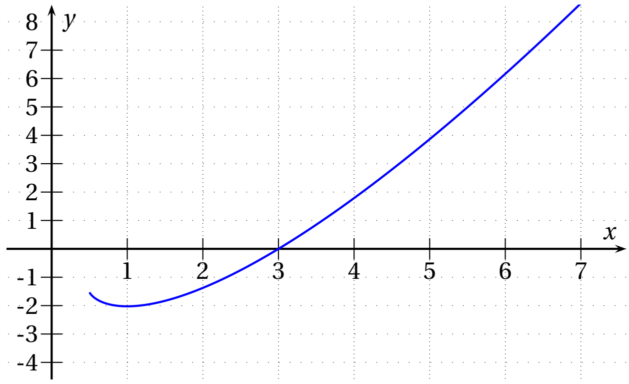
Exercice 3.11.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^3 (x+4)\,\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_2^0 (x^2+x)\,\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_0^{-2} 4t^3\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;
6. $\displaystyle\int_2^{-1} 3x^3\,\mathrm{d}x$;
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_4^0 \left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x$;
9. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t^2-1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_3^2 \frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$;
12. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$;
13. $\displaystyle\int_1^0 (2x+3)\left(x^2+3x-5\right)\mathrm{d}x$;
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;
15. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

3.4.3 Sujets d'annales

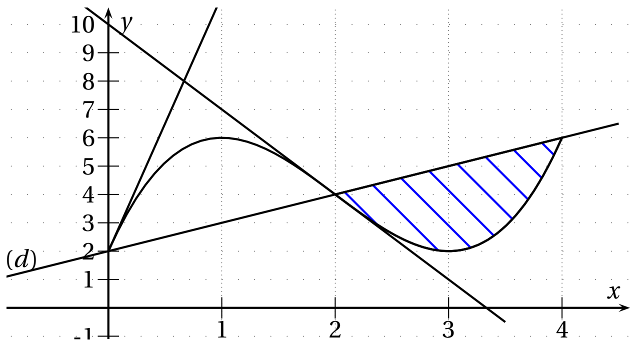
Exercice 3.12 (D'après Amérique du Nord 2 007).



La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre représente une fonction F définie et derivable sur l'intervalle $\mathrm{J} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
On sait que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(3\,;0)$ et a une tangente horizontale au point $(1\,;-2)$.
On note f la fonction dérivée de F.

1. À l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.
2. Donner $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 3.13 (D'après Centres étrangers 2 007).



On considère une fonction f définie et dérivable sur $I = [0\,;4]$; sa courbe représentative est donnée ci-contre dans un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 2 , ainsi que la droite (d) d'équation $y = x+2$.
Aux points d'abscisses 1 et 3 les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.

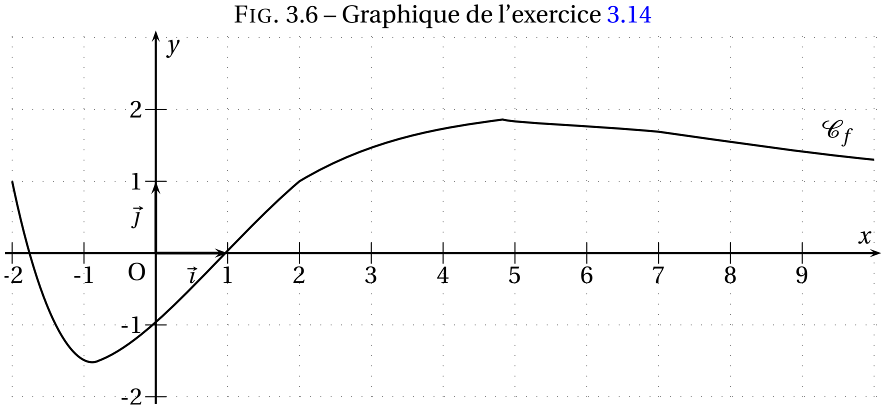
1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$; (b) $f(1)$ et $f'(1)$; (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leqslant x+2$.
2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré exprimée en unités d'aire. Parmi les trois propositions suivantes, déterminer celle qui est exacte, en la justifiant par des arguments géométriques :
   (a) $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1$ (b) $1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 6$ (c) $6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$
3. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, où $m,\ n,\ p$ et q sont des réels.
   (a) En utilisant les résultats de la question 1 a, déterminer p et q.
   (b) En utilisant les résultats de la question 1 b, déterminer m et n.
4. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.
   (a) Démontrer que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.
   (b) Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré.

Exercice 3.14 (Polynésie 2005).

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;10]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ 3.6 page suivante est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
On précise que le point d'abscisse 4,83 de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 1,86 et que cette valeur est le maximum de la fonction f.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la primitive F de f qui s'annule en 1. On précise que le point $A(5\,;5,43)$ appartient à $\mathscr{C}_F$.
On note $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.
Toutes les estimations graphiques seront données à 0,25 près. Les résultats des calculs numériques seront arrondis à 10^{-2}.

1. (a) Déterminer graphiquement sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses.
   (b) Déterminer, en justifiant, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en A.
   (c) Préciser, en justifiant, le sens de variation de F sur l'intervalle $[-2\,;10]$.
2. (a) Déterminer $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Rappeler la formule de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$ et donner une interprétation de cette notion dans le cas où f est positive.
   (c) Donner la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1\,;5]$.

FIG. 3.6 – Graphique de l'exercice 3.14

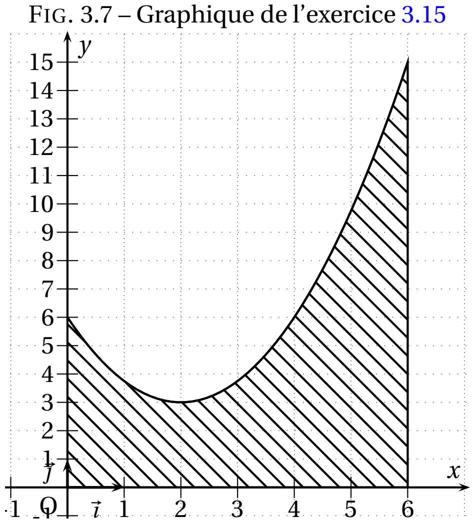


Exercice 3.15.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par : $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$ La courbe $(\mathscr{C}_f)$ 3.7 de la présente page est représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan d'origine O.
La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d' équation $x = 6$

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
2. On considère un point M appartenant à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x avec $x \in [0;6]$.
   La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H.
   La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K.
   On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK.
   Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;6]$, $R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.
3. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0;6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle OHMK soit égale à l'aire hachurée S.
   (a) Montrer que le problème précédent revient à résoudre l' équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par : $g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36$.
   (b) Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0;6]$ et dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0;6]$ une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α au centième.

FIG. 3.7 – Graphique de l'exercice 3.15



Devoir surveillé n°4

Statistiques – Primitves

Exercice 1 *6 points*

Au cours d'une séance d'essais, un pilote automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.
Au moment du top sonore, on mesure v_i (en km/h) de l'automobile, puis la distance d_i (en m) nécessaire pour arrêter le véhicule.
Pour sept expériences, on a obtenu les résultats suivants :

vitesse v_i	20	43	62	80	98	115	130
distance d'arrêt d_i	3,5	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8	168,5

1. Dans le premier repère fourni en annexe 1 page 57, représenter le nuage de points de coordonnées $(v_i\,;\,d_i)$.
   Un ajustement affine semble-t-il pertinent ? Argumenter.
2. On pose $y_i = \sqrt{d_i}$.
   (a) Reproduire sur sa copie et compléter le tableau suivant (*on arrondira les résultats au centième*) :

v_i	20	43	62	80	98	115	130
y_i							

   (b) Dans le second repère fourni en annexe 1 page 57, construire le nuage des points de coordonnées $(v_i\,;\,y_i)$ associé à cette nouvelle série double avec pour unités.
   La forme du nuage permet-elle d'envisager un ajustement affine ? Argumenter.

   (c) Donner l'équation de la droite de régression de y en v obtenue par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients au millième*) et la tracer.

   (d) À l'aide de cette équation estimer (*arrondis au centième*) :
   - la vitesse v d'un véhicule lorsque sa distance d'arrêt est de 180 m ;
   - la distance d'arrêt d de ce véhicule s'il roule à 150 km/h.

   (e) Le manuel du code de la route donne, pour calculer la distance d'arrêt (en m), la méthode suivante : « Prendre le carré de la vitesse exprimée en dizaines de km/h ».
   Comparer les résultat obtenus au 2d à ceux que l'on obtiendrait avec cette méthode.

Exercice 2 *4 points*

On s'intéresse dans cet exercice aux résultats (arrondis au point supérieur) obtenus par les élèves d'une classe de terminale ES en mathématiques au cours des trois devoirs du trimestre ainsi qu'aux moyennes des élèves sur le trimestre.
On sait que :
- au premier devoir, les élèves ont obtenu les notes suivantes :
  2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 15, 15
- au deuxième devoir, les notes obtenues ont permis de construire le diagramme en boîte donné en annexe 2 page 58 ;
- la moyenne des notes du troisième devoir était de 11,6 et l'écart-type de 4,22 ;
- les moyennes des élèves du trimestre en mathématiques, rangées en classe sont données dans le tableau suivant :

Notes	[0; 5[	[5; 8[	[8; 10[	[10; 12[	[12; 15[	[15; 20]
Effectif	2	6	5	4	8	4

1. Déterminer la moyenne (arrondie au dixième) et l'écart-type de la classe (arrondi au centième) pour le premier devoir.
   Comparer le premier et le troisième devoir.
2. Construire le diagramme en boite associé au premier devoir dans le même repère que celui du deuxième devoir, donné en annexe 2 page 58.
   Comparer ces deux devoirs.
3. Faire l'histogramme correspondant aux moyennes trimestrielles des élèves en mathématiques.

EXERCICE 3 *5 points*

1. Déterminer, pour chacune des fonctions f suivantes définies sur $]0\,;+\infty[$, la primitive F vérifiant la condition indiquée :

   (a) $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ et $F(1) = 0$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ et $F(2) = 1$; (c) $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x^2}$ et $F(1) = 2$.

2. Déterminer pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, une primitive :

   (a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$; (b) $g(x) = (5x-1)^3$.

EXERCICE 4 *5 points*

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La courbe Γ :

- coupe l'axe des abscisses en $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38$ et en $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,62$;
- coupe l'axe des ordonnées en $e^2 \approx 7,39$;
- passe par $A(2\,;-1)$;
- admet la droite (AB), où $B(0\,;-5)$, comme tangente en A ;
- admet aux points C et D d'abscisses respectives 1 et 4 des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ;
- admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

1. Avec la précision permise par le graphique, reproduire sur sa copie et compléter le tableau suivant :

x	1	2	4
$f(x)$			
$f'(x)$			

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de signes de f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Une des représentations graphiques donnée en annexe 3 page 58 représente la fonction dérivée f' de f, une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer lesquelles.
   Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

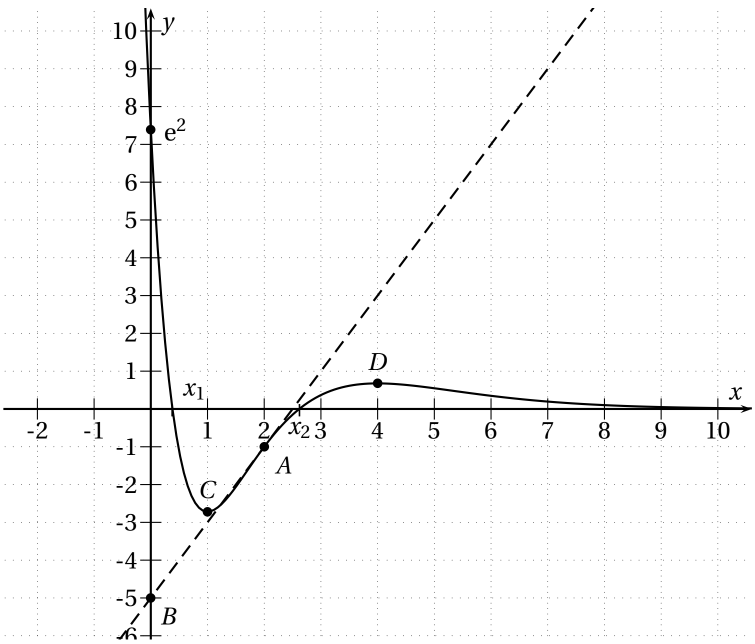


FIG. 3.8 – Annexe 1

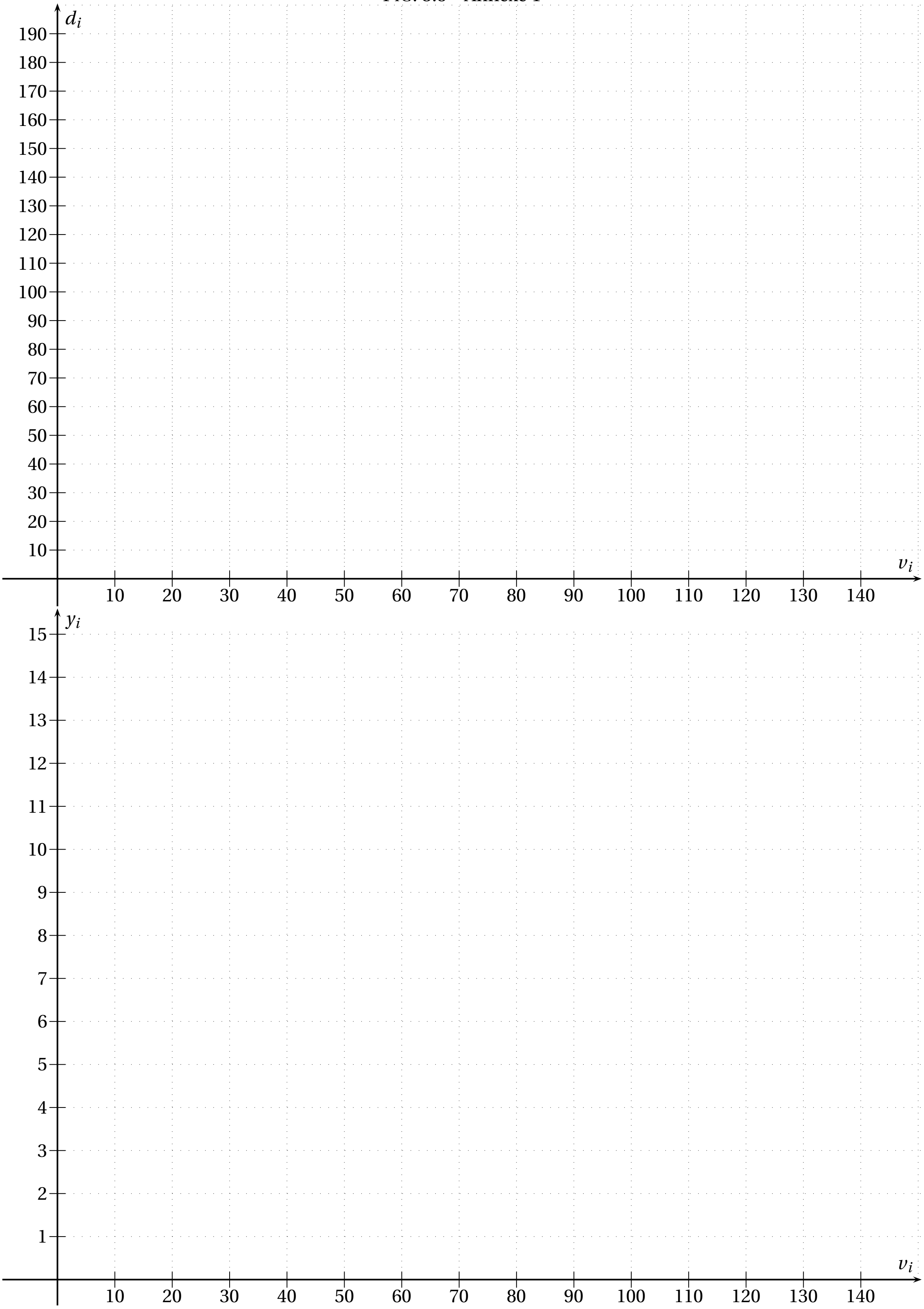


FIG. 3.9 – Annexe 2

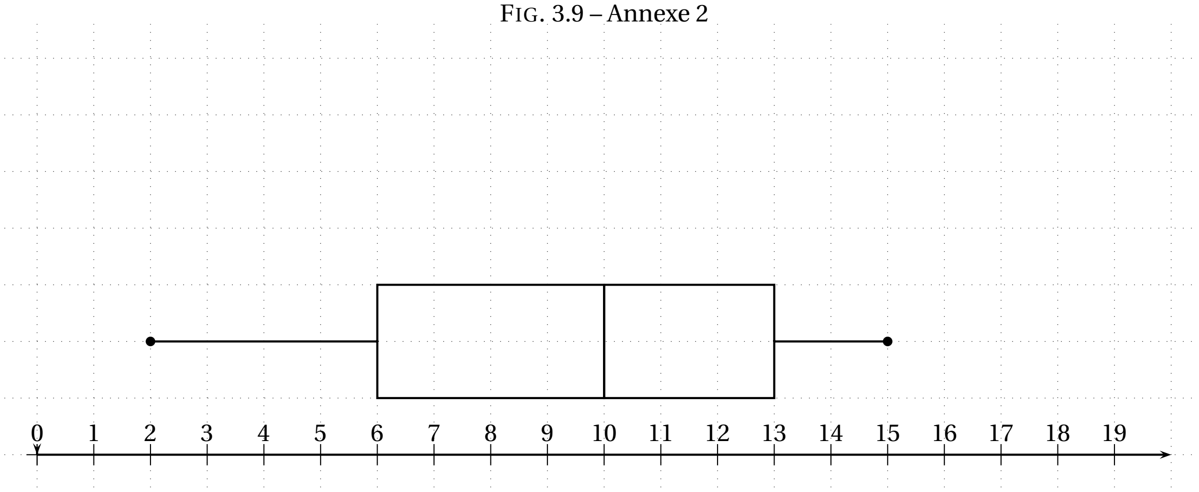
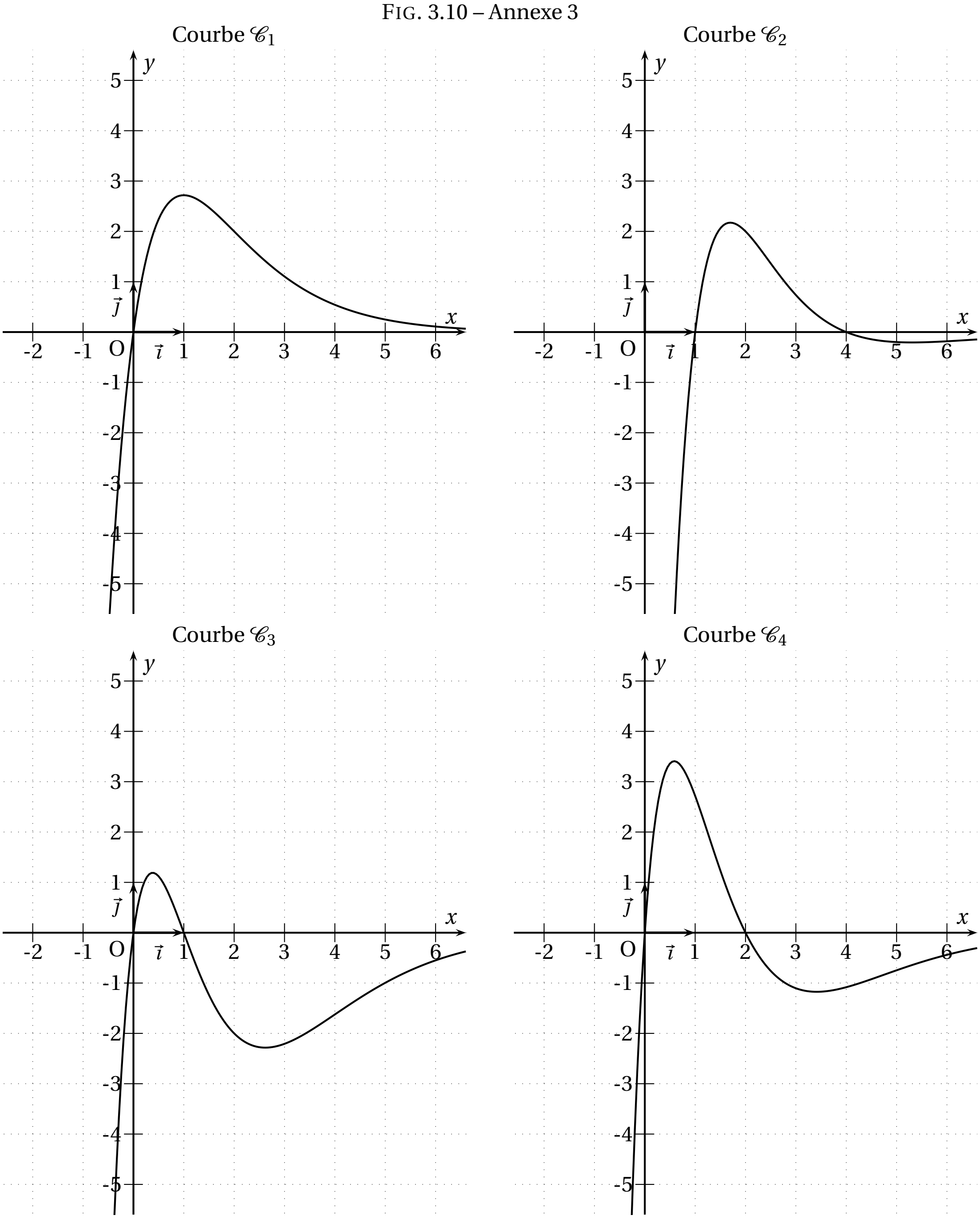


FIG. 3.10 – Annexe 3



Chapitre 4

Fonction logarithme népérien

Sommaire

4.1 Activités

Activité 4.1.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et G la fonction définie, pour tout réel x par $G(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f admet des primitives.
2. Soit F une primitive quelconque de f. Exprimer G en fonction de F et de x.
3. En déduire G'. En déduire que G est aussi une primitive de f.
4. Montrer que G est la primitive de f s'annulant en 1.

Plus généralement, on a la propriété suivante, qu'on admettra (la démonstration est identique à l'activité 4.1) :

Propriété 4.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit a un réel fixé de I. Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a.*

Activité 4.2.

Dans le chapitre 3, on a obtenu des primitives pour toutes les fonctions usuelles, sauf pour la fonction inverse. L'objectif de cette activité est de découvrir la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1 et quelques unes de ses propriétés.

On notera F la fonction définie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ qui est la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1.

1. Expliquer pourquoi F existe et est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Signe de $F(x)$ selon les valeurs de x.
   (a) Déterminer $F(1)$.
   (b) Expliquer pourquoi, lorsque $x > 1$, on a $F(x) > 0$.
   (c) Expliquer pourquoi, lorsque $0 < x < 1$, $\int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t > 0$.
   En déduire le signe de $F(x)$ lorsque $0 < x < 1$.

3. Étudier le signe de $F'(x)$ selon les valeurs de x.
   En déduire les variations de F.
4. (a) Montrer que $F(x)$ et $F(ax)$, où a est un réel positif fixé, ont des dérivées égales.
   On rappelle que $\big(f(ax+b)\big)' = af'(ax+b)$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x > 0$, on ait $F(ax) = F(x) + C$.
   (c) En posant $x = 1$, en déduire la valeur de C.
   (d) En posant $x = b$, en déduire une propriété de la fonction F.

4.2 Fonction logarithme népérien

4.2.1 Définition

Définition 4.1. On appelle *logarithme népérien*, notée $\ln(x)$, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
La fonction logarithme népérien est donc la primitive de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln 1 = 0$$

Remarques.
- On peut écrire $\ln x$ à la place de $\ln(x)$ quand il n'y a aucun risque de confusion.
- On admettra que cette fonction est continue.

4.2.2 Limites

Propriété 4.2. *Soit* $x \mapsto \ln x$ *la fonction logarithme népérien.*
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

On l'admettra.

Remarque. L'axe des ordonnées est donc une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

4.2.3 Variations

Propriété 4.3. *La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $]0\,;+\infty[$ *et on a :*

x	0		1		$+\infty$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\Vert$		$+$		
$\ln x$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve. La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse, or quand $x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$.
La dérivée de $\ln x$ est donc strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ ce qui implique que la fonction $\ln x$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. ♢

4.2.4 Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction logarithme est donnée par la figure 4.1 page ci-contre.

4.2.5 $\ln u$

Propriété 4.4. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u > 0$. Alors :*
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- *u et $\ln u$ ont les mêmes variations*

Preuve. • On sait que $(v \circ u)' = u' \times v'(u)$. En posant $v(x) = \ln x$, il vient $(\ln u)' = u' \times \dfrac{1}{u} = \dfrac{u'}{u}$.

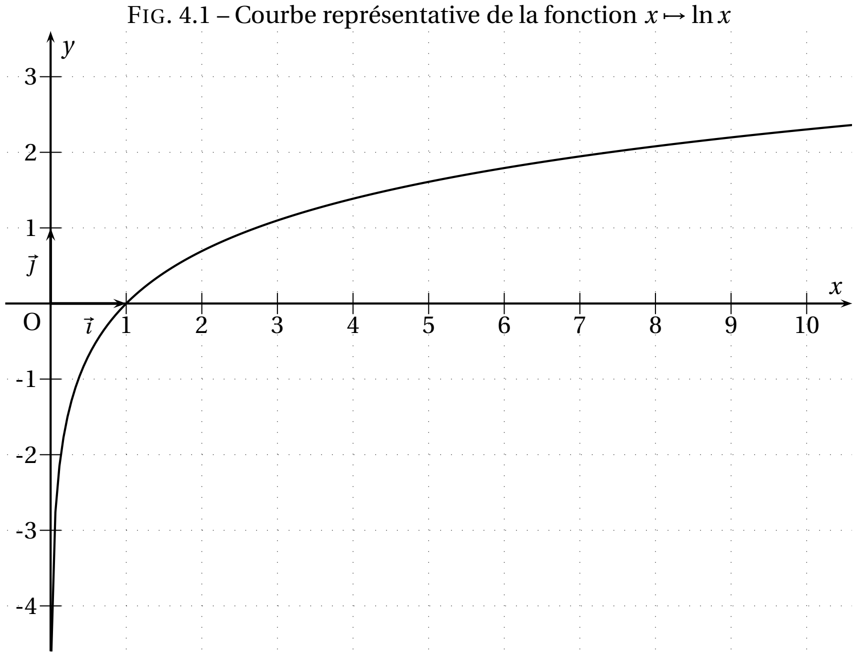
- Comme $u > 0$, $(\ln u)'$ est du signe de u', donc u et $\ln u$ ont les mêmes variations.

♢

Propriété 4.5. *La primitive d'une fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f = \dfrac{u'}{u}$ est $F = \ln|u|$.*

Preuve. Si f peut s'écrire sous la forme $f = \dfrac{u'}{u}$, on a forcément $u(x) \neq 0$, donc F est bien définie.
Soit I l'ensemble sur lequel $u > 0$ et J celui sur lequel $u < 0$.
Sur I on a $F = \ln u$ et $F' = \dfrac{u'}{u} = f$, donc F est bien une primitve de f sur I.
Sur J on a $F = \ln(-u)$ et $F' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u} = f$, donc F est bien une primitive de f sur J. ♢

FIG. 4.1 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$



4.3 Propriétés algébriques de ln

Théorème 4.6. *Pour tous réels a et b strictements positifs, on a :* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Preuve. Ce théorème a été démontré à la question 4 de l'activité 4.2. ♢

Propriété 4.7. *Pour tous réels a et b strictements positifs et tout entier relatif n, on a :*

- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a$

Preuve. • $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ d'une part, $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$ d'autre part,
donc $\ln a + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$

- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = \ln\left(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{\ln a + \ln a + \cdots + \ln a}_{n \text{ fois}} = n \ln a$
- $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln a$ d'une part, $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$ d'autre part, donc $\ln a = 2\ln\left(\sqrt{a}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a$

♢

4.4 Équations et inéquations comportant un logarithme

4.4.1 Quelques propriétés

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante, on obtient :

Propriété 4.8. *Pour tous réels a et b strictements positifs, on a :*
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

Ainsi que :

Propriété 4.9. *Pour tout réel x strictement positif :*
- $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Remarque. On peut résumer la propriété précédente par le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	$\|$	$-$	0	$+$	

Preuve. Cela découle directement du tableau de variations de la fonction logarithme. ◊

4.4.2 Résoudre $\ln x = m$

L'équation a une unique solution

Théorème 4.10. *Pour tout réel m, l'équation* $\ln x = m$ *admet une unique solution.*

Preuve. La fonction logarithme est continue et strictement croissante, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $m \in]-\infty\,;+\infty[$, l'équation $\ln x = m$ admet une unique solution. ◊

Le nombre e

Définition 4.2. On note e le nombre tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.

Remarques.
- Un tel nombre existe forcément d'après le théorème précédent.
- $\mathrm{e} \approx 2{,}71828\ldots$

e^m

Pour tout entier relatif, $\ln(\mathrm{e}^n) = n\ln \mathrm{e} = n$. De façon générale, même quand m n'est pas entier, on notera e^m l'unique solution de l'équation $\ln x = m$.

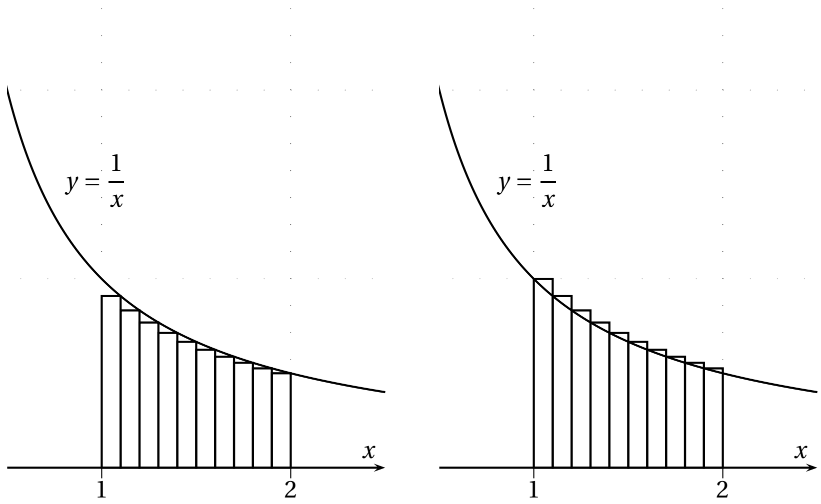
Propriété 4.11. *Pour tout réel m,* $\ln(e^m) = m$.

4.5 Exercices

Exercice 4.1 (Encadrement de $\ln 2$).

1. Calculer $f(1)$, $f(1,1)$, $f(1,2)$, …, $f(2)$.
2. On considère un repère orthonormal d'unité 1 cm. En découpant l'aire sous la courbe de la fonction inverse entre 1 et 2 en rectangle comme dans le schéma 4.2 de la présente page, en déduire un encadrement de $\ln 2$.

FIG. 4.2 – Graphique de l'exercice 4.1



Exercice 4.2.

Déterminer sur quel intervalle chacune des fonctions suivantes est définie :

1. $f(x) = \ln(x+3)$
2. $f(x) = \ln x + 3$
3. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
4. $f(x) = x + \ln\left(x^2\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

Exercice 4.3.

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x+3)$
2. $f(x) = \ln x + 3$
3. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
4. $f(x) = x + \ln\left(x^2\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$
6. $f(x) = x \ln x$
7. $f(x) = \ln x + \ln(x+1)$
8. $f(x) = \ln[x(x+1)]$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

Exercice 4.4.

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln 6 - \ln 2$
2. $\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\ln 3 - \ln 9$
4. $\ln 2 + \ln 4 - \ln 8$
5. $\frac{1}{4}\ln 81$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ln\sqrt{3}$
7. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$
8. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\right) - \ln(\sqrt{3}-1)$

Exercice 4.5.

1. Donner, en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 5$ les valeurs de :
   (a) $\ln 10$
   (b) $\ln 25$
   (c) $\ln 16$
   (d) $\ln 400$
   (e) $\ln\left(\frac{2}{25}\right)$
   (f) $\ln\left(\frac{1}{100}\right)$
   (g) $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
   (h) $\ln 0,4$
   (i) $\ln\sqrt{5}$
   (j) $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
   (k) $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$
   (l) $\ln\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$
2. a et b étant deux réels strictements positifs, donner en fonction de $\ln a$ et de $\ln b$ les valeurs de :
   (a) $\ln\left(\dfrac{a}{b^2}\right)$
   (b) $\ln\left(a^3 \times b^5\right)$
   (c) $\ln\left(ab^3\right)$
   (d) $\ln\left(\dfrac{b^2}{a^3}\right)$
   (e) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$
   (f) $\dfrac{\ln a}{\ln\left(ab^2\right)}$
   (g) $\dfrac{\ln\left(ab^4\right)}{\ln b}$

Exercice 4.6.

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}\right)$.

Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire le sens de variations de f.

Exercice 4.7.
Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Calculer, de deux façons différentes, la dérivée de la fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 4.8.
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln x > 1$
2. $\ln x = 2$
3. $\ln x < -1$
4. $3 - \ln x \leqslant 0$
5. $\ln x = -3$
6. $2\ln(x+1) = 0$
7. $\dfrac{1}{\ln x + 1} > 0$
8. $\ln(2x+1) = 1$
9. $\ln\left(x^2\right) = -1$
10. $\ln[x(x+1)] = 0$
11. $\ln x + \ln(x+1) = 0$
12. $2\ln x - 1 = 0$
13. $2x\ln x + x = 0$
14. $(x-1)(1+\ln x) = 0$
15. $x\ln(x+2) = 0$
16. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

Exercice 4.9.
Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f a des primitives et déterminer une primitive de f.

1. $f(x) = \dfrac{2}{2x-3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{5}{5-x}$
5. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$
6. $f(x) = -\dfrac{3x}{2x^2+5}$
7. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$
8. $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Exercice 4.10.
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+2x}{(x+1)^2}$ pour $x > -1$.

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{d}{(x+1)^2}$
2. En déduire l'expression de la primitve de f qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 4.11.
1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4.12 (Antilles–Guyane 2 005).
Soit f une fonction dont le tableau de variations, incomplet est le suivant ; on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\cdots$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\cdots$

On admet que f est définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.
2. En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variations ci-dessus, montrer que l'on a : $a = 1$, $b = -1$, $c = 4$.
3. Déterminer les limites manquantes dans le tableau de variations fourni.
4. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet comme asymptote la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote $\mathscr{D}$.
5. Déterminer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 \left[f(x) - (x-1)\right]\mathrm{d}x$ et interpréter le résultat en terme d'aire.

Exercice 4.13 (Amérique du Nord 2 007).
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
Première partie
On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $g(x)=-x^2+ax-\ln(2x+b)$, où a et b sont deux réels.
Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
Deuxième partie
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x)=-x^2+2x-\ln(2x+1)$.
On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{3}{4}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$

1. Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 4.14 (Asie Juin 2 007).
Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $[1\,;6]$ par $f(x)=-x^2+10x-9-8\ln(x)$.
$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.
La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;6]$. On note f' sa fonction dérivée.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Montrer que pour tout nombre reel x appartenant à l'intervalle $[1\,;6]$, $f'(x)=\dfrac{-2(x-1)(x-4)}{x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (d) Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. (a) Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x\ln(x)-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (c) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel : Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;\,b]$, est le nombre m tel que : $m=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.15 (Polynésie 2 006).
On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f définie sur $]-2\,;+\infty[$, passe par les points O(0 ; 0) et A(−1 ; 0), que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur ln(2) et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y=x+1$.

1. (a) À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.
   (b) Donner une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$.
2. Nous savons qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x>-2$: $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\ln(x+2)$.

(a) Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.

(b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c.

(c) En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.

(d) En déduire les valeurs de a, b et c.

Exercice 4.16.

Partie A

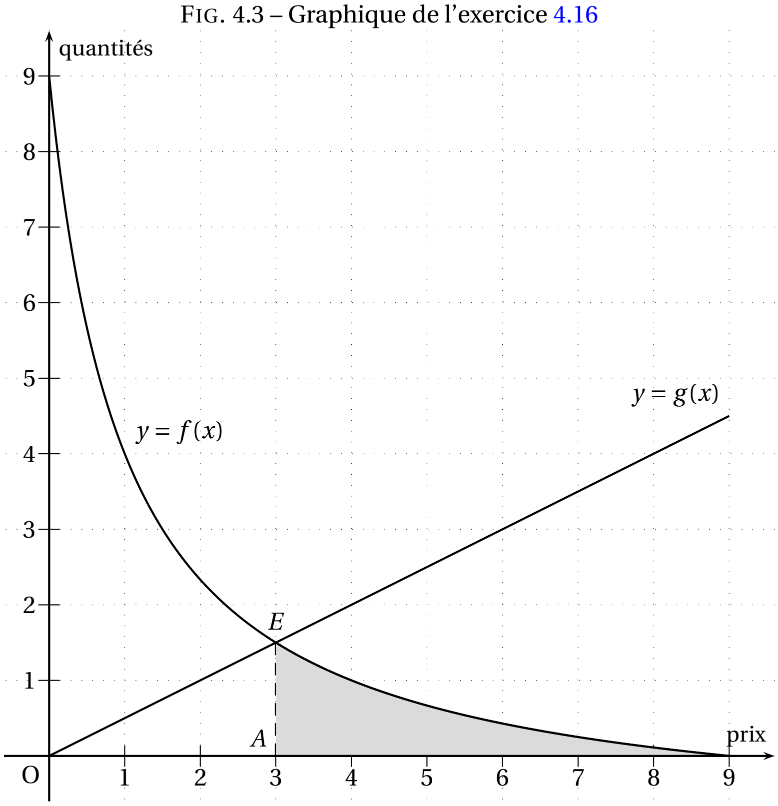
Soient les fonctions f et g définies sur $[0;9]$ par $f(x) = \dfrac{10}{1+x} - 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{2}$.

1. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_3^9 f(x)\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B

Un produit conditionné en boîte est mis sur le marché.
On désigne par x le prix d'une boite de ce produit en dizaine d'euros.
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x apppliqué sur le marché est donné par $f(x)$ en centaines de boîtes.
On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs en fonction de prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donné par $g(x)$ en centaine de boîtes.
Sur le graphique 4.3 de la présente page sont tracées dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.

FIG. 4.3 – Graphique de l'exercice 4.16



1. On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.
   (a) Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 € la boîte ?
   (b) Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché atteint son équilibre.
   Donner le prix d'équilibre, en euros, et le nombre de boîtes correspondant.
2. (a) D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre. On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'euros par l'aire du triangle OAE (une unité d'aire correspond à un millier d'euros). Calculer ce surplus en euros.

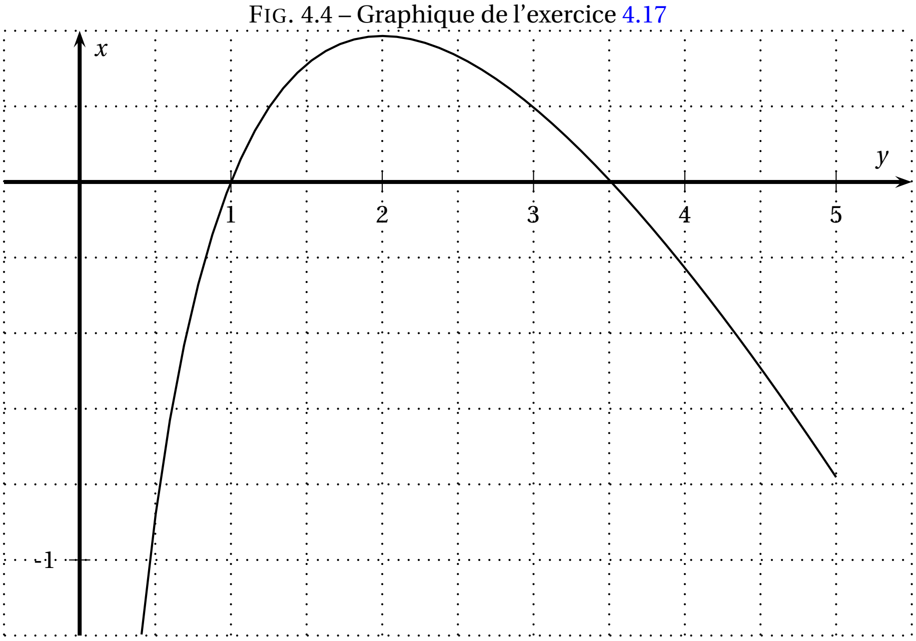
(b) Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3 \leqslant x \leqslant 9$). Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.

Exercice 4.17 (Centres étrangers 2 006).

On désigne par f la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par : $f(x) = 1 - x + 2\ln x$. La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure 4.4 de la présente page est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer la limite de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau des variations de f.
3. (a) Calculer $f(1)$.
   (b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3\,;\,4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par : $g(x) = x\left(-\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2} + 2\ln x - 1\right)$.
   (a) Montrer que g est une primitive de f sur $]0\,;\,5]$.
   (b) Sur le graphique ci-dessous, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ située au-dessus de cet axe. Montrer que l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine est égale, en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.
   (c) Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2. On utilisera la valeur approchée de α trouvée au 3 b.

FIG. 4.4 – Graphique de l'exercice 4.17



Exercice 4.18 (France 2 007).

Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

Partie I : étude des coûts hebdomadaires de production

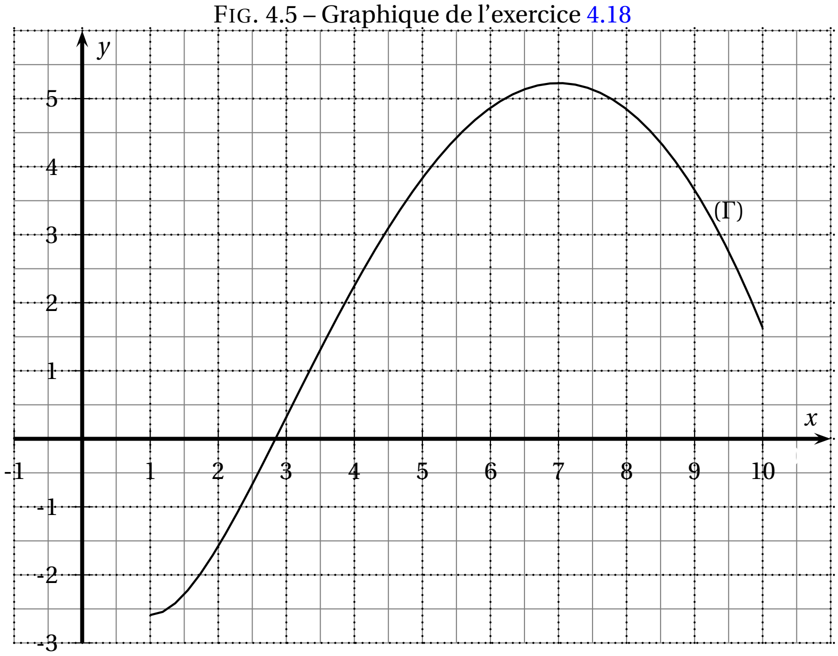
1. Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit. Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $C_m(x) = x + \dfrac{16}{x+1}$. ($C_m(x)$ est exprimé en centaines d'euros, x en kilogrammes).
   Étudier les variations de la fonction C_m, puis dresser le tableau de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
2. En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production. Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m.
   Déterminer la fonction C, primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

Partie II : étude du bénéfice hebdomadaire.

On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu. Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse x (exprimée en kilogrammes) de médicament produit. Il peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ par : $B(x) = 9x - 0,5x^2 - 16\ln(x+1)$.

La représentation graphique de la fonction B dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe (Γ) donnée par la figure 4.5 de la présente page.

FIG. 4.5 – Graphique de l'exercice 4.18



1. (a) On admet que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;\,7]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[7\,;\,10]$.
En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.
   (b) Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).
2. (a) Utiliser la courbe (Γ) pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité x_0 de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.
   (b) Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de x_0 approchée au centième.

Exercice 4.19 (Liban 2 007).

On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure 4.6 page suivante dans le plan muni d'un repère orthonormal.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(1 ; 0) et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

Partie A

Pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln x$ où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(4)$ et $f'(1)$.
3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} 4a+b & = & 0 \\ a+b & = & 3 \end{array}\right.$

   Déterminer a et b.

Partie B

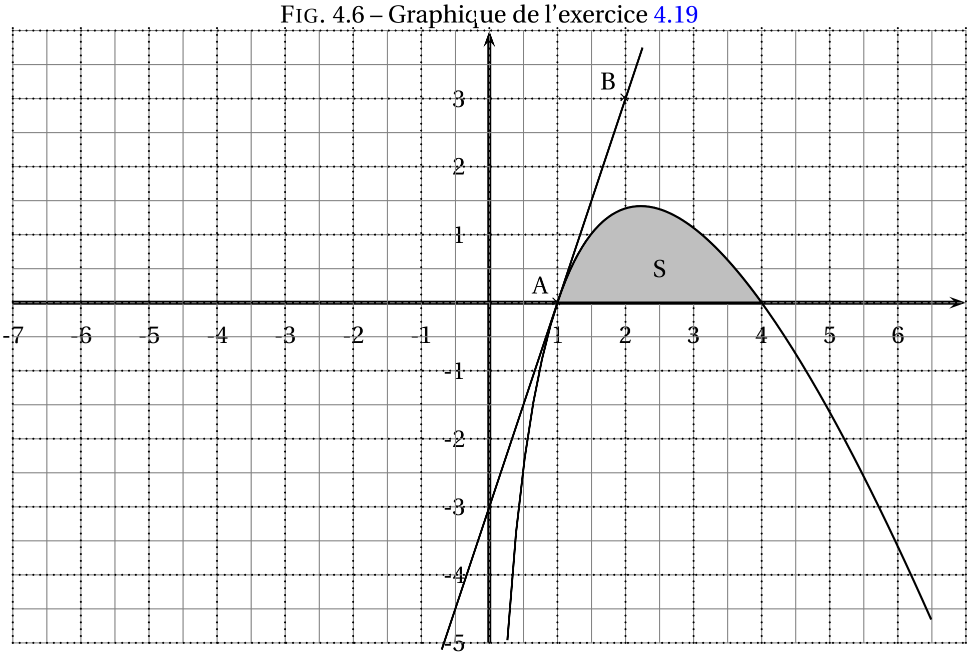
On admet que la fonction précédente est définie pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (4-x)\ln x$.

On appelle S l'aire hachurée sous la courbe $\mathscr{C}$.

1. Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(x^2\ln x - \dfrac{x^2}{2} - 8x\ln x + 8x\right)$.

   Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner une valeur arrondie à 10^{-1} de S exprimée en unités d'aire. Justifier.

FIG. 4.6 – Graphique de l'exercice 4.19



Exercice 4.20 (Nouvelle Calédonie 2 006).

Partie A : Étude préliminaire

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$

x	3		-2		$+\infty$
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	2

1. On note f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln[g(x)]$.
   (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de f en (-2) et la limite de f en $+\infty$, puis donner le tableau de variations de f.
2. Soit G la primitive de la fonction g sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$ qui est telle que : $G(-2) = 0$.
   Démontrer que la fonction G admet un minimum en (-2).

Partie B

Dans cette partie, la fonction g est la fonction définie sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$ par : $g(x) = 2 - \dfrac{2}{x+3}$.

1. En utilisant cette définition de la fonction g retrouver tous les renseignements donnés dans le tableau de variation de la partie A.
2. Comme dans la première question de la partie A, on définit la fonction f par :

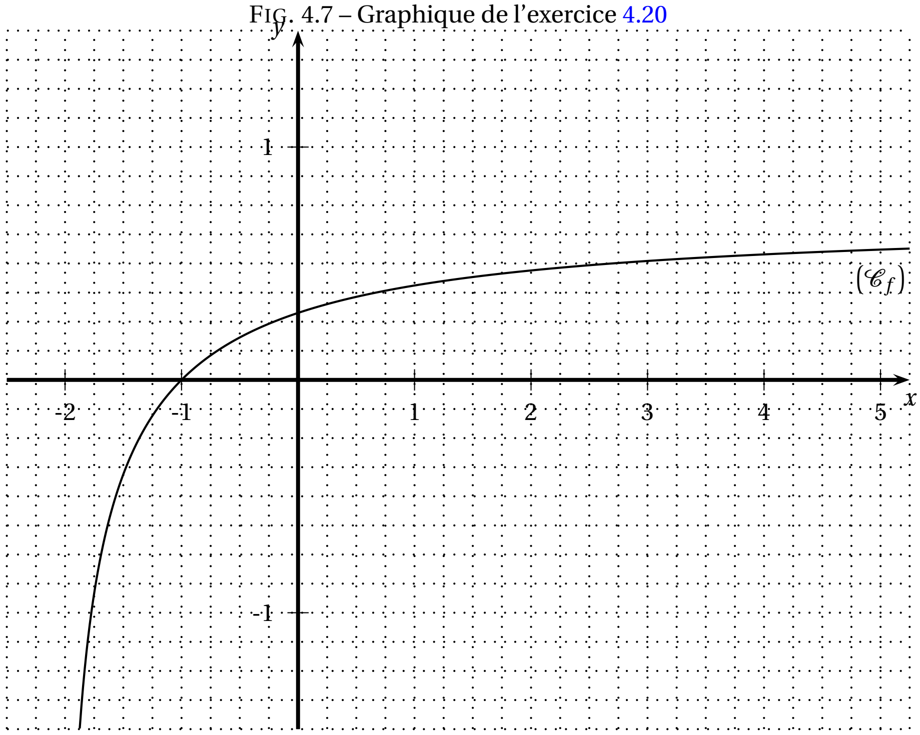
$$\text{pour tout } x \text{ élément de l'intervalle }]-2\,;+\infty[,\ f(x) = \ln\left(2 - \frac{2}{x+3}\right)$$

   Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de cette fonction f relativement à un repère orthogonal. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est représentée sur la figure 4.7 fournie en annexe page suivante.
   (a) La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet-elle des asymptotes ? Justifier.
   Si oui, en donner des équations et les tracer sur la figure fournie en annexe.
   (b) La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ coupe l'axe des abscisses en un point A. En utilisant l'expression de $f(x)$ déterminer les coordonnées du point A et placer ce point sur la figure fournie en annexe.
   (c) Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en son point d'abscisse (-1). Tracer la droite (T) sur la figure fournie en annexe.
3. Comme dans la deuxième question de la partie A, on définit la fonction G par :

$$G \text{ est la primitive sur l'intervalle }]-3\,;+\infty[\text{ de la fonction } g : x \mapsto 2 - \frac{2}{x+3} \text{ et } G(-2) = 0$$

   Calculer $G(x)$ pour x réel de l'intervalle $]-3\,;+\infty[$.

FIG. 4.7 – Graphique de l'exercice 4.20



Devoir surveillé n°5

Calcul intégral

EXERCICE 1 *6 points*

Calculer les intégrales suivantes :

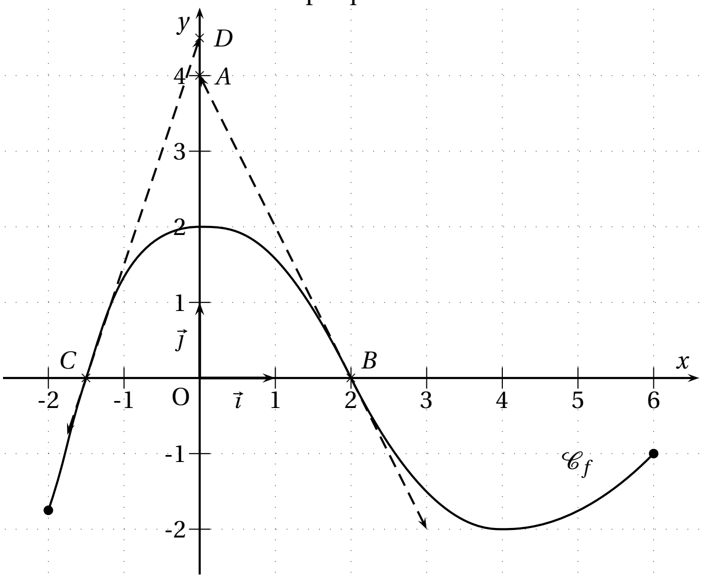
1. $\displaystyle\int_4^1 x^3 \mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} \mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 *9 points*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2 ; 6]$. La courbe de la figure 4.8 de la présente page est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
On appelle F la primitive de f s'annulant en $-1,5$ et f' la dérivée de f.
On précise que

- les points d'intersection C et B de la courbe avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives $-1,5$ et 2 ;
- le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées a pour ordonnée 2 et c'est le maximum de la fonction ;
- le minimum de la fonction est atteint en 4 et vaut -2 ;
- les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 4 sont parallèles à l'axe des abscisses ;
- la tangente à la courbe en B passe par le point A de coordonnées $(0 ; 4)$;
- la tangente à la courbe en C passe par le point D de coordonnées $(0 ; 4,5)$;
- la courbe de la fonction F passe par les points de coordonnées $(0 ; 1)$ et $(2 ; 4,75)$.

FIG. 4.8 – Graphique de l'exercice 2



1. (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

x	$-1,5$	0	2
$f(x)$			
$f'(x)$			
$F(x)$			

   (b) Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Justifier brièvement.

   (c) Déterminer les variations de F. Justifier brièvement.

   (d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 0.

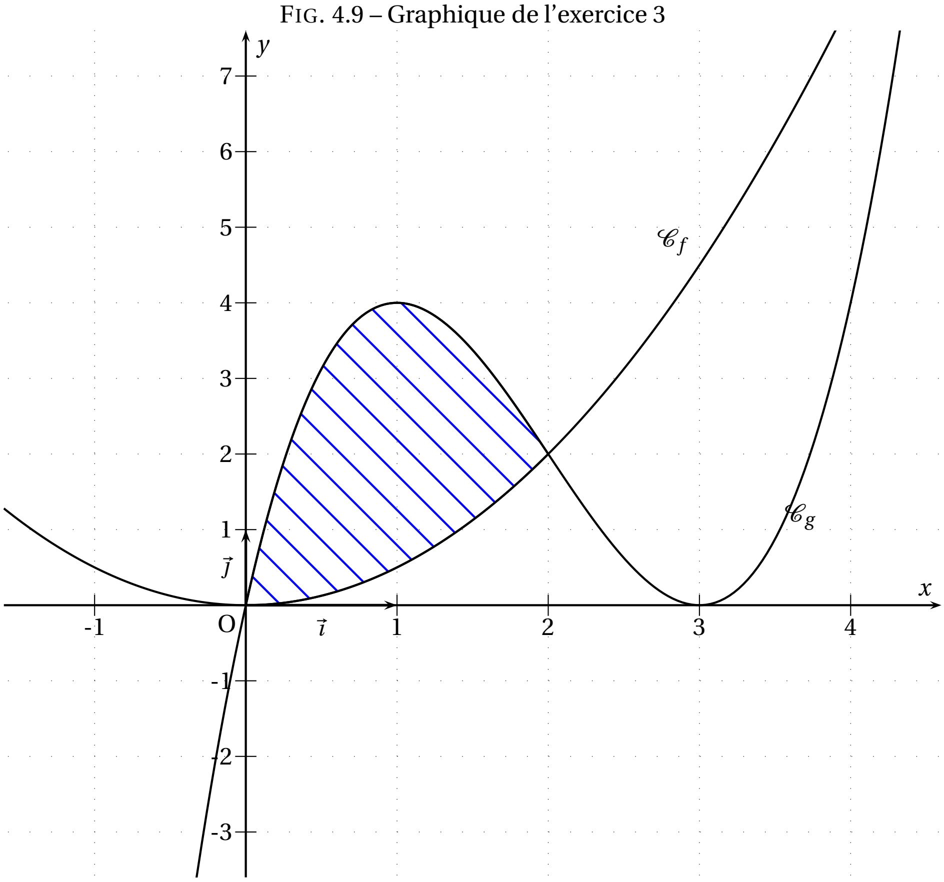
2. (a) Déterminer $\displaystyle\int_{-1,5}^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   À quoi correspond ce nombre sur la figure 4.8 ? *On pourra le visualiser en couleur.*

   (b) Donner la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-1,5 ; 2]$ et la représenter graphiquement sur la figure 4.8.

EXERCICE 3 *5 points*

Dans le repère orthogonal de la figure 4.9 de la présente page, d'unités graphiques 1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 unité = 1 cm sur l'axe des ordonnées, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
On appelle $\mathscr{A}$ l'aire de la surface hachurée.

FIG. 4.9 – Graphique de l'exercice 3



1. Déterminer, par le calcul, les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Déterminer $\mathscr{A}$ en unités d'aire puis en cm^2.

Chapitre 5

Probabilités

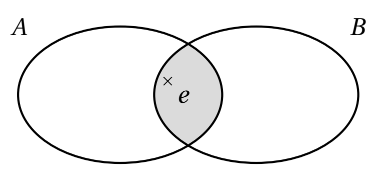
Sommaire

5.1 Rappels

Étant des rappels de Première, les exemples seront limités et les preuves des théorèmes et propriétés ne seront pas refaites.

5.1.1 Vocabulaire des ensembles

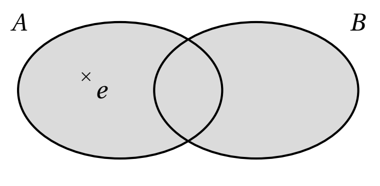
Définition 5.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

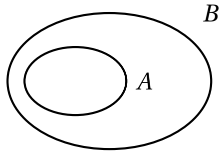
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 5.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 5.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$.



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

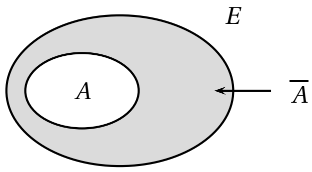
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples 5.1. On a toujours :

- $A \subset A \cup B$;
- $B \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A$;
- $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;
- $\varnothing \subset A$;
- $\varnothing \cap A = \varnothing$;
- $\varnothing \cup A = A$.

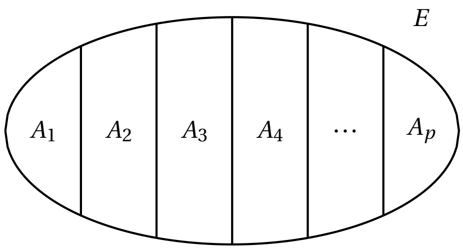
Définition 5.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ ou encore $C_E(A)$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 5.5. Des parties A_1, A_2, …, A_p d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1 ; \dots ; p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.



Définition 5.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Exemple 5.2. Si $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ alors $\text{Card}(E) = 6$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

5.1.2 Expériences aléatoires

Issues, univers

Définition 5.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Exemples 5.3.

- On lance un dé et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P ; I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P ; F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i ; j)$ où $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant les hypothèses faites : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenus, on obtient respectivement :

- $\Omega_P = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24 ; 25 ; 30 ; 36\}$;
- $\Omega_S = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$.

TAB. 5.1 – Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2;4;6;8;10;12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3;6;9;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10;11;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2;3;4;5;6\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un événement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement « A et B » (noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{6;12\}$
Événement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements	$A \cup B = \{2;3;4;6;8;9;10;12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

Événements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2;3;\cdots;11;12\}$.

Le tableau 5.1 de la présente page définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

5.1.3 Probabilités

Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 5.8. Soit $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\cdots;\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0;1]$, appelés *probabilités*, tels que :

- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Exemple 5.4. Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement A = « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
   D'après la définition, $p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0,3$[1].

[1] La notation rigoureuse est $p(\{1\})$ mais on peut noter $p(1)$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

2. Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
   D'après la définition, $p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$, donc $p(6)=0,5$.

Propriété 5.1. *Soit A et B deux événements de Ω, alors :*
- *La probabilité de l'événement certain est 1 : $p(\Omega)=1$;*
- *La probabilité de l'événement impossible est 0 : $p(\varnothing)=0$;*
- *Si $A\subset B$, alors $p(A)\leq p(B)$;*
- *$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$;*
- *Si A et B sont incompatibles , $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$;*
- *$p(\overline{A})=1-p(A)$;*
- *$p(A\backslash B)=p(A)-p(A\cap B)$.*

Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 5.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 5.2. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement élémentaire ω et tout événement A on a :*
- $p(\omega)=\dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A)=\dfrac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre d'issues possibles}}=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple 5.5. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega=\{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.

On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).

Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Loi des grands nombres

Définition 5.10. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω donnée le nombre : $f_i=\dfrac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres* ; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 5.3 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Remarques.
- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

5.2 Probabilités conditionnelles

5.2.1 La situation

On illustrera toute cette section par la situation suivante :
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de 2 004–2 005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Femmes	76	92	50	218
Hommes	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

Les fiches de tous ces élèves sont rangées dans un carton et on choisit une fiche au hasard parmi les 350.
On appellera E, S, L, F et H les événements respectifs « la fiche est celle d'un élève de 1 ES », « la fiche est celle d'un élève de 1 S », « la fiche est celle d'un élève de 1 L », « la fiche est celle d'une femme » et « la fiche est celle d'un homme ».

La probabilité de choisir la fiche d'une femme de 1ES est : $p(E \cap F) = \frac{76}{350}$. La probabilité de choisir une femme est $p(F) = \frac{218}{350}$.

La probabilité de l'événement « la fiche est celle d'un élève inscrit en section ES, **sachant qu**'il est une femme » est dite probabilité conditionnelle de l'évènement E sachant F et est notée $p(E|F)$ ou $p_F(E)$.
Et on a : $p(E|F) = \frac{76}{218} = \dfrac{p(E \cap F)}{p(F)}$.

5.2.2 Définition

Définition 5.11 (Probabilité conditionnelle)**.** Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties de cet univers, avec $A \neq \varnothing$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, notée $p_A(B)$ ou $p(B|A)$, est définie par :

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Dans le tableau 5.2 de la présente page on a calculé les probabilités conditionnelles des différentes sections connaissant le sexe.

TAB. 5.2 – Distribution des probabilités conditionnelles connaissant le sexe

	1 ES	1 L	1 S	Total
Femmes	$\frac{76}{218}$	$\frac{50}{218}$	$\frac{92}{218}$	$\frac{218}{218} = 1$
Hommes	$\frac{43}{132}$	$\frac{13}{132}$	$\frac{76}{132}$	1
Ensemble	$\frac{119}{350}$	$\frac{63}{350}$	$\frac{168}{350}$	1

Propriété 5.4 (Formule des probabilités composées)**.** *Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties non vides de cet univers. Alors :*

$$p(A \cap B) = p(A|B) \times p(B) = p(B|A) \times p(A)$$

Preuve. $p(B|A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(B|A) \times p(A)$ d'une part. $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A|B) \times p(B)$ d'autre part. $\diamondsuit$

Avec notre exemple on a :
- $p(E \cap F) = p(E|F) \times p(F) = \frac{76}{218} \times \frac{218}{350} = \frac{76}{350}$;
- $p(E \cap F) = p(F|E) \times p(E) = \frac{76}{119} \times \frac{119}{350} = \frac{76}{350}$.

5.2.3 Formule des probabilités totales

Propriété 5.5 (Formule des probabilités totales)**.** *Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et B une partie non vide de cet univers et A_1, A_2, ..., A_m formant une partition de Ω (voir la définition 5.5 page 74). Alors :*

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_m \cap B)$$

On l'admettra.
Avec notre exemple :
- E, S, et L forment une partition de l'univers car $E \cup S \cup L = \Omega$ (à eux trois ils regroupent toutes les possibilités) et $E \cap S = \varnothing$, $E \cap L = \varnothing$ et $S \cap L = \varnothing$ (ils sont disjoints).
  Alors $p(F) = p(E \cap F) + p(S \cap F) + p(L \cap F) = \frac{76}{350} + \frac{92}{350} + \frac{50}{350} = \frac{218}{350}$.
- F et H forment eux aussi une partition de l'univers. Alors $p(E) = p(F \cap E) + p(H \cap E) = \frac{76}{350} + \frac{43}{350} = \frac{119}{350}$

5.2.4 Arbre pondéré

En terminale ES l'utilisation de ces formules est souvent facilitée par un ou plusieurs arbres pondérés où :
- la somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- lorsqu'une situation est représentée par un arbre pondéré, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

Sur la figure 5.1 page ci-contre sont représentés les deux arbres correspondant à la situation de notre exemple.

5.2.5 Indépendance de deux événements

Définition 5.12. Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties de cet univers alors dire que deux événements sont indépendants signifie que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Remarques.
- Si A et B ne sont pas vides, si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ alors $p(A|B) = p(A)$ et $p(B|A) = p(B)$.
  Ainsi la probabilité d'obtenir A sachant que B est réalisé est égale à la probabilité d'obtenir A ;intuitivement cela signifie que A ne dépend pas de B.
- Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

5.3 Variables aléatoires

5.3.1 Les situations

On illustrera toute cette section par les situations suivantes :

1. on tourne une roue dans une fête foraine qui est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue ;
2. on lance deux dés et on s'intéresse à la somme des deux dés.

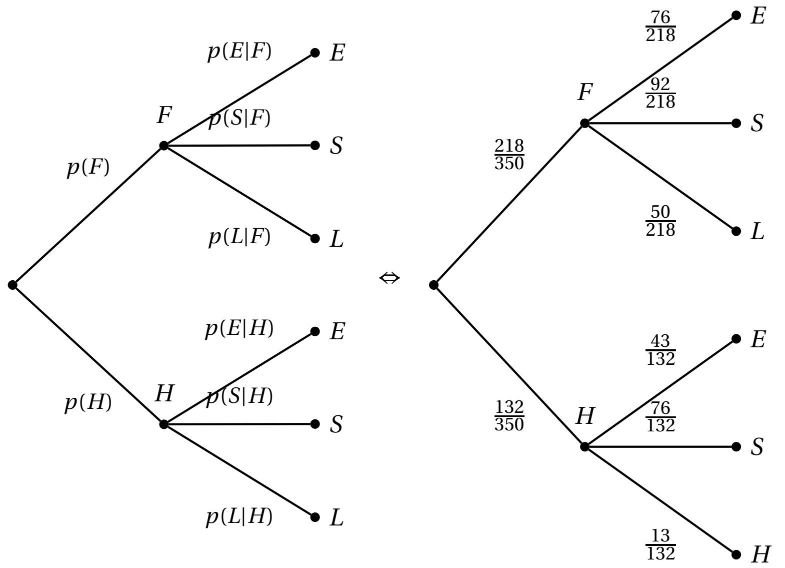
5.3.2 Définition

Définition 5.13. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
- On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- L'événement noté $\{X = x\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X.
  Cet ensemble est noté Ω'.

Avec nos situations de départ on peut imaginer les variables aléatoires suivantes :

1. La partie de roue à la fête foraine coûte 1 € et l'on gagne :

FIG. 5.1 – Arbre 1 de la situation de départ



$p(F\cap E) = p(F)\times p(E|F) = \frac{218}{350}\times\frac{76}{218} = \frac{76}{350}$

$p(F\cap S) = p(F)\times p(S|F) = \frac{218}{350}\times\frac{92}{218} = \frac{95}{350}$

$p(F\cap L) = p(F)\times p(L|F) = \frac{218}{350}\times\frac{50}{218} = \frac{50}{350}$

$p(H\cap E) = p(H)\times p(E|H) = \frac{132}{350}\times\frac{43}{132} = \frac{43}{350}$

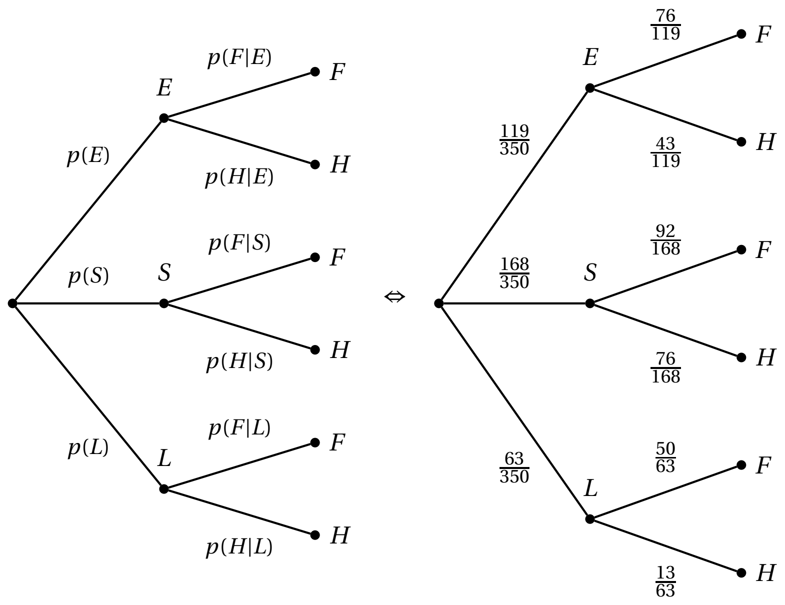
$p(H\cap S) = p(H)\times p(S|H) = \frac{132}{350}\times\frac{76}{132} = \frac{76}{350}$

$p(H\cap L) = p(H)\times p(L|H) = \frac{132}{350}\times\frac{13}{132} = \frac{13}{350}$

Enfin : $p(E) = p(F\cap E) + p(H\cap E) = \frac{76}{350} + \frac{43}{350} = \frac{119}{350}$ $\quad p(S) = p(F\cap S) + p(H\cap S) = \frac{92}{350} + \frac{76}{350} = \frac{168}{350}$

$p(L) = p(F\cap L) + p(H\cap L) = \frac{50}{350} + \frac{13}{350} = \frac{63}{350}$.

FIG. 5.2 – Arbre 2 de la situation de départ



$p(F\cap E) = p(E)\times p(F|E) = \frac{119}{350}\times\frac{76}{119} = \frac{76}{350}$

$p(H\cap E) = p(E)\times p(H|E) = \frac{119}{350}\times\frac{43}{119} = \frac{43}{350}$

$p(F\cap S) = p(S)\times p(F|S) = \frac{168}{350}\times\frac{92}{168} = \frac{92}{350}$

$p(H\cap S) = p(S)\times p(H|S) = \frac{168}{350}\times\frac{76}{168} = \frac{76}{350}$

$p(F\cap L) = p(L)\times p(F|L) = \frac{63}{350}\times\frac{50}{63} = \frac{50}{350}$

$p(H\cap L) = p(L)\times p(H|L) = \frac{63}{350}\times\frac{13}{63} = \frac{13}{350}$

Enfin :

$p(F) = p(F\cap E)+p(F\cap S)+p(F\cap L) = \frac{76}{350}+\frac{50}{350}+\frac{92}{350} = \frac{218}{350}$ $\quad p(H) = p(H\cap E)+p(H\cap S)+p(H\cap L) = \frac{43}{350}+\frac{76}{350}+\frac{13}{350} = \frac{132}{350}$

- 0 € si le bleu sort ;
- 2 € si le vert sort ;
- 5 € si le rouge sort ;

Lorsqu'on lance la roue, l'univers est donc $\Omega = \{\text{bleu}; \text{vert}; \text{rouge}\}$ et l'on peut définir la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain engendré.
Ainsi, en enlevant la mise (1 € pour pouvoir jouer), on a :

- X : bleu $\mapsto -1$
- X : vert $\mapsto 1$
- X : rouge $\mapsto 4$

2. On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :
   - $X = 0$ si la somme des deux dés est paire ;
   - $X = 1$ si elle est impaire.

   L'ensemble image de Ω par X est $\Omega' = \{0; 1\}$

Remarques.
- Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
- Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
- En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z.

5.3.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 5.14. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $\Omega' = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

On démontre facilement que $\sum_i p'_i = 1$.

En reprenant les deux situations de départ, on a :

1. Dans le cas de la roue on a (on présente généralement la chose de la manière suivante) :

x_i	-1	1	4
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. $p(X = 0)$ est la probabilité que la variable aléatoire soit égale à 0, c'est-à-dire que la somme soit paire.
   On a ainsi $p(X = 0) = p(2) + p(4) + p(6) + \cdots + p(12) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
   De même $p(X = 1) = p(1) + p(3) + p(5) + \cdots + p(11) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

5.3.4 Espérance, variance, écart type

Définition 5.15. L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :
- $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i$
- $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\omega_i - \mu)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \omega_i^2\right) - \mu^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V}$

Toujours avec les exemples de la situation dr départ :

1. (X est le gain à la roue de la fête foraine)
   - $E(X) = \frac{4}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{3}{8}$
     (le gain qu'on peut espérer est en moyenne de 0,375 €)
   - $V(X) = \frac{4}{8} \times (-1)^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{175}{64}$
   - $\sigma(X) = \sqrt{\frac{175}{64}} \approx 1,654$
2. ($X = 0$ si la somme des dés est paire, $X = 1$ si elle est impaire)
   - $E(X) = \sum_i p'_i x_i = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
   - $V(X) = \sum_i p'_i x_i^2 - (E(X))^2 = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
   - $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2}$

5.4 Exercices

Exercice 5.1.

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de Ω les événements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   - B : « obtenir un numéro impair » ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des événements suivants, les écrire sous forme de partie de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cup C$;
   - $C \cup B$;
   - $\overline{A}$;
   - $\overline{A} \cap C$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cap B$;
   - $C \cap B$;
   - $\overline{A} \cup C$;
4. Parmi tous ces événements, en citer deux qui soient contraires l'un de l'autre.

Exercice 5.2.

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les événements :
   - A : « obtenir un as » ;
   - P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?

   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?

   (c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.

   (d) Déterminer $\text{Card}(A \cap P)$ et $\text{Card}(A \cup P)$.

Exercice 5.3.

Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :

- E_1 : « la ligne A est occupé » ;
- E_2 : « la ligne B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

Exercice 5.4.

On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ».

1. Décrire $\overline{A}$.
2. Exprimer en fonction de n la probabilité $p(\overline{A})$.
3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
4. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$								

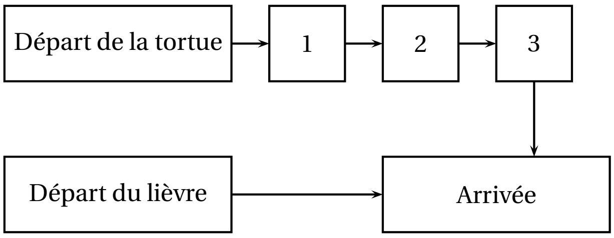
5. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?
6. Le lièvre et la tortue font la course.

   Le lièvre se divertit longuement mais quand il part, il file à l'arrivée. La tortue, quant à elle, avance inexorablement mais lentement vers l'arrivée.

   On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :
   - si le 6 sort, le lièvre avance ;
   - sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné.
     Voir figure 5.3.

   Déterminer la probabilité que le lièvre l'emporte et celle que la tortue l'emporte.

FIG. 5.3 – Figure de l'exercice 5.4



Exercice 5.5.

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « aucun des trois enfants ne sera du même sexe ».

Exercice 5.6.

Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

- Un billet ?
- Deux billets ?

Exercice 5.7.

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 12 % des bovins ont la maladie M ;
- Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95 % des cas ;
- 98 % des bêtes saines ne réagissent pas au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?
2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
3. On veut déterminer la fiabilité de ce test. Calculer la probabilité :
   (a) pour un animal d'être malade si il réagit au test ;
   (b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

Exercice 5.8.

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test ;
- 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test ;
- 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

Exercice 5.9.

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 20 % des bovins d'un troupeau sont malades ;
- 20,6 % des bovins du troupeau ont eu un test positif ;
- 1 des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

Exercice 5.10 (Trouvé sur le blog Econoclaste).

Une maladie touche une personne sur mille dans la population. Il existe un test pour cette maladie, qui est valide à 99 % ; c'est-à -dire que lorsque vous êtes malade, le test est positif dans 99 % des cas, et si vous n'êtes pas malade, le test est négatif dans 99 % des cas. Il y a 1 % de « faux positifs » et 1 % de « faux négatifs ».
Une personne fait ce test, et le test est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade ?

Exercice 5.11.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On définit une variable alétoire X en associant à chaque tirage le nombre :

- -10 si on tire le numéro 1 ;
- 10 si on tire le numéro 6 ;
- 0 dans tous les autres cas.

1. Définir l'univers Ω associé à l'expérience aléatoire et l'univers $X(\Omega)$ associé à la variable alétoire.
2. On suppose que le dé est parfaitement équilibré. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 5.12.
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble E des couples $(x\,;\,y)$, avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$, est associé à une loi de probabilité équirépartie.
À chaque couple $(x\,;\,y)$, on associe $|x-y|$. On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E.

1. Définir la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5.13.
On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « tirage »le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de « Pile »obtenues.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X.

Exercice 5.14.
On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :

- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le vert sort ;
- 1 € si le bleu sort ;
- x € si le rouge sort ;

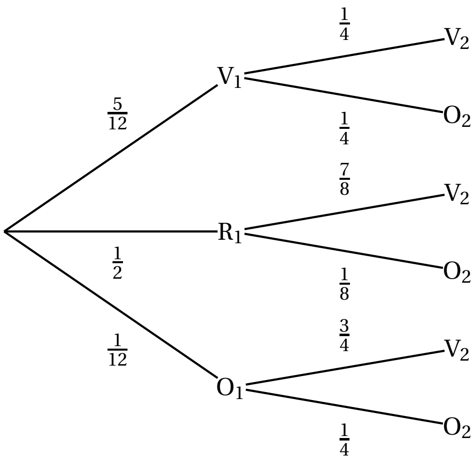
On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers $X(\Omega)$ associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ €.
   (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
5. Mêmes questions pour $x = 15$ €.
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 5.15 (Asie juin 2 007).
Partie A
Sur son trajet habituel pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores successifs dont les fonctionnements sont supposés indépendants.
Ces feux sont réglés de telle sorte que la probabilité pour un automobiliste de rencontrer le feu au vert est $\frac{5}{12}$ à l'orange $\frac{1}{12}$ et au rouge $\frac{1}{2}$.
On note :
R_1 l'événement le premier feu rencontré est au rouge
V_1 l'événement : le premier feu rencontré est au vert
O_1 l'événement : le premier feu rencontré est à l'orange
et on définit de même R_2, V_2, O_2 pour le deuxième feu rencontré.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert.

Partie B
On règle le deuxième feu afin de rendre la circulation des véhicules plus fluide.
L'arbre suivant modélise la nouvelle situation dans laquelle les fonctionnements des deux feux ne sont plus indépendants.



1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Quelle est la probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert ?

Exercice 5.16 (Bac blanc Lycée CAMILLE SEE).
Deux types de maladies A ou B affectent les animaux d'un pays. On estime que :
- 3 % des animaux sont atteints de la maladie A et de la maladie B ;
- 12 % des animaux sont atteints seulement de la maladie A ;
- 8 % des animaux sont atteints de la maladie B.

On prend un animal de ce pays au hasard.

Première partie

1. Reproduire et indiquer dans le tableau suivant les données de l'énoncé :

	B	$\overline{B}$	
A			
$\overline{A}$			

2. Calculer la probabilité que cet animal soit atteint **seulement** de la maladie B.
3. Calculer la probabilité que cet animal ne soit atteint ni de la maladie A ni de la maladie B.

Deuxième partie
Un test permettant de détecter si un animal est malade est disponible sur le marché :
- Quand un animal est malade le test est positif dans 95 % des cas.
- 98 % des animaux sains ne réagissent pas au test.

Dans la suite de l'exercice on considère que 80 % des animaux ne sont pas malades.
On note : M l'évènement : « l'animal est malade » et $\overline{M}$ l'événement contraire.
T l'évènement : « le test effectué sur l'animal est positif » et $\overline{T}$ l'évènement contraire.

1. Indiquer sur un arbre les probabilités suivantes : $p\left(\overline{M}\right)$, $p_M(T)$ et $p_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right)$.
2. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?
3. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
4. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade si le test est positif ?

Exercice 5.17 (Centres étrangers 2 007).
On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{4}$.
S'il pleut, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$.
S'il ne pleut pas, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail ?

3. Montrer que la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.
4. Un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail.
   Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?
5. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3} *près.*

Exercice 5.18.

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.
40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.
Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.
Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.
On considère les événements suivants :

F : « la grille est de niveau facile »
M : « la grille est de niveau moyen »
D : « la grille est de niveau difficile »
R : « Pierre réussit la grille » et $\overline{\text{R}}$ son événement contraire.

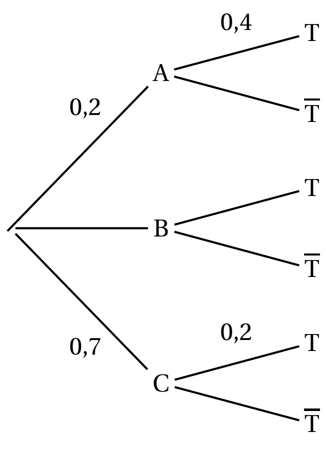
1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
   (b) Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
   (c) Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
3. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
4. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ».
   Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

Exercice 5.19 (La Réunion juin 2 007).

Les deux parties sont totalement indépendantes.

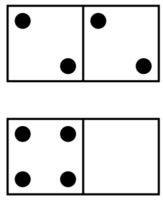
Partie A

Soient A, B, C et T quatre événements associés à une épreuve aléatoire. On note $\overline{\text{T}}$ l'événement contraire de l'événement T.
On donne l'arbre de probabilités suivant.



1. Donner la probabilité $p_\text{A}(\text{T})$ de l'événement « T sachant que A est réalisé ».
2. Calculer :
   (a) la probabilité $p(\text{B})$ de l'événement B ;
   (b) la probabilité $p_\text{A}\left(\overline{\text{T}}\right)$ de l'événement « non T sachant que A est réalisé » ;
   (c) la probabilité $p(\text{A} \cap \text{T})$ de l'événement « A et T ».
3. On sait que la probabilité $p(\text{T})$ de l'événement T est : $p(\text{T}) = 0,3$.
   (a) Calculer la probabilité $p_\text{T}(\text{A})$.
   (b) Calculer la probabilité $p_\text{B}(\text{T})$.

Partie B



Un domino est une petite plaque partagée en deux parties.
Sur chacune des parties figure une série de points.
Il peut y avoir de zéro à six points dans une série.
Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.

Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :

- le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,
- il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés

1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

Exercice 5.20 (D'après La Réunion septembre 2 006).

On s'intéresse à une population de 135 000 personnes abonnées à un fournisseur d'accès à Internet. Il existe deux fournisseurs A et B. Toute personne est abonnée à un seul de ces fournisseurs. On sait qu'un tiers des personnes de cette population est abonné au fournisseur A. Par ailleurs, 60 % des personnes abonnées au fournisseur A accèdent à Internet par le haut débit, et 51 % des personnes abonnées au fournisseur B accèdent à Internet par le haut débit.
On choisit une personne au hasard dans cette population, et on admet que la probabilité d'un événement est assimilée à la fréquence correspondante.

On note :
A, l'événement : « la personne choisie est abonnée au fournisseur A »
B, l'événement : « la personne choisie est abonnée au fournisseur B »
H, l'événement : « la personne choisie accède à Internet par le haut débit »

1. Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité de l'événement « la personne est abonnée au fournisseur A et accède à Internet par le haut débit » est égale à $0,20$.
3. Montrer que la probabilité de l'événement H : « la personne accède à Internet par le haut débit » est égale à $0,54$.
4. Calculer $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$, probabilité de A sachant H, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

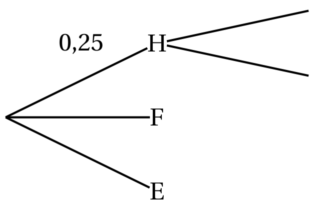
Exercice 5.21 (D'après Liban juin 2 007).

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès. Dans cette salle, les hommes représentent 25 % des spectateurs, les femmes $\frac{2}{5}$ des spectateurs et les autres spectateurs sont des enfants.
$\frac{1}{5}$ des hommes et 30 % des femmes ont déjà vu ce film au moins une fois. À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.
On appelle :
H l'événement : « la personne interrogée est un homme »
F l'événement : « la personne interrogée est une femme »
E l'événement : « la personne interrogée est un enfant »
V l'événement : « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection »
$\overline{\mathrm{V}}$ l'événement : « la personne interrogée n'avait jamais vu le film avant cette projection ».
La notation $p(\mathrm{A})$ désigne la probabilité de l'événement A.
La notation $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé.

Partie A

1. À l'aide des notations ci-dessus, traduire la situation décrite en recopiant et en complétant l'arbre pondéré dont le départ est proposé ci-dessous. On prendra soin de le compléter au fur et à mesure.



2. (a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $\mathrm{H} \cap \mathrm{V}$.
   (b) Donner $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})$ et en déduire $p(\mathrm{H} \cap \mathrm{V})$.
3. La probabilité que l'événement V soit réalisé est égale à $0,345$.
   (a) Déterminer $p\left(\overline{\mathrm{V}}\right)$.
   (b) Déterminer la probabilité que si l'on interroge un enfant, il ait déjà vu ce film au moins une fois avant cette projection.

Partie B
À la fin de l'année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu'un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film. Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

1. Déterminer q.
2. En déduire l'espérance mathématique, arrondie à l'unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 5.22 (D'après Nouvelle Calédonie mars 2 007).
Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut $\mathrm{D_A}$ et le défaut $\mathrm{D_B}$, à l'exclusion de tout autre défaut.

1. On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 28 % ont le défaut $\mathrm{D_A}$, 37 % ont le défaut $\mathrm{D_B}$, et 10 % ont les deux défauts.
   On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse ?
2. **Dans la suite du problème on s'intéresse aux pièces défectueuses qui n'ont qu'un seul défaut.**
   On admet que 40 % de ces pièces ont seulement le défaut $\mathrm{D_A}$, et que 60 % de ces pièces ont seulement le défaut $\mathrm{D_B}$. On a constaté que 40 % des pièces qui ont le défaut $\mathrm{D_A}$ sont réparables, et que 30 % des pièces qui ont le défaut $\mathrm{D_B}$ sont réparables.
   On choisit une pièce au hasard.
   On note :
   A l'événement : « La pièce a le défaut $\mathrm{D_A}$ »,
   B l'événement : « La pièce a le défaut $\mathrm{D_B}$ »,
   R l'événement : « La pièce est réparable ».
   (a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : « La pièce choisie a le défaut $\mathrm{D_A}$ et est réparable ».
   (c) Calculer la probabilité de l'événement : « La pièce choisie est réparable ».
   (d) Sachant que la pièce choisie est réparable, déterminer la probabilité qu'elle ait le défaut $\mathrm{D_A}$ (le résultat sera donné sous la forme d'une fraction irréductible).

Exercice 5.23 (D'après Polynésie juin 2 007).
Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la magie, le théâtre et la photo numérique.

150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à l'un de ces stages. Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que :
- la magie a été choisie par la moitié des enfants et 20 % des adultes
- 27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10 % des enfants.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Magie	Théâtre	Photo numérique	Total
Adultes				
Enfants				
Total				150

   On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage. On pourra utiliser les notations suivantes :
   - A l'événement « la personne appelée est un adulte » ;
   - M l'événement « la personne appelée a choisi la magie » ;
   - T l'événement « la personne appelée a choisi le théâtre » ;
   - N l'événement « la personne appelée a choisi la photo numérique ».

2. (a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?
   (b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte ?
   (c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre
3. Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est $0,32$.
4. Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.

Exercice 5.24 (Polynésie septembre 2 006).
On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles soit il diminue de 10 %, soit il est stable, soit il augmente de 10 %. On note $i_0 = 100$ l'indice de départ et i_n l'indice au bout de n jours.

1. (a) Si pendant dix jours consécutifs il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final i_{10} ?
   Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à i_0 ?
   (b) On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite (i_n) des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison.
   Dans ce cas déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1 000.
2. Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10 % avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10 % avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5.
   L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.
   On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours. On note X la valeur de l'indice i_2 au bout de deux jours.
   (a) Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.
   (b) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X où les x_i sont les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X soit égale é x_i.

x_i	81	90		100	110	121
p_i		0,2	0,12	0,25		

   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 5.25 (D'après Pondichéry 2 007).
Madame Boulard fait un très grand élevage de chats de races. Elle possède des Siamois, des Birmans et des Abyssins. Le printemps dernier, pratiquement toutes ses femelles ont eu des bébés et Madame Boulard a mis une annonce pour signaler qu'elle avait une très grande quantité de petits chatons à vendre.
On sait que :

- 32 % des chatons sont des Siamois, 54 % des chatons sont des Abyssins et le reste est constitué de Birmans.
- Parmi les Siamois, 54 % sont des mâles.
- 66 % des Abyssins sont des femelles.
- Il y a au total 40,96 % de chatons mâles.

Un petit garçon, Pierre, vient acheter un chaton avec sa mère. Comme ils sont tous adorables et qu'il n'arrive pas à choisir, Pierre décide de le prendre au hasard. On désigne par S, B, A, M et F les événements suivants :
S : « Pierre achète un chaton Siamois » ;
B : « Pierre achète un chaton Birman » ;
A : « Pierre achète un chaton Abyssin » ;
M : « Pierre achète un chaton mâle » ;
F : « Pierre achète un chaton femelle » ;

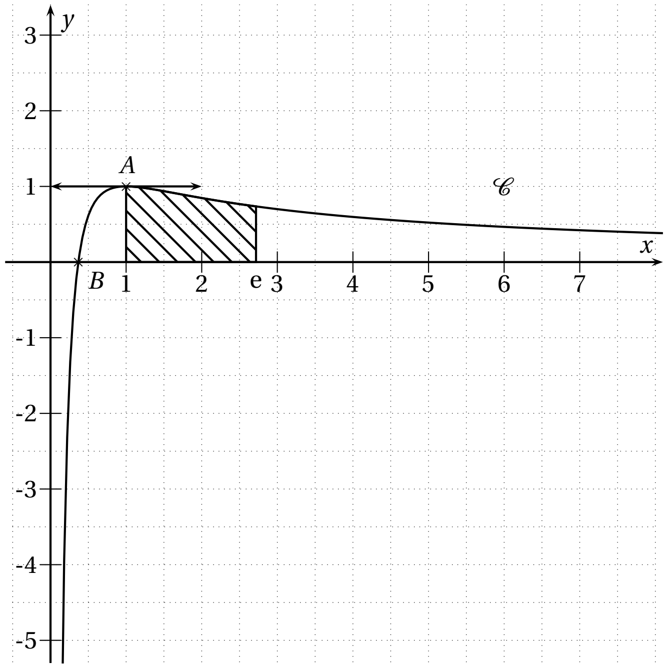
1. (a) Traduire les données de l'énoncé en langage de probabilités.
   (b) Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur chaque branche les probabilités données dans l'énoncé. Les probabilités manquantes seront calculées dans les questions ultérieures.
2. (a) Déterminer la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Siamois,
   (b) Calculer $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{A})$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
   (c) En déduire que la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Birman est égale à 0,0532.
   (d) Le chaton acheté par Pierre est un Birman. Quelle est la probabilité que ce soit un mâle ?
3. Finalement, Pierre est tellement séduit par ces chatons qu'il décide d'en acheter trois toujours au hasard. On assimilera ces achats àa des tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité qu'il y ait, parmi ces trois chatons, exactement deux mâles Birmans (*le résultat sera arrondi à* 10^{-3}) ?

Devoir surveillé n°6

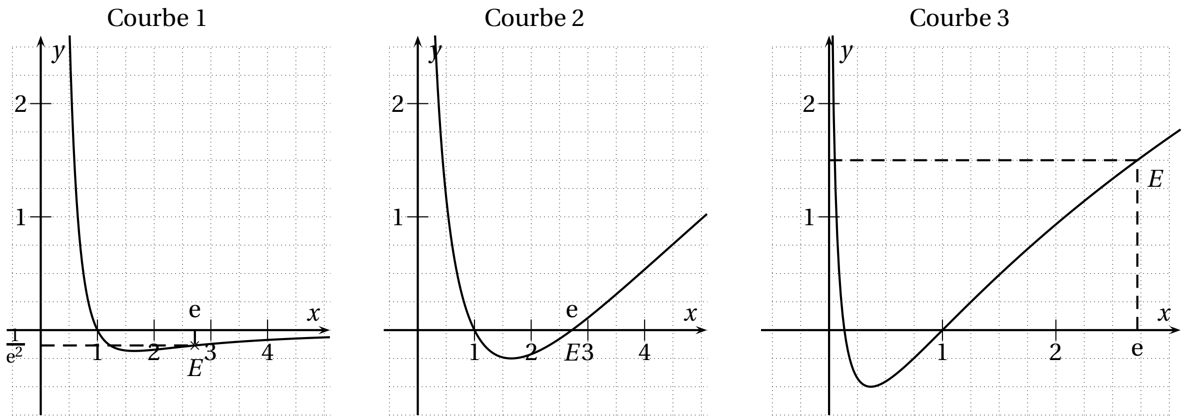
Baccalauréat blanc

EXERCICE 1 *Commun à tous les candidats (4,5 points)*

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.
Les axes (Ox) et (Oy) sont asymptotes à $\mathscr{C}$.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(1\,;1)$ et $B\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,;0\right)$ et admet une tangente parallèle à (Ox) au point A.



1. En utilisant les données ci-dessus, déterminer sans justification :
   (a) $f(1)$ et $f'(1)$;
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
   (c) les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ et les solutions de l'inéquation $f'(x) > 0$.
2. On suppose que l'une des trois courbes suivantes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de la fonction f.
   (a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle associée à F en justifiant votre réponse.
   (b) En déduire l'aire du domaine hachuré exprimée en unité d'aire.



EXERCICE 2 *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)*

Pour chacune des cinq questions suivantes numérotées de **1)** à **5)**, **une et une seule** des trois propositions a) , b) , c) est exacte. Indiquer **sur la copie** : « ***enseignement obligatoire*** » puis le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition exacte. Aucune justification n'est attendue.
Barème : *une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, une absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note pour cet exercice est ramenée à 0.*

1. Soit une série statistique à deux variables $(x\,; y)$. Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est : $y = 1,35x + 22,8$. Alors les coordonnées du point moyen sont :
   (a) $(6,5\,; 30,575)$ (b) $(32,5756\,; 6,5)$ (c) $(6,5\,; 31,575)$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x}{(x^2+1)^2}$. Alors une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction F définie par :
   (a) $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (b) $F(x) = \frac{1}{2(x^2+1)}$ (c) $F(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)}$
3. La valeur moyenne sur $[1\,;3]$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x$ est :
   (a) $\frac{25}{3}$ (b) $\frac{50}{3}$ (c) 9

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-4\ln x + 8 < 0$ est :
   (a) $]2\,;+\infty[$ (b) $]0\,;\mathrm{e}^2[$ (c) $]\mathrm{e}^2\,;+\infty[$
5. Pour tout nombre réel a strictement positif, le nombre $\ln\left(a^2+3a\right)$ est égal à :
   (a) $\ln\left(a^2\right)+3\ln(a)$ (b) $\ln(a)+\ln(a+3)$ (c) $\ln\left(a^2\right)\times\ln(3a)$

EXERCICE 3 *Commun à tous les candidats (4,5 points)*

La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1 998, elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en milliers d'euros y_i	64	75	100	113	125	127

1. (a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans un repère orthogonal.
   Les unités graphiques seront 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.
   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage (*arrondir au dixième*). Placer le point G dans le repère.
2. En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.
   (a) Donner une équation de la droite d'ajustement ($\mathscr{D}$) obtenue par la méthode des moindres carrés (*arrondir les coefficients au centième*).
   (b) Tracer cette droite ($\mathscr{D}$) dans le repère.
   (c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2 005 avec cette approximation ?
3. En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement donné par $y = f(x)$ avec

$$f(x) = -2x^2 + 23x + 63.$$

   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$.
   (b) Tracer la courbe représentative ($\mathscr{C}_f$) de la fonction f dans le repère de la question 1).
   (c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2 005 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?
4. En réalité, le bénéfice en 2 005 est en hausse de 0,9 % par rapport à celui de 2 004.
   Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2005 ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 *Commun à tous les candidats (6 points)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 5\dfrac{\ln x}{x}+3$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Déterminer la limite de f en 0 et en donner une interprétation graphique.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
2. (a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(e)$.
3. On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{5}{2}(\ln x)^2+3x$
   (a) Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme $a(\ln 2)^2+b$ avec a et b deux réels à déterminer.
4. (a) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2\,;4]$.
   (b) Donner une interprétation graphique de I.
5. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$.
   En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2 000 et 4 000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

Rappel : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$.
La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est le nombre m tel que : $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Devoir surveillé n°6 – Corrigé

Baccalauréat blanc

EXERCICE 1 *Commun à tous les candidats (4,5 points)*

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.
Les axes (Ox) et (Oy) sont asymptotes à $\mathscr{C}$.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(1\,;\,1)$ et $B\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,0\right)$ et admet une tangente parallèle à (Ox) au point A.

1. En utilisant les données ci-dessus, déterminer sans justification :
   (a) $f(1)$ et $f'(1)$;

   La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(1\,;\,1)$ donc $f(1) = 1$.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à (Ox) au point A donc son coefficient directeur est zéro, donc $f'(1) = 0$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

   L'axe (Ox) est asymptote à $\mathscr{C}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   L'axe (Oy) est asymptote à $\mathscr{C}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$. Par lecture graphique $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   (c) les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ et les solutions de l'inéquation $f'(x) > 0$.

   Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ correspondent aux abscisses des points de la courbe où elle est strictement au-dessus de l'axe des abscisses, il faut donc que $x \in \left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$.
   Les solutions de l'inéquation $f'(x) > 0$ sont les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante, il faut donc que $x \in \left]-\infty\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right[$.

2. On suppose que l'une des trois courbes suivantes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de la fonction f.
   (a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle associée à F en justifiant votre réponse.

x	0		1		$+\infty$
On sait que f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
On en conclut que $f'(x)$		$+$	0	$-$	

   Donc seule la courbe 1 convient comme représentation graphique de f'.

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,37$		$+\infty$
On sait que $F' = f$		$-$	0	$+$	
On en conclut que F		$\searrow$		$\nearrow$	

   Donc seule la courbe 3 convient comme représentation graphique de F.

   (b) En déduire l'aire du domaine hachuré exprimée en unité d'aire.

   L'aire du domaine hachuré exprimée en unité d'aire est $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = F(\mathrm{e}) - F(1) = 1,5 - 0 = 1,5$ car, par lecture graphique sur la courbe 3, $F(\mathrm{e}) = 1,5$ et $F(1) = 0$.

EXERCICE 2 *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)*

1. Soit une série statistique à deux variables $(x\,;\,y)$. Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est : $y = 1,35x + 22,8$. Alors les coordonnées du point moyen sont :

   (a) $(6,5\,;\,30,575)$ (b) $(32,5756\,;\,6,5)$ (c) $(6,5\,;\,31,575)$

   On sait que $G(\overline{x}\,;\,\overline{y})$ et qu'il appartient à la droite de régression obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Donc $\overline{x} = \dfrac{1+2+5+7+11+13}{6} = 6,5$ et $\overline{y} = 1,35 \times 6,5 + 22,8 = 31,575$.
   C'est donc la réponse c.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x}{(x^2+1)^2}$. Alors une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction F définie par :

   (a) $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (b) $F(x) = \frac{1}{2(x^2+1)}$ (c) $F(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)}$

   Obtenons les dérivées des fonctions F proposées.

   (a) $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$ donc $F = \frac{1}{v}$ et $F' = -\frac{v'}{v^2}$ donc $F'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \neq f(x)$.

   (b) $F(x) = \frac{1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+1}$ donc (même formule que ci-dessus) $F'(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{-x}{(x^2+1)^2} = f(x)$.
   C'est donc la réponse b.

   (c) Pour le plaisir : $F(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+1}$ donc $F'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} \neq f(x)$

3. La valeur moyenne sur $[1\,;\,3]$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x$ est :

   (a) $\frac{25}{3}$ (b) $\frac{50}{3}$ (c) 9

   Soit $\overline{f}$ la valeur moyenne de f sur cet intervalle. On a :

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2+2x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^3\\ &= \frac{1}{2}\left[(9+9) - \left(\frac{1}{3}+1\right)\right] = \frac{1}{2} \times \frac{50}{3} = \frac{25}{3}\end{aligned}$$

   C'est donc la réponse a.

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-4\ln x + 8 < 0$ est :

   (a) $]2\,;\,+\infty[$ (b) $]0\,;\,\mathrm{e}^2[$ (c) $]\mathrm{e}^2\,;\,+\infty[$

$$\begin{aligned}-4\ln x + 8 < 0 &\Leftrightarrow 8 < 4\ln x\\ &\Leftrightarrow 2 < \ln x\\ &\Leftrightarrow 2\ln \mathrm{e} < \ln x\\ &\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^2 < \ln x\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^2 < x\end{aligned}$$

   C'est donc la réponse c.

5. Pour tout nombre réel a strictement positif, le nombre $\ln\left(a^2+3a\right)$ est égal à :

   (a) $\ln\left(a^2\right) + 3\ln(a)$ (b) $\ln(a) + \ln(a+3)$ (c) $\ln\left(a^2\right) \times \ln(3a)$

   $\ln\left(a^2+3a\right) = \ln(a(a+3)) = \ln a + \ln(a+3)$.
   C'est donc la réponse b.

EXERCICE 3 *Commun à tous les candidats (4,5 points)*

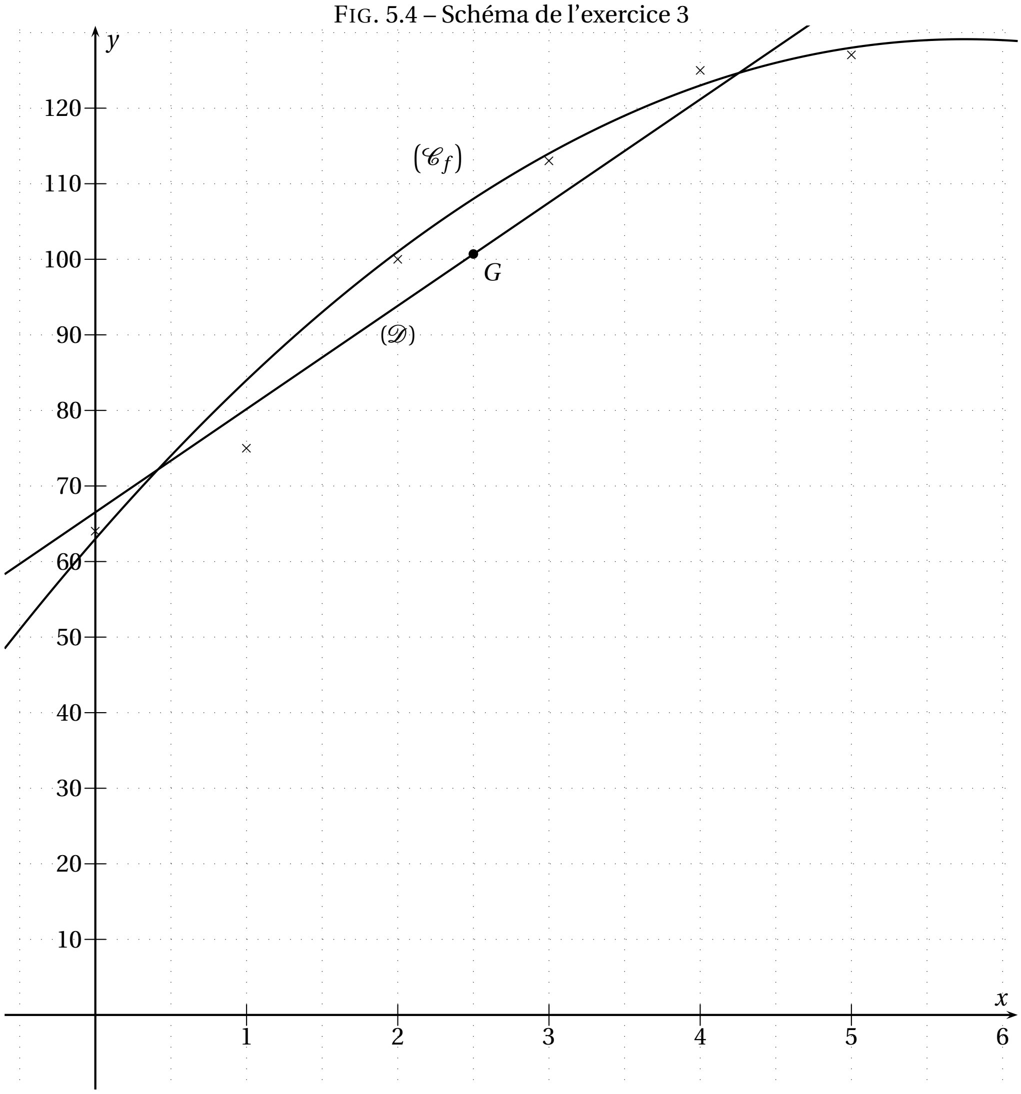
La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1 998, elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en milliers d'euros y_i	64	75	100	113	125	127

1. (a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal.

   Voir le schéma de la présente page.

FIG. 5.4 – Schéma de l'exercice 3



   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage (*arrondir au dixième*). Placer le point G dans le repère.

   $G\,(\overline{x}\,;\,\overline{y}) \approx (2,5\,;\,100,7)$. Voir schéma.

2. En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.

   (a) Donner une équation de la droite d'ajustement $(\mathscr{D})$ obtenue par la méthode des moindres carrés.

   D'après la calculatrice $(\mathscr{D})$: $y \approx 13,66x + 66,52$

   (b) Tracer cette droite $(\mathscr{D})$ dans le repère.

   Voir le schéma de la présente page.

   (c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2 005 avec cette approximation ?

2 005 correspond au rang 6 donc $y \approx 13,66 \times 6 + 66,52 = 148,48$ soit un bénéfice d'environ 148 480 € avec cette approximation.

3. En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement donné par $y = f(x)$ avec

$$f(x) = -2x^2 + 23x + 63.$$

(a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.

Première méthode.
f est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2 < 0$, $b = 23$ et $c = 63$ donc f est croissante jusqu'à $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{23}{-4} = 5,75$ et décroissante ensuite.
Deuxième méthode.
$f'(x) = -4x + 23$ qui est une fonction affine décroissante qui s'annule en $-4x + 23 = 0 \Leftrightarrow 23 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{23}{4} = 5,75$. Donc :

x	0		$5,75$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	63	$\nearrow$	$129,12$	$\searrow$	129

(b) Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f dans le repère de la question 1).

Voir le schéma page précédente.

(c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2 005 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?

$f(6) = 129$ soit 129 000 € avec cet ajustement.

4. En réalité, le bénéfice en 2 005 est en hausse de 0,9 % par rapport à celui de 2 004.
Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2005 ? Justifier la réponse.

Le bénéfice est de $127 \times \left(1 + \frac{0,9}{100}\right) = 128,143$ soit 148 143 €. La meilleure prévision est donc donnée par le second ajustement.

EXERCICE 4 *Commun à tous les candidats (6 points)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 5\dfrac{\ln x}{x} + 3$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Déterminer la limite de f en 0 et en donner une interprétation graphique.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty\end{array}\right\} \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ et donc } \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty.$$

$\mathscr{C}_f$ admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (cours) donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5\frac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5\frac{\ln x}{x} + 3 = 3$.
$\mathscr{C}_f$ admet donc la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote en $+\infty$.

2. (a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.

$f(x) = 5\dfrac{\ln x}{x} + 3$ donc $f'(x) = 5\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'$.

Or $\dfrac{\ln x}{x}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$.

Donc $f' = 5\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

D'où $f'(x) = 5\dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 5\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$.
Cherchons sur quel(s) intervalle(s) $1-\ln x<0$.
$1-\ln x<0 \Leftrightarrow 1<\ln x \Leftrightarrow \ln \mathrm{e}<\ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}<x$.
Finalement :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{\mathrm{e}}+3$	$\searrow$	3

En effet $f(\mathrm{e})=5\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}+3=5\dfrac{1}{\mathrm{e}}+3=\dfrac{5}{\mathrm{e}}+3$.

3. On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{5}{2}(\ln x)^2+3x$

(a) Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

$(\ln x)^2$ est de la forme u^2 avec $u(x)=\ln x$ et $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.
Donc sa dérivée sera $2u'u=2\dfrac{1}{x}\ln x=2\dfrac{\ln x}{x}$.
Donc $F'(x)=\dfrac{5}{2}\times 2\dfrac{\ln x}{x}+3=5\dfrac{\ln x}{x}+3=f(x)$.
F est donc une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

(b) En déduire la valeur exacte de $I=\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme $a(\ln 2)^2+b$ avec a et b deux réels à déterminer.

$I=\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t=F(4)-F(2)$.
$F(4)=\frac{5}{2}(\ln 4)^2+12=\frac{5}{2}(2\ln 2)^2+12=\frac{5}{2}\times 4(\ln 2)^2+12=10(\ln 2)^2+12$.
$F(2)=\frac{5}{2}(\ln 2)^2+6$.
Finalement $I=10(\ln 2)^2+12-\frac{5}{2}(\ln 2)^2-6=\frac{15}{2}(\ln 2)^2+6$.

4. (a) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2\,;4]$.

$f(x)=5\dfrac{\ln x}{x}+3$ donc, sur $[2\,;4]$, $\ln x>0$, $x>0$ et $f(x)>0$.

(b) Donner une interprétation graphique de I.

La fonction étant positive sur $[2\,;4]$, I est l'aire sous la courbe de f entre 2 et 4.

5. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$.
En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2 000 et 4 000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

2 000 pièces et 4 000 pièces correspondent à, respectivement, $x=2$ et $x=4$ car x est en milliers de pièces.
La valeur moyenne du bénéfice est donc $\dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}I\approx 4{,}8$ soit environ 4 800 milliers d'euros.

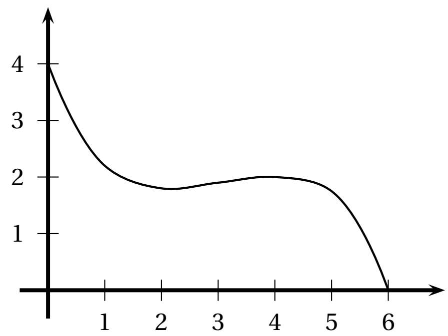
Devoir surveillé n°7

Fonction logarithme – Probabilités conditionnelles – Variables aléatoires

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, entourer la proposition qui vous semble exacte. Aucune justification n'est demandée.
Barème : *Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

1. La fonction $F : x \longmapsto \ln(2x+4)$ est une primitive sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par :
   - $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{2x+4}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x + 1$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonorrnal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées :
   - $(2\,;0)$
   - $(1\,;-1)$
   - $\left(2\,;\dfrac{3}{2} - \ln 2\right)$
3. L'ensemble des solutions de l'équation $2\ln x = \ln(2x+3)$ est :
   - l'ensemble vide
   - $\{-1\,;3\}$
   - $\{3\}$
4. Voici la courbe représentative d'une fonetion f sur l'intervalle $[0\,;6[$.



   Sur l'intervalle $[0\,;6[$, la fonction composée $x \longmapsto \ln[f(x)]$:
   - est strictement croissante.
   - a les mêmes variations que f.
   - a les variations contraires de celles de f.

EXERCICE 2

Polynésie – Septembre 2 007

Une buvette, située en bordure de plage, est ouverte de 12 heures à 18 heures. Elle propose des crêpes salées et des crêpes sucrées. Chaque client achète une seule crêpe.
60 % des clients se présentent à l'heure du déjeuner (entre 12 heures et 14 heures).
Parmi les clients achetant une crêpe l'après-midi (à partir de 14 heures), 80 % choisissent une crêpe sucrée.
On appelle :
D l'évènement : « le client est venu à l'heure du déjeuner ».
A l'évènement : « le client achète une crêpe salée ». On sait que la probabilité qu'un client achète une crêpe salée est égale à 0,62.
On pourra représenter les différentes situations par des arbres pondérés.
Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Déterminer les probabilités des évènements D et $\overline{\mathrm{D}}$.
2. (a) Un client est venu l'après-midi. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une crêpe salée ?
   (b) Calculer $P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{D}}\right)$.
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{D})$.
   (d) Un client vient à l'heure du déjeuner ; montrer que la probabilité qu'il achète une crêpe salée est égale à $0,9$.
3. Un client a acheté une crêpe salée ; quelle est la probabilité, à $0,01$ près, qu'il soit venu l'après-midi ?
4. On vend 3 euros une crêpe salée et 2 euros une crêpe sucrée. La buvette reçoit 250 clients par jour. Quelle est l'espérance de la recette quotidienne due à la vente de crêpes ?

EXERCICE 3 *Amérique du sud – Novembre 2 007*

Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.

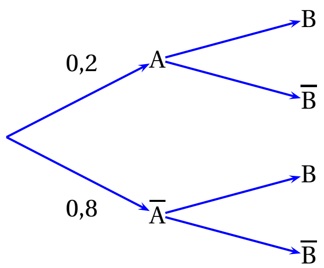
L' éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contatcté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à $0,2$; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à $0,4$; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à $0,1$.

Partie I

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.
On note :

- A l'évènement « la personne s'abonne à l'édition papier »,
- B l'évènement « la personne s'abonne à l'édition électronique »,
- $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A, $\overline{\text{B}}$ l'évènement contraire de B.

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre suivant :



   (b) Donner la probabilité de B sachant A et la probabilité de B sachant $\overline{\text{A}}$.

2. (a) Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

   (b) Justifier que la probabilité de l'évènement B est égale à $0,16$.

   (c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?

Partie II

Pour chacune des personnes contactée, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue

- 2 € si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
- 10 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
- 15 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
- 20 € si la personne s'abonne aux deux éditions.

1. Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

Somme reçue en €	2	10	15	20
Probabilité				

2. Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5 000 lecteurs potentiels.

Chapitre 6

Fonction exponentielle

Sommaire

6.1 Définition et conséquences

On a vu au chapitre 4, au paragraphe 4.4 page 62, que l'équation $\ln y = x$, où x est un réel quelconque, admet une unique solution y appartenant à $]0\,;+\infty[$. Ce réel y sera noté $\exp x$ et la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe le nombre $\exp x$ est appelée fonction exponentielle.

Définition 6.1. Pour tout réel x, on appelle *exponentielle* de x, et on note $\exp x$, l'unique réel de $]0\,;+\infty[$ dont le logarithme népérien est x.
On a ainsi :

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,;+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp x, \text{où } \exp x \text{ est le nombre tel que } \ln(\exp x) = x \end{array}$$

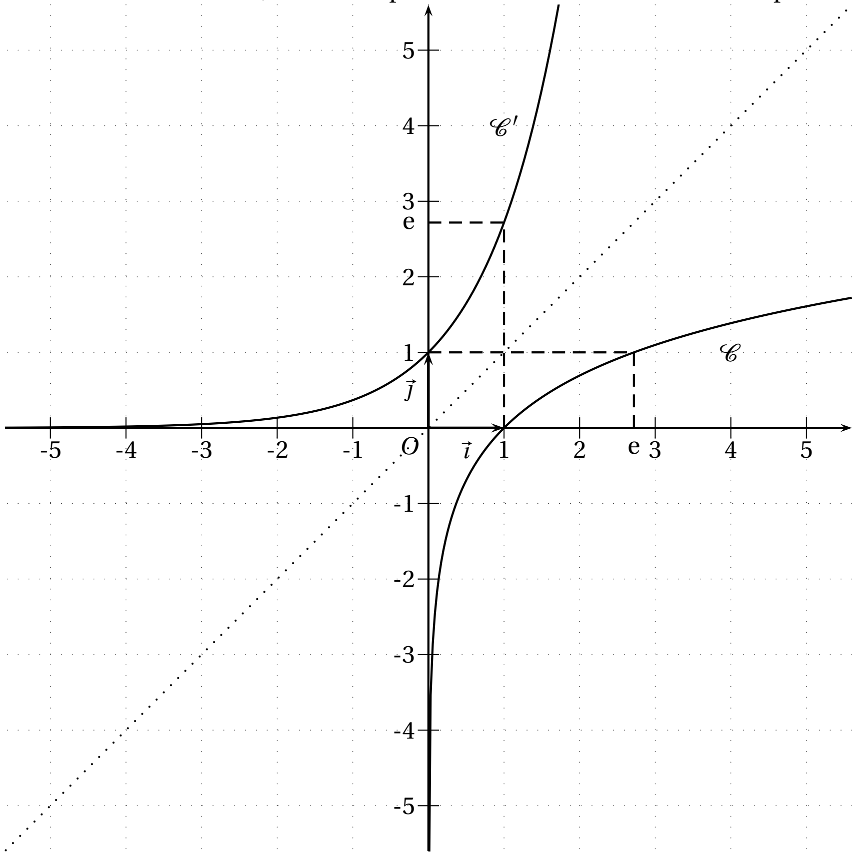
Par définition on a donc, pour tout nombre y strictement positif :

$$y = \exp x \Leftrightarrow x = \ln y$$

Remarques. De la définition précédente on peut déduire les premières propriétés suivantes :

- $\exp 0 = 1$ car $\ln 1 = 0$;
- $\exp 1 = \mathrm{e}$ car $\ln \mathrm{e} = 1$;
- $\exp x > 0$ pour tout réel x car la fonction ln n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$;
- On dit que les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques car :
  - Par définition, on a $\ln(\exp x) = x$ pour tout réel x ;
  - On a aussi $\exp(\ln x) = x$ pour tout réel $x > 0$.
    En effet, $\ln\left(\exp(y)\right) = y$ et en posant $y = \ln x$, on a $\ln\left(\exp(\ln x)\right) = \ln x$ or, comme pour tous réels strictement positifs a et b, on a $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ alors $\ln\left(\exp(\ln x)\right) = \ln x \Leftrightarrow \exp(\ln x) = x$.
- $\exp x = \exp y \Leftrightarrow x = y$.
  En effet, $\exp x = \exp y \Leftrightarrow \ln(\exp x) = \ln(\exp y) \Leftrightarrow x = y$.
- Comme la fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$.
- Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice (voir la figure 6.1 page suivante).
  En effet, $M(x\,; y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = \ln x \Leftrightarrow x = \exp y \Leftrightarrow M'(y\,; x) \in \mathscr{C}'$.

FIG. 6.1 – $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, courbes représentatives des fonctions ln et exp



6.2 Théorème fondamental

Théorème 6.1.

Pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

La fonction exp *transforme les sommes en produits*

Preuve. On utilise le fait que la fonction ln transforme les produits en sommes :

$$\ln(\exp a \times \exp b) = \ln(\exp a) + \ln(\exp b) = a + b = \ln(\exp(a+b))$$

Ainsi $\ln(\exp a \times \exp b) = \ln(\exp(a+b)) \Leftrightarrow \exp a \times \exp b = \exp(a+b)$. ◇

Théorème 6.2. *Pour tout réel a et tout entier relatif p, on a :* $\exp(ap) = (\exp a)^p$.

Preuve.

$$\ln\left((\exp a)^p\right) = p\ln(\exp a) = pa = \ln\left(\exp(pa)\right)$$

Ainsi $\ln\left((\exp a)^p\right) = \ln\left(\exp(pa)\right) \Leftrightarrow (\exp a)^p = \exp(pa)$. ◇

Remarque (Nouvelle notation pour la fonction exponentielle). D'après le théorème 6.2, pour tout entier relatif p, on peut écrire :

$$\exp p = \exp(1 \times p) = (\exp 1)^p = \mathrm{e}^p$$

Par convention, on posera : $\mathrm{e}^x = \exp x$, pour tout réel x.

6.3 Propriétés

Avec la nouvelle notation, les propriétés, entièrement compatibles avec les propriétés des puissances, deviennent :

Propriété 6.3. *Pour tous réels x et y, on a :*

- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^0 = 1$ *et* $e^1 = e$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^x > 0$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\ln e^x = x$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $e^{\ln x} = x$ *(pour* $x > 0$*)*

Preuve. On utilise encore une fois les règles de calcul sur le logarithme :

- $\ln\left(\mathrm{e}^{x+y}\right)=(x+y)\ln\mathrm{e}=x+y=\ln\mathrm{e}^x+\ln\mathrm{e}^y=\ln\left(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y\right)$ d'où $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$.
- $\ln\left(\mathrm{e}^{x-y}\right)=(x-y)\ln\mathrm{e}=x-y=\ln\mathrm{e}^x-\ln\mathrm{e}^y=\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}\right)$ d'où $\mathrm{e}^{x-y}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right)=-x\ln\mathrm{e}=-x=-\ln\mathrm{e}^x=\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ d'où $\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\left(\mathrm{e}^x\right)^y=\mathrm{e}^{xy}$ sera admise à notre niveau
- $\ln\mathrm{e}^0=0\ln\mathrm{e}=0=\ln 1$ or $\ln\mathrm{e}^0=\ln 1\Leftrightarrow\mathrm{e}^0=1$
- $\ln\mathrm{e}^1=\ln\mathrm{e}\Leftrightarrow\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$
- Par définition e^x appartient à l'ensemble de définition de la fonction ln donc $\mathrm{e}^x>0$
- $\ln\mathrm{e}^x=x\ln\mathrm{e}=x$

♢

6.4 Étude des variations de la fonction exponentielle

Théorème 6.4. *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :*

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

La fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée.

Preuve. On admettra que la fonction exponentielle est dérivable. Montrons qu'elle est bien égale à sa dérivée.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\mathrm{e}^x$ et $g(x)=x$. Ces deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}$ et ont donc la même dérivée. Or $f'(x)=\dfrac{\left(\mathrm{e}^x\right)'}{\mathrm{e}^x}$ et $g'(x)=1$.
Donc $\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$. ♢

Théorème 6.5. *La fonction exponentielle est continue et strictement croisssante.*

Preuve. Étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée (qui est e^x) est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ♢

On a donc :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$	$+$
Variation de e^x	$\nearrow$

Propriété 6.6. *Pour tous réels x et y on a :*

$$e^x\leqslant e^y\Leftrightarrow x\leqslant y$$

C'est une conséquence de la stricte croissance de la fonction exponentielle.

6.5 Limites

Activité 6.1.
On cherche à démontrer que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>x$.
On considère pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\mathrm{e}^x-x$.

1. Déterminer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. En déduire que f à un minimum que l'on déterminera.
3. Justifier pour pour tout réel x on a : $\mathrm{e}^x\geqslant x+1>x$.
   En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.

Théorème 6.7.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

Preuve.
- On a vu dans l'activité 6.1 que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.

- Montrons que $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

  Posons $X = -x$. Quand x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$. Or $\mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^X}$.

  Donc $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$.

◇

Théorème 6.8. *On a :*
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ *et, plus généralement, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ *et, plus généralement, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Preuve.
- Montrons que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
  Posons $X = \mathrm{e}^x$. On a alors $x = \ln X$.
  Quand x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty$ car $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.
- Montrons que $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.
  Posons $X = \mathrm{e}^x$. On a alors $x = \ln X$.
  Quand x tend vers $-\infty$, X tend vers 0^+.
  $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{X\to 0^+} X \ln X = 0$.
- On admettra les autres limites.

◇

6.6 Dérivées et primitives

Théorème 6.9. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction définie par e^u est dérivable sur I et :*

$$\left(e^u\right)' = u' e^u$$

Preuve. On sait que $(v(u))' = u' \times v'(u)$. En posant $v(x) = \mathrm{e}^x$, on a $v'(x) = \mathrm{e}^x$ et donc $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$. ◇

6.7 Exercices

Exercice 6.1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x = 2$
2. $\mathrm{e}^x = \frac{1}{2}$
3. $\mathrm{e}^x = -\frac{1}{2}$
4. $\mathrm{e}^x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\mathrm{e}^x \geqslant 3$
6. $\mathrm{e}^{x-4} \leqslant 1$
7. $\mathrm{e}^{x+3} = \mathrm{e}^{2x-1}$
8. $\mathrm{e}^{2x-5} > \mathrm{e}^x$
9. $\mathrm{e}^{2x-1} < \mathrm{e}$
10. $\mathrm{e}^{(x-4)(2x-1)} = 1$

Exercice 6.2.

Étudier selon les valeurs de x le signe des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 3$
- $g(x) = 5\mathrm{e}^{2x} - 7$
- $h(x) = -3\mathrm{e}^{1-x} + 5$

Exercice 6.3.

Simplifer les expressions suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x+\ln 3}$
2. $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}$
3. $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 1)$
4. $\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)$
5. $\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

Exercice 6.4.

Démontrer que pour tout réel x on a les égalités suivantes :

1. $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$
2. $\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = 1$

Exercice 6.5.
Résoudre les équations suivantes (*on pourra poser* $X = e^x$) :

1. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
2. $e^{2x} + e^x + 1 = 0$
3. $e^{2X} = 3e^x$
4. $2e^x - 3e^{-x} = -5$

Exercice 6.6.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}x(e^{-x}+1)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{-x}+1)$

Exercice 6.7.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = e^{(x^2)}$
3. $f(x) = (e^x)^2$
4. $f(x) = e^{-x}$
5. $f(x) = 3e^{2x} - 5e^x$
6. $f(x) = xe^{-x}$
7. $f(x) = (2x+1)e^{2x}$
8. $f(x) = e^{-x}(1-x)+1$
9. $f(x) = \dfrac{2}{8+e^{-x}}$

Exercice 6.8.
Déterminer une primitve de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = e^{x+1}$
3. $f(x) = e^{2x}$
4. $f(x) = e^{1-x}$
5. $f(x) = xe^{(x^2)}$

Exercice 6.9.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$d'unité 1 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   En déduire que $\mathscr{C}$ a deux asymptotes dont on donnera les équations.
2. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
3. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère.
   Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes.
4. Donner le coeffcient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en O.
   Tracer cette tangente dans le repère précédent.

Exercice 6.10.
On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^{2x} - 2x$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$.
2. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{2x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe puis dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

Exercice 6.11.
1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ où a et b sont deux réels que l'on se propose de déterminer.
   On sait que f admet un maximum au point d'abscisse 4 et que le point $A(0; 2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$d'unités graphiques 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.
   (a) Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0; +\infty[$.
   (b) Montrer que $a = 1$ et $b = -1$.
2. Étude de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
   (b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de varaitions.
3. (a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

   On arrondira les valeurs au centième.
   (b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.
4. Étude économique.
   Les dépenses de téléphone, en milliers d'euros, de la société TOUPACHER sont consignés dans le tableau suivant : x_i désigne le rang de l'année et y_i désigne la dépense.

Année	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65	3,55	3,50

On chercher une fonction qui rende compte relativement correctement du phénomène.
On dira qu'une fonction f est acceptable si, pour chaque valeur x_i, on a : $|f(x_i) - y_i| \leqslant 10^{-1}$.

(a) Représenter le nuage de points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ dans le repère précédent.

(b) Montrer que la fonction f est acceptable.

(c) Le responsable financier affirme que « si l'évolution des dépenses se poursuit selon ce modèle, on pourrait espérer retrouver une facture de téléphone inférieure à 3 000 euros ».
Êtes-vous d'accord avec cette affirmation ? Justifier.

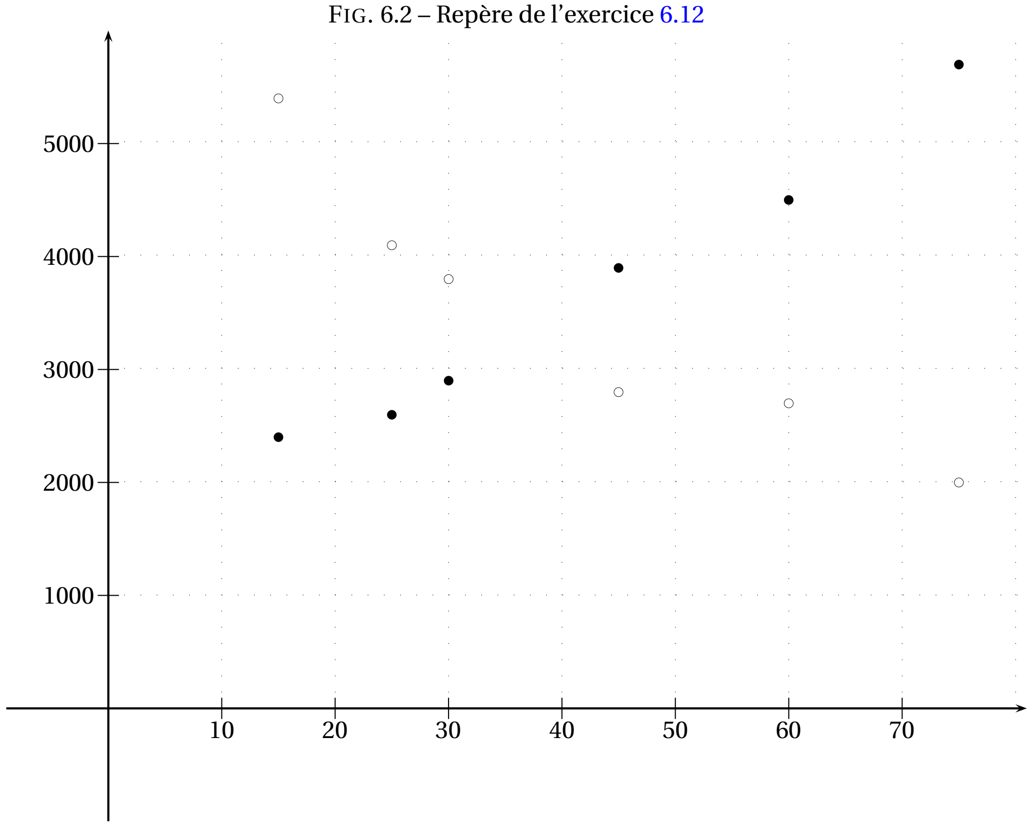
Exercice 6.12.

Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse sur une année 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75 €. On désigne par x le prix d'un livre, par p le nombre de livres disponibles et par q le nombre de livres demandés. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous :

x	15	25	30	45	60	75
p	2 400	2 600	2 900	3 900	4 500	5 700
q	5 400	4 100	3 800	2 800	2 700	2 000

On a tracé sur la figure 6.2 de la présente page les nuages de points $(x_i\,;\,p_i)$ et $(x_i\,;\,q_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

FIG. 6.2 – Repère de l'exercice 6.12



1. On pose $y = \ln p$.

   (a) Recopier et compléter le tableau (les résultats seront arrondis au millième) :

x	15	25	30	45	60	75
p	2 400	2 600	2 900	3 900	4 500	5 700
$\ln p$						

   (b) *Dans cette question, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.*
   À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au centième*).
   En déduire une expression de p en fonction de x.

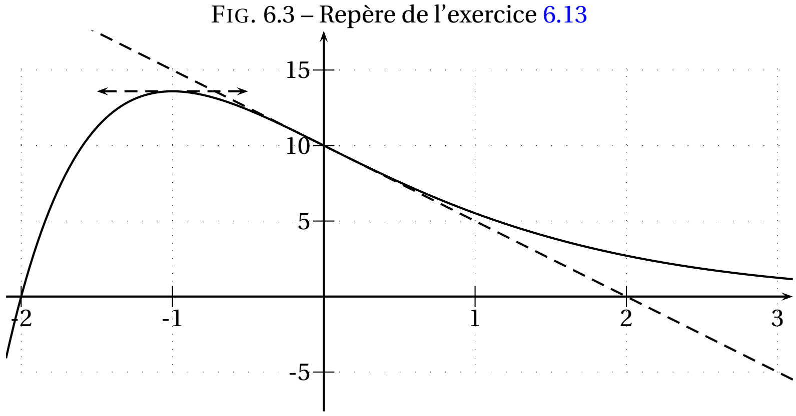
   (c) En utilisant cette expression, donner une estimation du nombre de livre disponibles pour un prix unitaire de 40 € (*résultat arrondi à la centaine*).

2. On pose $z = \ln q$ et on admet l'égalité suivante : $z = -0,02x + 8,73$.
   En utilisant cette relation, donner une estimation du prix correspondant à une demande de 2 800 livres (*résultat arrondi à l'unité*).
3. Le prix pour lequel l'offre est égale à la demande s'appelle le prix d'équilibre ; il est noté x_0.
   (a) Déterminer par le calcul le prix d'équilibre, arrondi à l'unité.
   (b) Les calculs précédents permettaient-ils de prévoir le résultat ?

Exercice 6.13.
La représentation graphique $\mathscr{C}$ de la figure 6.3 de la présente page est celle d'une fonction f définie sur $[-2;3]$ dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}$ vérifie les propriétés suivantes :

- les points marqués sont à coordonnées entières et appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$;
- la tangente au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en $x = 2$.

FIG. 6.3 – Repère de l'exercice 6.13



1. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
2. On admet que la fonction f est définie par une expression de la forme : $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{kx}$ où a, b et k sont des nombres réels.
   (a) Déterminer $f'(x)$ en fonction de a, b et k.
   (b) En utilisant les propriétés de la courbe $\mathscr{C}$, calculer a, b et k.
   (c) Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 6.14.
On considère deux fonctions f et g croissantes données par les tableaux de valeurs :

x	0	2,7	4	5,4	7,4	9,1
$f(x)$	1	3	5	9	20	40

x	0	2,2	2,8	3,1	4,5	7
$g(x)$	1	5	8	10	20	50

1. Représenter les fonctions f et g dans le repère de la figure 6.4 page suivante.
2. Le repère de la figure 6.5 page suivante est appelé repère semi-logarithmique.
   La graduation sur l'axe (Oy) n'est pas « régulière ». Son origine est 1 et elle est réalisée proportionnellement au logarithme népérien. Par exemple $\ln 10 \approx 2,3$ et $\ln 50 \approx 3,9$.
   Représenter les courbes de f et de g dans ce repère.
   Que remarque-t-on pour la courbe de f ?
3. Lorsqu'une fonction positive est représenté dans un repère semi-logarithmique par une droite passant par l'origine, cette fonction est de la forme e^{kx}. En utilisant l'égalité $f(4) = 5$ donner l'expression de f.

FIG. 6.4 – Premier repère de l'exercice 6.14

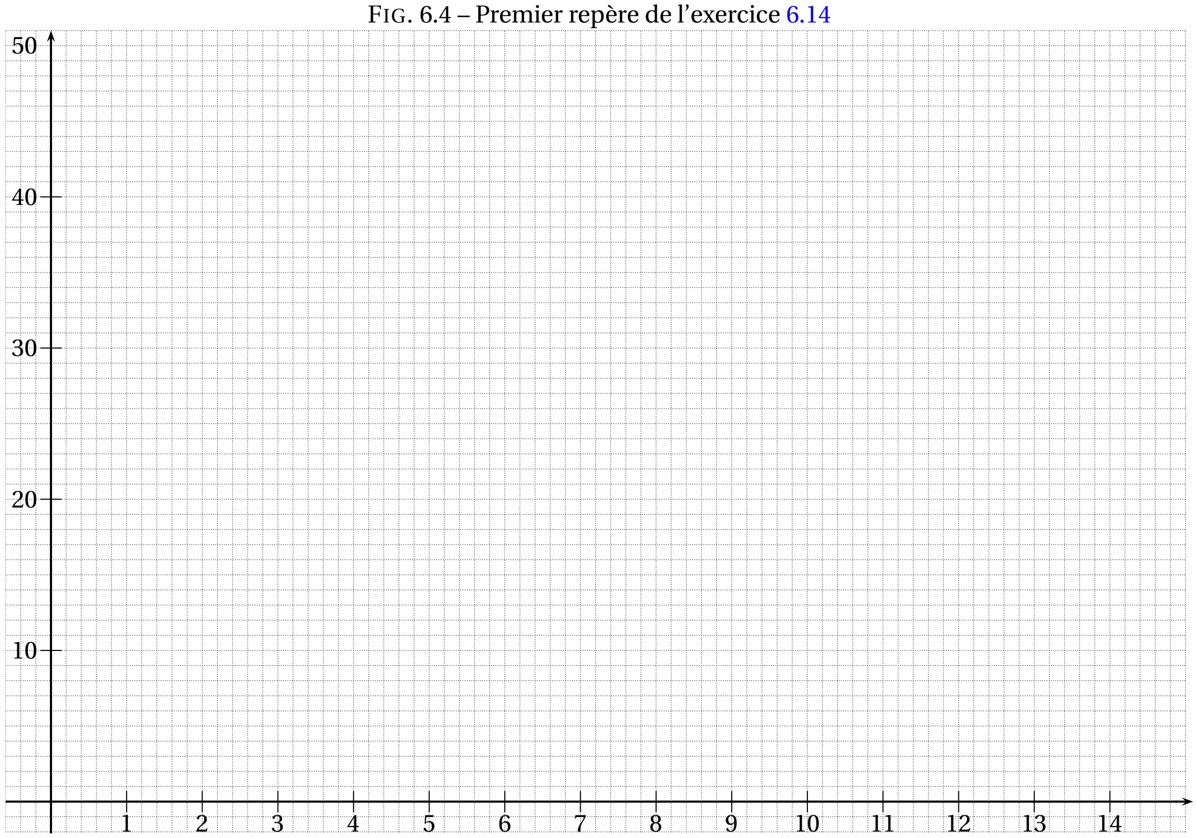
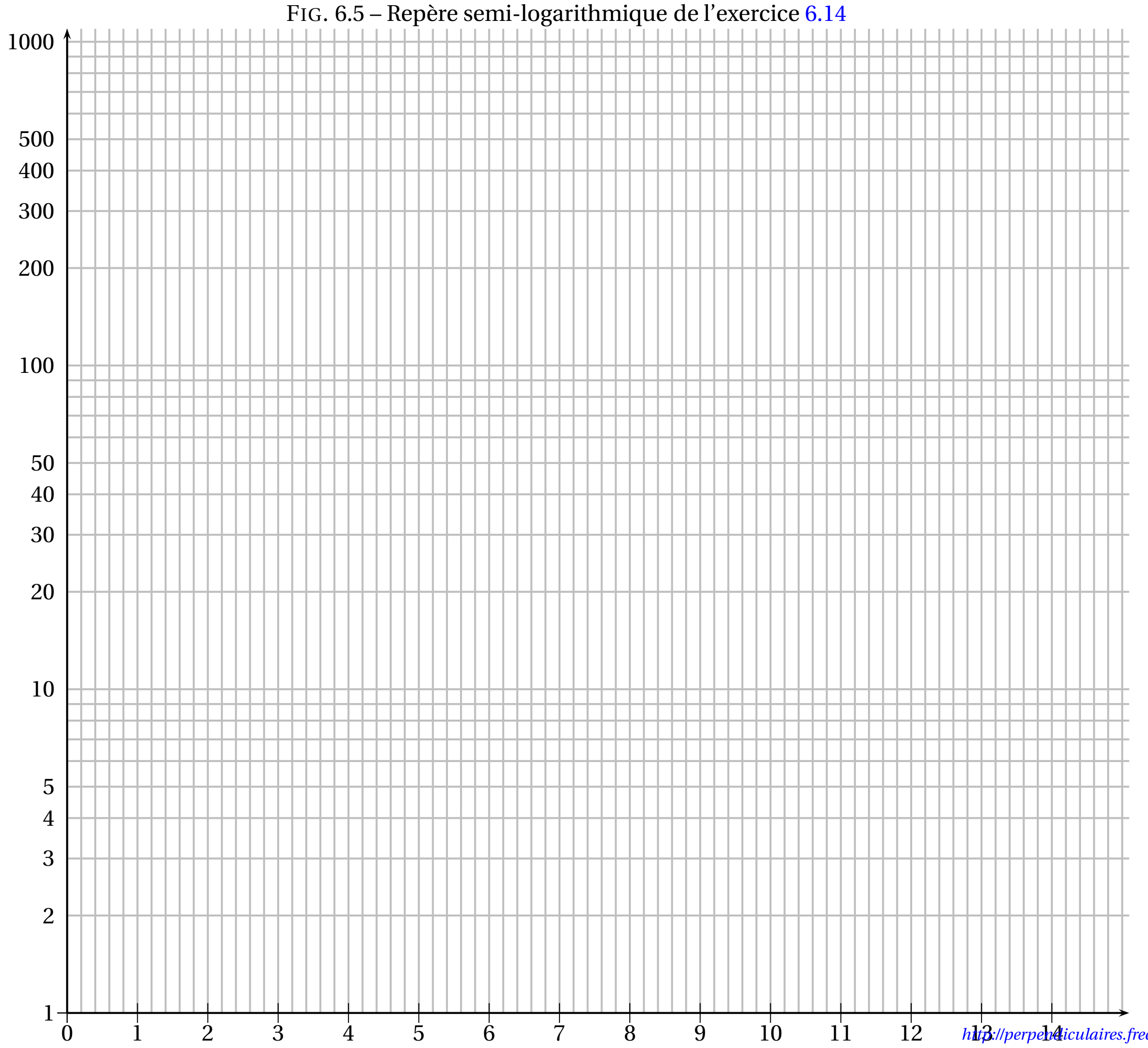


FIG. 6.5 – Repère semi-logarithmique de l'exercice 6.14



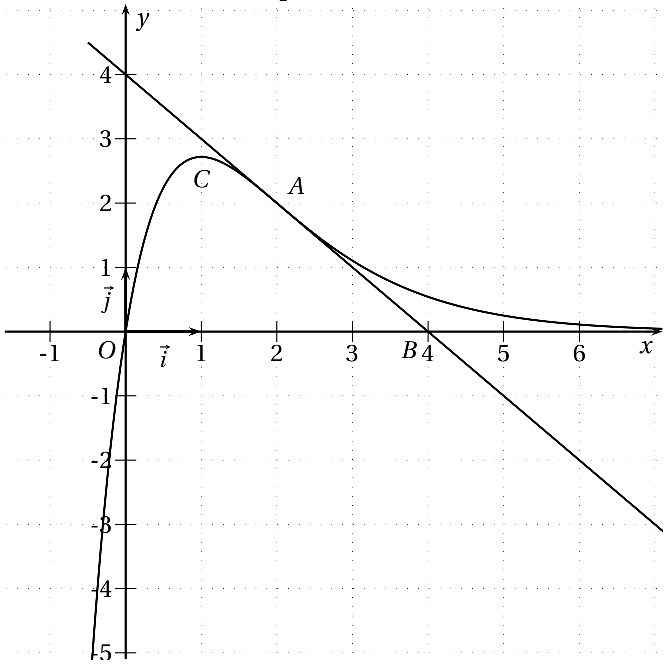
6.7.1 Annales

Exercice 6.15.

On a représenté sur la figure 6.6 de la présente page, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ.
La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques présentées sur la figure 6.7 page suivante, représente la fonction dérivée g' de g et une autre représente une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer la courbe associée à la fonction g' et celle associée à G ; vous justifierez votre choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

FIG. 6.6 – Figure de l'exercice 6.15



3. On suppose que la fonction g est la forme : $g(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx+c}$, où a, b et c sont des nombres réels.
   (a) Démontrer que $a = 0$ et que $c = -2b$.
   (b) Déterminer $g'(x)$ en fonction de b et de x.
   (c) Calculer alors les valeurs de b et de c.
4. Démontrer que la fonction G définie par $G(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{2-x}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer l'aire K, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

Exercice 6.16 (Antilles Guyane – Septembre 2 007).

On donne sur la figure 6.8 page 109 la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$ dans un repère orthonormé du plan $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est $y = -\dfrac{1}{2}x+2$. Tracer T sur le graphique.
2. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{2}x - 2$.
   (a) Démontrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$ et croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
   (b) Calculer $g(2)$. En déduire le signe de g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. (a) Hachurer sur le graphique de la feuille annexe le domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T, la droite d'équation $x = 2$ et l'axe des ordonnées.
   (b) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

FIG. 6.7 – Courbes de l'exercice 6.15

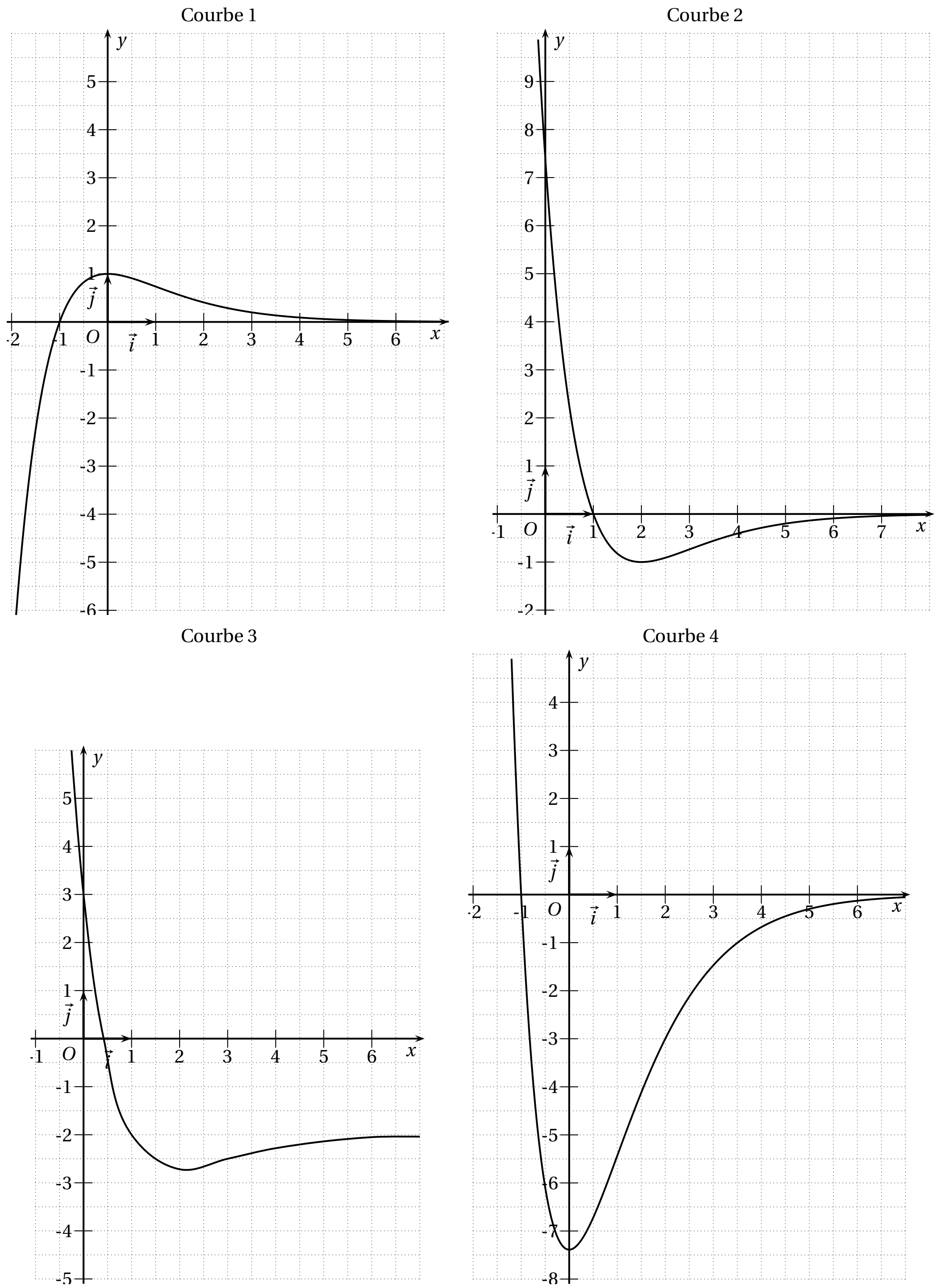
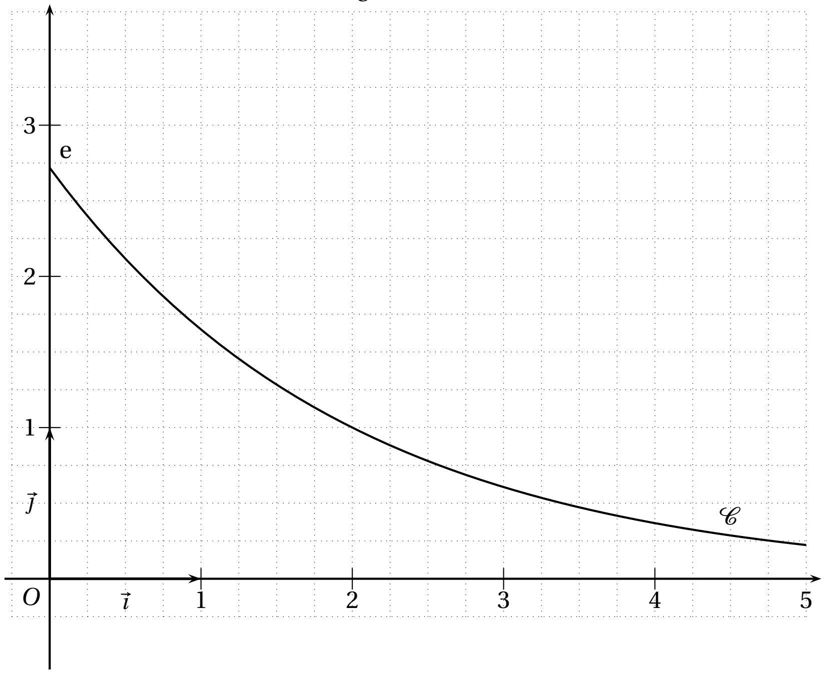


FIG. 6.8 – Figure de l'exercice 6.16



Exercice 6.17 (Métropole – La Réunion – Septembre 2 007).
La courbe ($\mathscr{C}$) donnée sur la figure 6.9 page suivante, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur R. On note f' sa fonction dérivée. Les points $A(3\,;\,\mathrm{e})$ et $B(4\,;\,2)$ appartiennent à cette courbe. La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

PARTIE I : lecture graphique

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3\,;\,10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

PARTIE II étude de la fonction

La fonction f représentée sur la figure 6.9, est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

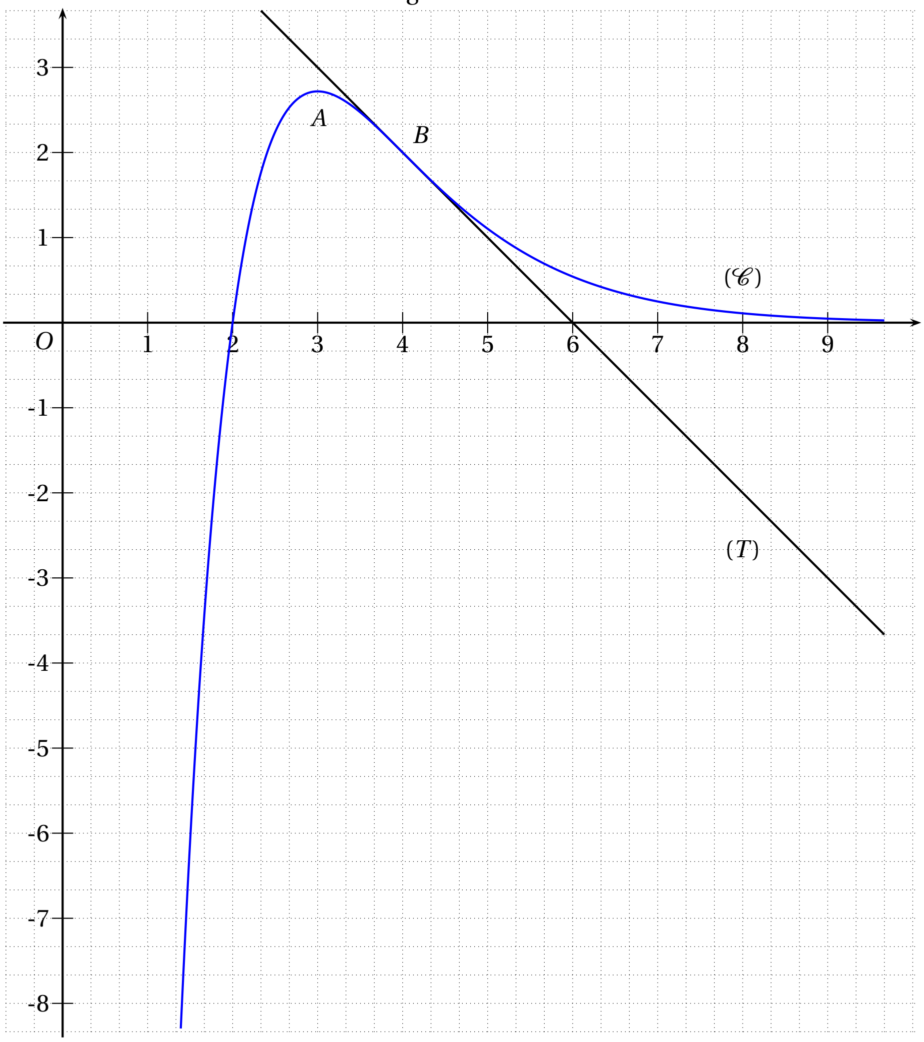
1. (a) Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
   (b) On donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.
   (b) Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[2\,;\,10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.
   Rappel : Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
   La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;\,b]$ est le nombre m tel que : $m = \dfrac{1}{b-a} \times \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE III : étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1{,}8 \leqslant x \leqslant 4{,}5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1{,}8\,;\,4{,}5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

FIG. 6.9 – Figure de l'exercice 6.17



Exercice 6.18 (Polynésie – Septembre 2 007).
Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e} + \dfrac{1}{5}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}x + \ln 5$.
2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathrm{e}^x - 1)\,(\mathrm{e}^x + 4) = 0$ est : $S = \{0\}$.
3. Si $\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^n \leqslant 0,7$ alors $n \geqslant \dfrac{\ln 0,7}{\ln 0,99}$.
4. L'ensemble. des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln\left(x^2 + 4x + 3\right) = \ln(5x + 9)$ est $S = \{-2\ ;\ 3\}$.
5. La limite quand x tend vers 1, $x < 1$, de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}\right)$ est 0.

Exercice 6.19 (Polynésie – Septembre 2 007).
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0 ; +\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0 ; 1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) Vérifier que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (c) En déduire que $(\mathscr{C})$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 4]$.
   (b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = -(x + 2)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que g est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.
   Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0 ; 4]$.
Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression : $f(q) = (q + 1)\mathrm{e}^{-q}$.

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4 000 pièces ?
2. À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?

Exercice 6.20 (Nouvelle Calédonie – Novembre 2 007).

Partie A

On considère la fonction h définie et dérivable sur R par $h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 6$. On note h' sa fonction dérivée.

1. (a) Calculer la limite de la fonction h en $-\infty$.
   (b) Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$; on pourra utiliser l'égalité vraie pour tout réel x : $h(x) = \mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 7 + 6\mathrm{e}^{-x})$.
2. Calculer $h\left[\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)\right]$, $h(0)$ puis $h(\ln 6)$.
3. Déterminer par le calcul l'image $h'(x)$ d'un réel x par la fonction h' et étudier les variations de la fonction h.
   Dresser le tableau de variations de la fonction h et faire figurer les résultats des questions précédentes dans ce tableau.
4. En déduire le tableau des signes de la fonction h.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6 - 6\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x} - 1$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère du plan d'unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données sur la figure 6.10 de la présente page.

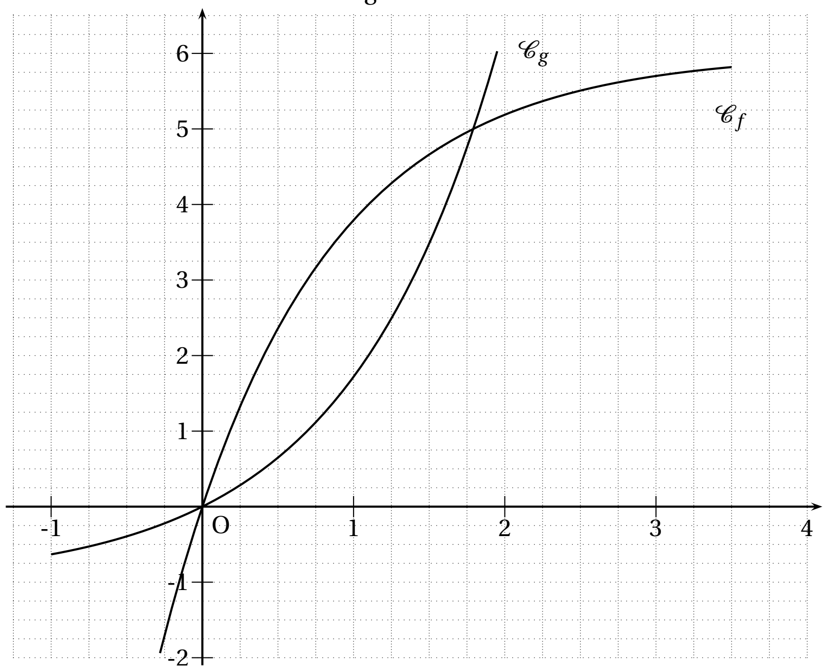
1. Démontrer que le point de coordonnées $(\ln 6\,;\,5)$ est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{-h(x)}{\mathrm{e}^{x}}$.

   (b) Déterminer, par le calcul, la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan limité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 6$.

   (a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique donné.

   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2 puis en donner une valeur approchée arrondie au centième.

FIG. 6.10 – Figure de l'exercice 6.20



Devoir surveillé n°8

Fonction exponentielle

Le barème est sur 25 points. La note obtenue sera ramenée sur 20 arrondie au quart de point supérieur.

Exercice 1 *Antilles Guyane – Septembre 2 006 – 8 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point, L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QUESTIONS	☐ **RÉPONSES**
1. L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2\right)=2$ est …	☐ $\{\mathrm{e}\}$ ☐ $\{-2\ ;\ 2\}$ ☐ $\{-\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e}\}$
2. $\exp(2x-6)$ est égal à …	☐ $\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^6$ ☐ $\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^6}$ ☐ $\left(\mathrm{e}^{x-3}\right)^2$
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-1<\mathrm{e}^x<9$ est …	☐ $]0\,;\ln 9[$ ☐ $]-\infty\,;2\ln 3[$ ☐ $]\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^9[$
4. Si $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=1,9$ et $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-0,9$, alors $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\ldots$	☐ 1 ☐ $-2,8$ ☐ $2,8$
5. La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)}$ sur $[0\,;4]$ est égale à …	☐ $\dfrac{1}{2}\ln 2$ ☐ $\dfrac{1}{4}\ln 5$ ☐ $\ln 4$
6. Laquelle de ces limites est exacte ?	☐ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}^x}\right)=-\infty$ ☐ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=-\infty$ ☐ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$
7. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total. Si le coût marginal est $C_m(q)=\dfrac{6+6\ln q}{q}$ exprimé en milliers d'euros pour $q>0$, alors le coût total exprimé en milliers d'euros est égal à	☐ $\mathrm{C_T}(q)=3\ln q(2+\ln q)$ ☐ $\mathrm{C_T}(q)=\dfrac{-6\ln q}{q^2}$ ☐ $\mathrm{C_T}(q)=6\ln q+3\ln\left(q^2\right)$
8. Si f est la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x)=2\ln x-3x+5$, alors dans un repère du plan, une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1 est …	☐ $y=-x+2$ ☐ $y=-x+3$ ☐ $y=-3x-2$

EXERCICE 2 *Polynésie – Septembre 2006 – 9 points*

On a étudié l'évolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'une certaine personne (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) pendant les cinq heures suivant l'absorption d'une certaine quantité d'alcool. On donne ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_1$ représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé à jeun (graphique n° 1) et la courbe $\mathscr{C}_2$ représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments (graphique n° 2).

FIG. 6.11 – Graphique n° 1 : courbe $\mathscr{C}_1$

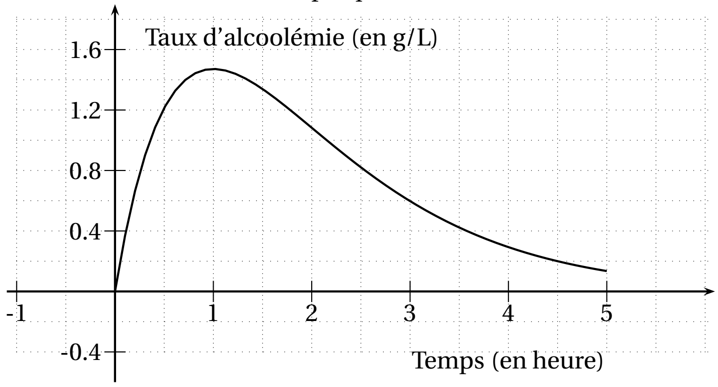
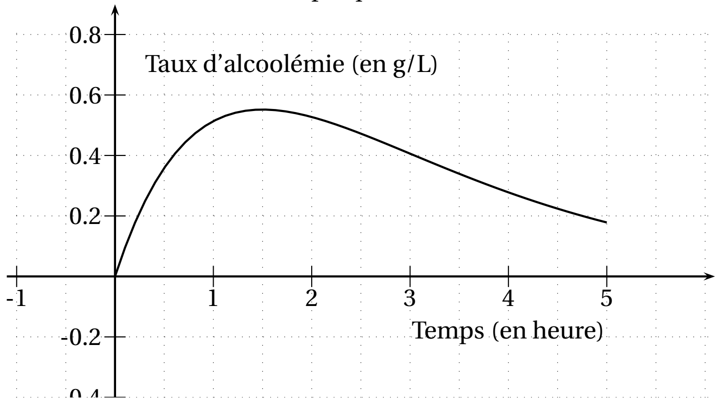


FIG. 6.12 – Graphique n° 2 : courbe $\mathscr{C}_2$



Partie A : Observation graphique

À l'aide des deux graphiques précédents, répondre aux questions suivantes :

1. Dans chacun des deux cas, donner une approximation du taux d'alcoolémie maximal et du temps au bout duquel il est atteint.
2. Depuis le 15 septembre 1995, le taux maximum d'alcoolémie autorisé au volant est 0,5 g/L. Dans chacun des deux cas, indiquer si la personne aura respecté la législation en prenant le volant au bout de trois heures.

Partie B : Modélisation

On suppose que le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) pendant les cinq heures suivant l'absorption est modélisé en fonction du temps (exprimé en heures) :

- par une fonction f_1 lorsque l'alcool est absorbé à jeun,
- par une fonction f_2 lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments,

On admet que :

- les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la première partie sont les représentations graphiques respectives des fonctions f_1 et f_2 ;
- la fonction f_1 est définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f_1(t) = 4t\text{e}^{-t}$.
- la fonction f_2 est définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f_2(t) = at\text{e}^{bt}$ où a et b désignent des nombres réels non nuls.

1. On désigne par f_2' la fonction dérivée de f_2 sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   Déterminer $f_2'(t)$.
   On admet que $f_2'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$. En déduire le réel b.
2. En utilisant le taux d'alcoolémie au bout de trois heures, déterminer une valeur approchée de a et en donner la valeur décimale arrondie à 0,1.
3. Résoudre l'équation $f_1(t) = t\text{e}^{-\frac{2}{3}t}$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 *D'après Antilles Guyane – Septembre 2 006 – 8 points*

La partie A est en bonus (hors barème). Elle n'est à traiter qu'une fois tout le reste terminé.

PARTIE A : UTILISATION D'UN GRAPHIQUE

La courbe $\mathscr{C}_g$ donnée ci-dessous (à rendre avec la copie) représente, dans un repère du plan, une partie de la représentation graphique de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{a}{e^{bx}+1}$ où a et b sont deux réels.
Soient A et B les points de coordonnées respectives A(0 ; 6) et B(4 ; 0).

1. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe au point A, déterminer $g(0)$, puis $g'(0)$.
2. Exprimer en fonction de a et b la dérivée $g'(x)$.
3. À l'aide des résultats précédents prouver que $a=12$ et $b=0,5$.

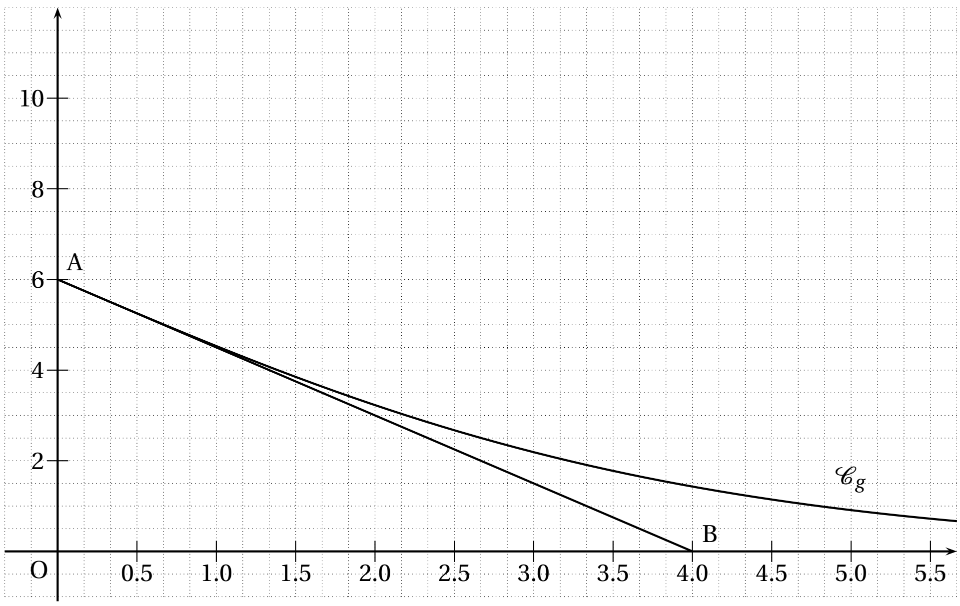
PARTIE B : ÉTUDE DE FONCTIONS

1. On donne $f(x)=e^{0,5x}-1$pour tout réel x dans $[0\,;\,+\infty[$
   (a) Calculer $f0)$, puis étudier la limite de f en $+\infty$.
   (b) Étudier le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (c) Tracer, sur le graphique en annexe, la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
2. On rappelle que $g(x)=\dfrac{12}{e^{0,5x}+1}$ et on admet que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une solution unique p sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (a) Déterminer la valeur exacte de p. Contrôler graphiquement ce résultat.
   (b) En déduire la valeur exacte de $n=f(p)$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 13} f(x)\,dx$; que représente graphiquement cette intégrale ? Le préciser sur le graphique.

PARTIE C : INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE

Pour un prix de vente unitaire x, exprimé en centaines d'euros, $f(x)$ est le nombre d'objets, exprimé en centaines, proposés sur le marché et $g(x)$ est le nombre d'objets, exprimé en centaines, que les consommateurs sont prêts à acheter.
La fonction f est appelée fonction d'offre et la fonction g fonction de demande.
À l'aide des calculs réalisés dans la partie B, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le prix d'équilibre arrondi à 1 euro ?
2. On appelle rente du producteur le nombre $R=np-\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx$ (n et p étant définis en B 2).
   Calculer la valeur exacte de R, puis son approximation décimale arrondie à la centaine d'euros.



Chapitre 7

Loi de bernoulli

Sommaire

7.1 Activité

Activité 7.1.
La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.

1. On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associent à cette épreuve le nombre de succès obtenus ($X = 0, 1$ ou 2).
   (a) Calculer la probabilité des événements $(X = 0)$, $(X = 1)$ et $(X = 2)$. On pourra utiliser un arbre pondéré et on désignera par S les succès et $\overline{S}$ les échecs.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{2} p(X = k)$.
2. On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus ($Y \in \{0\,;\,1\,;\,\dots\,;\,6\}$).
   On voudrait calculer la probabilité de l'événement $(Y = 4)$.
   (a) Peut-on encore raisonner à l'aide d'un arbre ?
   (b) Calculer la probabilité qu'il comence par quatre succès suivis de deux échecs.
   (c) Les succès et les échecs n'apparaissant pas nécessairement dans cet ordre, déterminer, parmi les « mots » de six lettres ne contenant que des S et des $\overline{S}$, combien contiennent exactement quatre fois la lettre S.
   (d) En déduire la probabilité de l'événement $(Y = 4)$

7.2 Loi binomiale

Définition 7.1 (Épreuve de Bernoulli)**.** Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire dont l'univers ne contient que deux événements élémentaires, qu'on appelle parfois *succès* et *échec*. On dit que cette expérience est une *épreuve de Bernoulli*.

Exemples 7.1.
1. Un joueur lance un dé équilibré et on s'intéresse à l'obtention du six.
   Soit A l'événement « on obtient un six ». Nous avons $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(\overline{A}) = \frac{5}{6}$.
2. Un joueur lance une pièce équilibrée et on s'intéresse à l'obtention du pile.
   Soit A l'événement « on obtient pile ». Nous avons $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(\overline{A}) = \frac{1}{2}$.
3. La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.
   Soit A l'événement « il atteint sa cible ». Nous avons $p(A) = \frac{3}{4}$ et $p(\overline{A}) = \frac{1}{4}$.

Définition 7.2 (Loi de Bermoulli)**.** Soit $\mathscr{E}$ une épreuve de Bernoulli. On note p la probabilité de succès. Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de succès et 0 sinon. Alors on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Définition 7.3 (Schéma de Bermoulli)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque répète de manière indépendante n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on dit que l'on est dans un *schéma de Bernoulli.*

Définition 7.4 (Loi binomiale)**.** Soit $\mathscr{E}$ une épreuve de Bernoulli. On note p la probabilité de succès. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On repète n fois de manière indépendante l'épreuve $\mathscr{E}$ et on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès.
On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p, notée $B(n\,;\,p)$.

En Terminale ES, on déterminera systématiquement la loi de probabilité de X à l'aide d'un arbre et on admettra la propriété suivante :

Propriété 7.1. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre p et n, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;\,1]$. On note $q = 1 - p$. Alors :*

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq$$

7.3 Exercices

Exercice 7.1.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.
Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement : « L'élève choisi fume », et $p(A)$ la probabilité de cet événement. On note F l'événement : « L'élève choisi est une fille ».
   Quelle est la probabilité que :
   (a) Cet élève soit un garçon ?
   (b) Cet élève soit une fille qui fume ?
   (c) Cet élève soit un garçon qui fume ?
2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que $p(A) = 0,36$.
3. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise. À l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur.

Exercice 7.2.
Une urne de Bernoulli contient deux boules blanches et une boule noire.

1. On tire deux boules successivement avec remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
2. On tire deux boules successivement sans remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
3. On tire deux boules simultanément et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 7.3.
Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2. Dans chaque livraison figurent 20 % de câbles C_1 et 80 % de câbles C_2.
On prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience et on note X le nombre de câbles C_1 obtenus.

1. On suppose que $n = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1.
   (b) Calculer la probabilité d'obetnir au moins un câble de type C_1.
   (c) Calculer l'espérence $E(X)$.
2. Dans cette question n est inconnu.
   (a) Exprimer $p(X \geqslant 1)$ en fonction de n.
   (b) Combien de fois faut-il réalise l'expérience pour être sûr à 90 % d'obtenir au moins un câble C_1 ?

7.3.1 Annales

Exercice 7.4 (France métropolitaine – Juin 2 002).

Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle. À la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :

A « La personne a une activité professionnelle » ;
B « La personne poursuit ses études » ;
C « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».

On a constaté que 60 % des réponses ont été envoyées par des filles. Dans l'ensemble des réponses reçues, en a relevé les résultats suivants :

* 65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;
* 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.
   (a) Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0, 18.
   (b) Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.
2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?
3. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).
   À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.
4. Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20 \leqslant S < 22$	$22 \leqslant S < 26$	$26 \leqslant S < 30$	$30 \leqslant S < 34$	$34 \leqslant S < 38$	$38 \leqslant S < 40$
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

Exercice 7.5 (Centres étrangers – Juin 2 007).

On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{4}$.

S'il pleut, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$.

S'il ne pleut pas, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail ?
3. Montrer que la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.
4. Un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail.
   Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?
5. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3} *près.*

Exercice 7.6 (Nouvelle-Calédonie – mars 2 007).

Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut D_A et le défaut D_B, à l'exclusion de tout autre défaut.

1. On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 28 % ont le défaut D_A, 37 % ont le défaut D_B, et 10 % ont les deux défauts.
   On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse ?
2. **Dans la suite du problème on s'intéresse aux pièces défectueuses qui n'ont qu'un seul défaut.**
   On admet que 40 % de ces pièces ont seulement le défaut D_A, et que 60 % de ces pièces ont seulement le défaut D_B. On a constaté que 40 % des pièces qui ont le défaut D_A sont réparables, et que 30 % des pièces qui ont le défaut D_B sont réparables.
   On choisit une pièce au hasard.
   On note :

A l'évènement : « La pièce a le défaut D_A »,
B l'évènement : « La pièce a le défaut D_B »,
R l'évènement : « La pièce est réparable ».

(a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation

(b) Calculer la probabilité de l'évènement : « La pièce choisie a le défaut D_A et est réparable ».

(c) Calculer la probabilité de l'évènement : « La pièce choisie est réparable ».

(d) Sachant que la pièce choisie est réparable, déterminer la probabilité qu'elle ait le défaut D_A (le résultat sera donné sous la forme d'une fraction irréductible).

(e) À trois moments différents, on choisit au hasard une pièce parmi les pièces défectueuses qui ont un seul défaut. On suppose que ces tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante. Calculer la probabilité pour que, sur les 3 pièces choisies, exactement 2 pièces aient le défaut D_A.

Exercice 7.7 (Polynésie – Juin 2 006).

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne. Elle révèle que 40 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons. Sur l'ensemble de la clientèle, 40 % choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe. En fait, 60 % des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20 % des clients pour raison touristiques voyagent en première classe.

On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi. On note :
A l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
T l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
D l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
V l'évènement « le client interrogé voyage en première classe ».

Si E et F sont deux évènements, on note $p(\mathrm{E})$ la probabilité que E soit réalisé, et $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\overline{\mathrm{E}}$ l'évènement contraire de E.

1. Déterminer : $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{T})$, $p(\mathrm{V})$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{V})$ et $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{V})$.
2. (a) Determiner la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.

   (b) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.

   (c) En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.
3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.
4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante. On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.

   (a) Prouver que : $p_n = 1 - 0,4^n$.

   (b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,9999$.

Exercice 7.8 (La Réunion – Juin 2 006).

Une entreprise de transports routiers dispose de 16 camions dont :
- 9 sont considérés comme « anciens »
- 4 sont considérés comme « récents »
- 3 sont considérés comme « neufs ».

Partie A

L'entreprise décide d'observer l'état des 16 camions pendant une période donnée. On sait de plus que, pendant cette période, la probabilité que :
- un camion « ancien » ait une panne, est égale à 0,08
- un camion « récent » ait une panne, est égale à 0,05
- un camion « neuf » ait une panne, est égale à 0,002 5.

On choisit au hasard un camion parmi les 16. On note les évènements suivants :
A : « le camion est ancien »
R : « le camion est récent »
N : « le camion est neuf »
D : « le camion a une panne ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant les éventualités associées au choix d'un camion.

2. Calculer la probabilité que le camion choisi soit récent et ait une panne (*on donnera, pour cette question et les deux suivantes, à chaque fois une valeur approchée du résultat arrondie à* 10^{-4} *près*)
3. Calculer la probabilité que le camion choisi ait une panne.
4. Calculer la probabilité que le camion soit neuf sachant qu'il n'a pas de panne.

Partie B
Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux camions « neufs ».
(*on donnera, pour chacune des questions suivantes, une valeur approchée du résultat arrondie au millième*).
Un camion peut être indisponible pour des raisons de matériel ou de personnel. Chaque camion neuf a de façon indépendante une probabilité d'indisponibilité de $0,01$.
Déterminer la probabilité pour qu'un jour donné :

1. tous les camions « neufs » soient indisponibles (événement T)
2. un camion « neuf » au moins soit indisponible (événement M)
3. deux camions « neufs » exactement soient disponibles (événement S).

Exercice 7.9 (Amérique du sud – Novembre 2 005).
Lors d'un examen, Julien doit répondre à un Q.C.M.
À chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chaque question, soit il connaît la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connaît pas et, dans ce cas, bien qu'il ait la possibilité de ne pas répondre, il préfère tenter sa chance et répond au hasard il a alors une chance sur trois que sa réponse soit exacte.
On suppose, de plus, que la probabilité que Julien connaisse la réponse à une question donnée est égale à $\frac{1}{2}$.
On note C l'évènement « Julien connaît la réponse »,
E l'évènement « la réponse est exacte ».

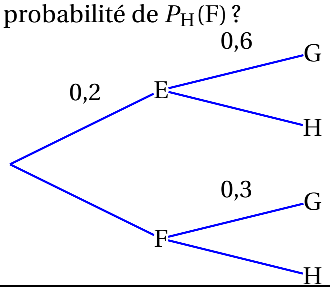
Rappel de notation : pour un évènement A donné, $p(\text{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A et $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. (a) Julien répond à une question du Q.C.M.
   Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   (b) Démontrer que : $p(\text{E}) = \frac{2}{3}$.
   (c) Calculer la probabilité que Julien connaisse la réponse à la question sachant que sa réponse est exacte.
2. Le Q.C.M. est composé de trois questions indépendantes. Il est noté sur 3 points. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0. Soit X la note obtenue par Julien à ce Q.C.M.«
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra s'aider d'un arbre. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
   (b) Quelle est la probabilité que Julien ait au moins 1,5 point à ce Q.C.M. ?
   (c) En supposant que tous les élèves se comportent comme Julien, quelle moyenne, arrondie au centième, peut-on attendre à ce Q.C.M. ?

Exercice 7.10 (Amérique du nord – Mars 2 007).
Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste àa cocher la réponse exacte dans le tableau 7.1 page suivante sans justification.
Une bonne réponse apporte 1 *point, une mauvaise enlève* $0,5$ *point.*
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

Rappel : La notation $P_{\text{A}}(\text{B})$ désigne la probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

TAB. 7.1 – QCM de l'exercice 7.10

Questions	
1. A et B sont deux évènements indépendants tels que $p(\text{A}) = 0,7$ et $p(\text{B}) = 0,2$.	☐ $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,14$
	☐ $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0,9$
	☐ $p_{\text{A}}(\text{B}) = 0,5$
2. Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côte face est égale à $\frac{1}{3}$. On lance 4 fois de suite cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face ?	☐ $\frac{18}{81}$
	☐ $\frac{72}{81}$
	☐ $\frac{65}{81}$
3. On considère l'arbre pondéré ci-dessous. Quelle est la probabilité de $P_{\text{H}}(\text{F})$?  	☐ $P_{\text{H}}(\text{F}) = 0,7$
	☐ $P_{\text{H}}(\text{F}) = 0,56$
	☐ $P_{\text{H}}(\text{F}) = 0,875$
4. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire, avec remise, une boule au hasard, n fois de suite (avec $n > 1$). Quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ?	☐ $1 - \frac{1}{2^n}$
	☐ $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$
	☐ $1 - \frac{1}{2^{2n}}$

Chapitre 8

Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)

Sommaire

8.1 Activité

Max a placé le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 000 un capital de 100 € à intérêts composés à un taux annuel de 20 %.[1] Il peut à tout moment retirer le capital augmenté des intérêts produits.
On appelle C_n le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2000 + n$. Ainsi $C_0 = 100$.

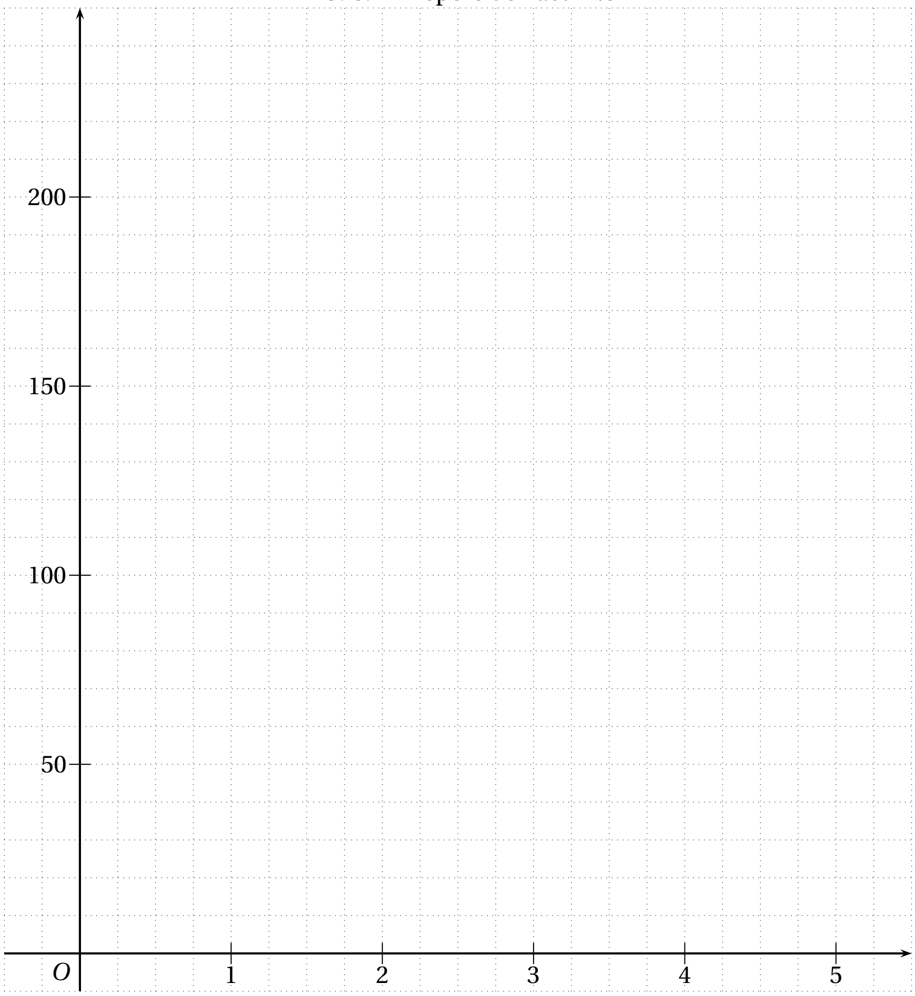
1. (a) Déterminer C_1, C_2, C_3 et C_4. De quelle nature est la suite (C_n) ? On précisera ses caractéristiques.
   (b) Représenter la suite dans le repère de la figure 8.1 page suivante.
   On rappelle que la représentation graphique d'une suite (u_n) est le nuage constitué des points $(n\,;\,u_n)$.
   Les points sont-ils alignés ?
2. Le 1$^{\text{er}}$ juin 2 003, un imprévu oblige Max à retirer l'intégralité de son capital. La banque lui reverse alors sur son compte 189,29 €. Max est surpris car ce montant ne lui semble correspondre à rien. Après renseignement, il apprend que la banque a transformé son taux annuel de 20 % en un taux mensuel équivalent. Max n'a pas bien compris mais n'a pas osé insister et il vous demande d'essayer de déterminer ce taux.
   (a) Soit t un taux mensuel quelconque.
      i. Que devient un capital C placé à ce taux mensuel au bout d'un an ?
      ii. En déduire que le taux mensuel t appliqué par la banque est solution de l'équation :
$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12} = 1{,}2$$
      iii. Déterminer alors une valeur approchée de t à 10^{-3} près et vérifier que ce taux donne bien la somme versée par la banque.
   (b) Étienne, un ami de Max, après avoir pris connaissance de votre travail, vous demande s'il n'y a pas plus simple. « En effet, regarde : au bout de trois ans, le capital de Max est $100 \times 1{,}2^3$, au bout de quatre ans, il est de $100 \times 1{,}2^4$ et bien au bout de trois ans et demi, il doit être de $100 \times 1{,}2^{3{,}5}$. Non ? »
   Julie est intriguée par la proposition d'Étienne : « Je ne comprend pas ce que veut dire "exposant 1,2" ». « Moi non plus, répond Étienne, mais ça doit être un peu comme la fonction exponentielle sauf que ce n'est pas e mais 1,2 ».
      i. Regarder, à la calculatrice, si le calcul proposé par Étienne donne la somme versée par la banque.

[1] Les taux d'intérêts sont en général plutôt de l'ordre de 3 à 4 %, la situation de l'activité est donc purement fictive.

ii. Écrire $1,2^{3,5}$ sous la forme e^{β} où β est un réel (valeur exacte demandée).
On rappelle que, pour tout réel $a > 0$, $a = e^{\ln a}$.

iii. De la même manière, écrire $1,2^x$ sous la forme $e^{u(x)}$ où $u(x)$ est une fonction de x et représenter cette fonction dans le repère de la figure 8.1.
Que constate-t-on ?

FIG. 8.1 – Repère de l'activité



8.2 Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)

8.2.1 Définition

Définition 8.1. Soit a un réel strictement positif.
On appelle *fonction exponentielle de base a*, la fonction f_a (notée parfois $\exp_a$) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = e^{x\ln(a)}$$

On a vu que pour tout entier n et tout réel a strictement positif, on avait $n\ln a = \ln(a^n)$. On admettra que cela est vrai pour tout réel x. Ainsi, pour tout réel x, $x\ln a = \ln(a^x)$, et $e^{x\ln(a)} = e^{\ln(a^x)} = a^x$. On a alors :

Propriété 8.1. *Soit a un réel strictement positif.*
Alors :

$$f_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^x$$

8.2.2 Propriétés algébriques

Les règles de calcul, connues dans le cas d'exposants entiers, s'étendent aux exposants réels non entiers. On a alors :

Propriété 8.2. *Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tous réels x et y, on a :*
- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x b^x = (ab)^x$

Preuve. Toutes ces propriétés se démontrent en revenant à la définition $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. Ainsi :
$a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a + y \ln a} = \mathrm{e}^{x \ln a}\mathrm{e}^{y \ln a} = a^x a^y$.
Les autres sont laissées en exercice au lecteur. ♢

8.2.3 Cas particulier : racines n-ièmes d'un réel a $(a > 0)$

Définition 8.2. Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul. Alors le nombre $b = a^{\frac{1}{n}}$ est l'unique nombre positif tel que $b^n = a$. On l'appelle la racine n-ième de a et on le note $\sqrt[n]{a}$.

Remarque. Dans le cas de la racine "deuxième", on retrouve la racine carrée et on peut omettre le 2 dans la notation $\sqrt[2]{a}$.

Exemple 8.1. Dans l'activité au point 2(a)ii, où $t \geqslant 0$, on peut résoudre l'équation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12} = 1,2 \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} &= \sqrt[12]{1,2} \\ \Leftrightarrow \frac{t}{100} &= \sqrt[12]{1,2} - 1 \\ \Leftrightarrow t &= 100\left(\sqrt[12]{1,2} - 1\right) \approx 1,531 \end{aligned}$$

8.2.4 Étude des fonctions $x \longmapsto a^x (a > 0)$

Lorsque $a = 1$, on a $a^x = 1^x = 1$. La fonction est donc constante. On écartera ce cas trivial pour la suite.

Ensemble de définition

Comme $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, les fonctions expontielles de base a sont définies pour tout réel x, donc sur $\mathbb{R}$.

Limites aux bornes

$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ or
- $\ln a$ négatif $\Leftrightarrow \ln a < 0 \Leftrightarrow \ln a < \ln 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$ (on rappelle que $a > 0$) ;
- $\ln a$ nul $\Leftrightarrow a = 1$;
- $\ln a$ positif $\Leftrightarrow \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Donc :
- si $0 < a < 1$,
  $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0^+$ donc $\lim\limits_{x to +\infty} a^x = 0^+$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x to -\infty} a^x = +\infty$;
- si $a = 1$, la fonction est constante, égale à 1 ;
- si $a > 1$,
  $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0^+$

Variations

$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = \mathrm{e}^{u(x)}$ où $u(x) = x \ln a$ et $u'(x) = \ln a$.
Donc $x \longmapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \ln a \times \mathrm{e}^{x \ln a} = \ln a \times a^x$.

Comme $\mathrm{e}^X > 0$, $(a^x)'$ est du signe de $\ln a$ (vu ci-dessus). Les fonctions exponentielles de base a $(a > 0)$ sont donc :
- décroissantes quand $0 < a < 1$;
- constantes quand $a = 1$;
- croissantes quand $a > 1$.

Tableaux de variations

Les tableaux de variations page suivante résument les paragraphes qui précèdent.

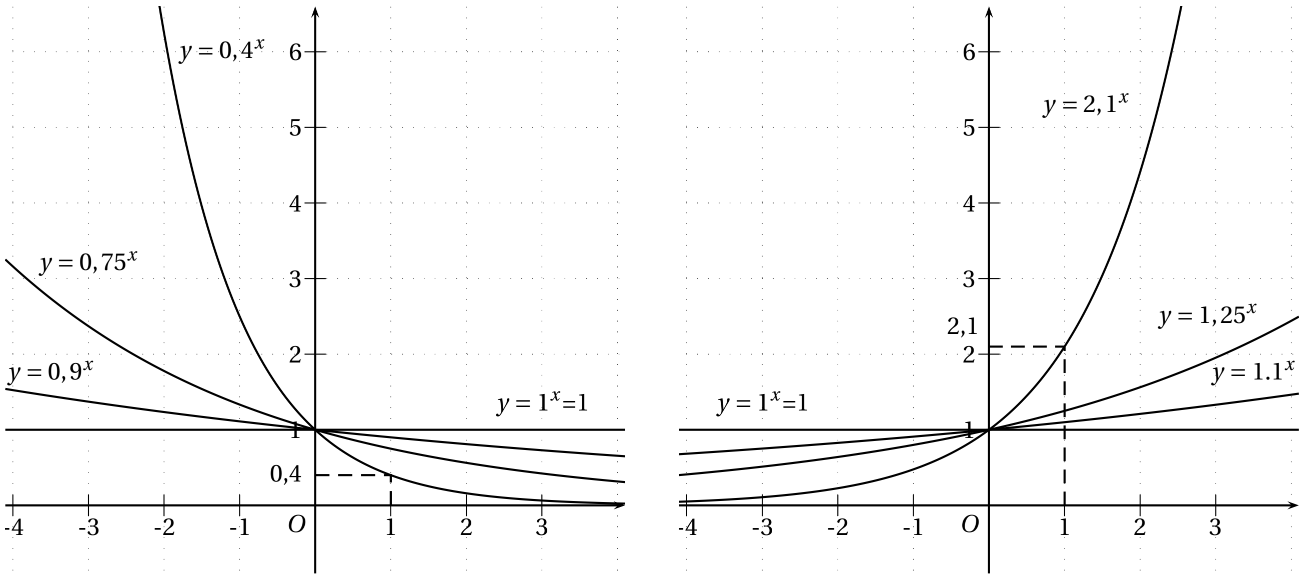
TAB. 8.1 – Tableaux de variations et courbes

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a \times a^x$	$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	0^+

$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a \times a^x$	$+$	
a^x	0^+ ↗	$+\infty$



Courbes représentatives

Trois types de courbes, donc, selon si $0 < a < 1$, si $a = 1$ ou si $a > 1$. Plusieurs exemples sont donnés sur la figure de la présente page.
On remarquera que, pour tout réel a ($a > 0$) :
- $a^0 = 1$ et donc toutes les courbes passent par le point $(0; 1)$;
- $a^1 = a$ et donc toutes les courbes passent par le point $(1; a)$.

Croissances comparées

Le théorème suivant (qu'on admettra) règle les deux cas d'indétermination :

Théorème 8.3. • *Si* $a > 1$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$.
- *Si* $0 < a < 1$ *alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{x} = -\infty$.

Lien avec les suites géométriques

On rappelle qu'une suite géométrique est une suite définie par récurrence par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = q \times u_n$ où q est la raison de la suite.

On a alors, pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$.

On a aussi : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1^{\text{er}}\text{terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

Propriété 8.4. *Soit* (v_n) *la suite géométrique de raison* $q > 0$ *et de premier terme* $v_0 > 0$.
- *Si* $0 < q < 1$, (v_n) *est décroissante ; on parle de décroissance exponentielle.*
- *Si* $q = 1$, (v_n) *est constante.*
- *Si* $q > 1$, (v_n) *est croissante ; on parle de croissance exponentielle.*

8.3 Exercices

Exercice 8.1.

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement : $f(x) = 3^x$ et $g(x) = 2^{x+3}$.

1. Déterminer les limites de ces deux fonctions en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer les variations de ces deux fonctions et dresser leur tableau de variations.
3. (a) Afficher les courbes représentatives de ces deux fonctions sur la calculatrice.
   (b) Conjecturer l'existence de points d'intersection.
   (c) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 8.2.

Une personne se demande en combien de temps son capital C_0 doublera en le laissant placé aux taux annuels de t %. Calculer le temps qu'il faut pour que le capital C_0 double dans chacun des cas suivants :

- $t = 1$
- $t = 2$
- $t = 3$
- $t = 5$
- $t = 6$

Exercice 8.3.

Un banquier propose à son client un placement au taux annuel de 3,5 % sur 10 ans. On note S la somme obtenue par ce client au bout de 10 ans, s'il souscrit ce placement.

1. Quel taux le client doit-il négocier avec son banquier pour obtenir au moins la même somme S en 7 ans et demi ?
2. Quelques mois plus tard, le placement proposé par le banquier est au taux de 2,5 %.
   Pendant combien de temps le client devra-t-il placer le même capital pour obtenir la même somme ?

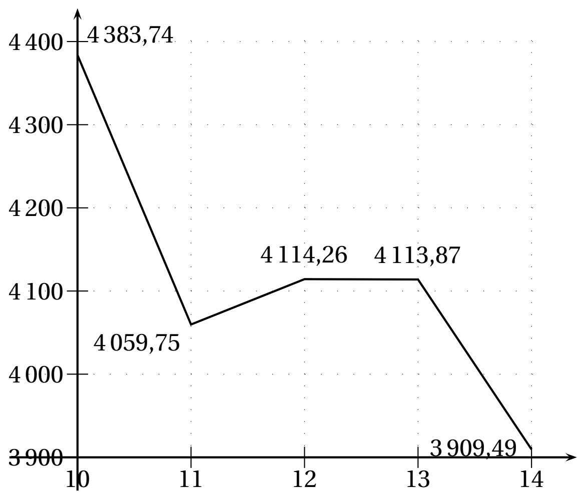
Exercice 8.4.

Le CAC 40 est un indice de valeurs françaises, concernant les 40 plus importantes valeurs cotées à la bourse de Paris (Michelin, France Télécom, Alcatel, etc.). Le Dow Jones est un équivalent à New York du CAC 40.

Voici un extrait du *Journal des Finances* du 15 au 21 septembre 2 001 :

Cotations : Violente rechute *par* Roland Laskine

Après le choc du 11 septembre qui a fait plonger, mardi, toutes les places boursières mondiales, les investisseurs se sont ressaisis, refusant de céder au marasme ambiant. Vendredi, la crainte d'une reprise des cotations en forte baisse à New York dès le début de la semaine prochaine a tétanisé les marchés. Ceux-ci sont de nouveau violemment repartis à la baisse en Europe. Les actions qui ont subi les plus fortes attaques ne sont pas les technologiques, mais des valeurs plus traditionnelles appartenant au secteur des assurances, des transports, du luxe et des loisirs. Dès lundi, tous les yuex seront braqués sur les trente valeurs de l'indice Dow Jones, qui constitue le désormais baromètre de la tendance sur tous les marchés mondiaux.



1. C_i représente l'indice CAC 40 le $(10+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 4)$. Que valent C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 ?
2. t_i est le pourcentage de variation du CAC 40 du $(10+i)$ septembre 2 001 au $(11+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Calculer t_0, t_1, t_2, t_3.
3. On appelle pourcentage journalier moyen de variation du cours du CAC 40, le pourcentage t_j % tel que, si le cours du CAC 40 avait varié chaque jour de ce taux constant t_j %, son cours serait encore C_4 le 14 septembre 2 001.
   (a) Vérifier que $C_0\left(1+\frac{t_j}{100}\right)^4 = C_4$.
   (b) Calculer l'arrondi au dixième de t_j. En donner une interprétation économique.

Exercice 8.5 (Amérique du nord – 2 005).

Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.
Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
   Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.

2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.
   (a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
   (b) Pour atteindre son objectif, quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

Exercice 8.6.
On prévoit qu'une automobile, achetée neuve, subit une décote de 20 % la première année d'utilisation, puis une nouvelle décote de 15 % la deuxième année, et enfin une décote de 10 % chacune des années suivantes.

1. Une automobile est achetée neuve 20 000 €. Quelle est sa valeur, à un euros près :
   (a) au bout d'un an ; (b) au bout de 2 ans ; (c) au bout de 4 ans.
2. Quel est le taux annuel moyen de décote si l'automobiliste garde sa voiture 4 ans ?
3. Une automobile achetée neuve au prix de P_0 (en euros). On appelle P_n la valeur de cette automobile, en euros, au bout de n années.
   (a) Exprimer P_n en fonction de P_0, lorsque $n \geqslant 3$.
   (b) Au bout de 4 ans, la valeur d'une automobile est 8 262 €. Quel était à l'euro près, son prix initial ?
   (c) Quel est le plus petit entier n tel que : $0,68 \times (0,9)^{n-2} \leqslant 0,5$?
   Donner une interprétation de ce résultat.
   (d) Une voiture a été achetée en l'an 2 000. À partir de quelle année, sa valeur sera-t-elle pour la première fois, inférieure ou égale à la moitié du prix neuf ?

Exercice 8.7.
Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage de logiciels piratés en France de 1 990 à 1 998. On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage de logiciels piratés.

année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998
rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
pourcentage y_i	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1. Représenter l'ensemble des points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal tel que :
   - 0,5 cm représente un an sur l'axe des abscisses ;
   - 0,5 cm représente 5 % sur l'axe des ordonnées.
2. Cette évolution est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 85,115(0,905)^x$, où x désigne le rang de l'année, et y le pourcentage de logiciels piratés.
   (a) Étudier le sens de variation de f.
   (b) Représenter $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f, dans le même repère que celui utilisé au 1.
   (c) Peut-on dire que le pourcentage de logiciels piratés en France de 1 990 à 1 998 a une décroissance exponentielle ? Pourquoi ?
   (d) Donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en France en 2 004. Vérifier graphiquement.

Exercice 8.8 (Remboursement d'emprunt).
Une somme C, empruntée au taux annuel t, est remboursée en n annuités A égales.
La formule qui relie C, t, n et A est :

$$C = A \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Monsieur X a emprunté la somme de 26 243 € au taux annuel de 7 %. Il peut effectuer ses remboursements :
- par annuités de 10 000 € ;
- par annuités de 8 000 €.

Déterminer, dans chacun des deux cas, quel serait :
1. la durée de remboursement du prêt ;
2. la somme totale versée par Monsieur X pour rembourser son emprunt.

Exercice 8.9 (Modèles démographiques et fonction exponentielle).
1. **Croissance exponentielle ou modèle de MALTHUS**
   On suppose qu'une population évolue selon la loi $P(t) = 10 \times 1,07^t$ où $P(t)$ est la population au temps t.
   (a) Calculer $P(0)$. Quel est le sens de varation de la fonction P sur $[0\,;+\infty[$?
   (b) Calculer la croissance instantanée relative $\dfrac{P'(t)}{P(t)}$ de cette population modélisée par P.

(c) h désigne un réel quelconque. Démontrer que le rapport $\dfrac{P(t+h)}{P(t)}$ est indépendant de t.
Calculer l'intervalle de temps h nécessaire pour que la population P double.

(d) Quelle est la limite de la fonction P en $+\infty$?

2. **Croissance « en S », dite sigmoïde, ou modèle de VERHULST**

On suppose qu'une population évolue selon la loi $N(t) = \dfrac{10\,000(1,07)^t}{999+(1,07)^t}$ où $N(t)$ est la population au temps t.

(a) Calculer $N(0)$ sans utiliser de calculatrice.

(b) i. Vérifier que, pour tout t, $\dfrac{1}{N(t)} = 0,0999(1,07)^{-t} + 0,0001$.

ii. Donner le sens de variation de la fonction $t \mapsto (1,07)^{-t}$, puis celui de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$ sur $[0\,;+\infty[$.

iii. En déduire le sens de variation de la fonction N sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Étudier la limite de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction N en $+\infty$.

(d) On note $C(t) = \dfrac{N'(t)}{N(t)}$ la croissance instantanée de cette population modélisée par N.
On admet que le calcul donne $C(t) = \ln 1,07 - \ln 1,07 \times 10^{-4} N(t)$.

i. Déduire le sens de varation de C sur $[0\,;+\infty[$ de celui de N.

ii. Calculer $C(0)$, $C(100)$, $C(200)$.

(e) Le nombre de parasites d'une plante évolue selon la loi $N(t) = \dfrac{10\,000(1,07)^t}{999+(1,07)^t}$ où t est le temps exprimé en jours.
On choisit un repère orthogonal d'unités 1 cm pour 10 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 000 parasites sur l'axe des ordonnées.

i. Tracer la courbe représentative de la fonction N sur $[0\,;200]$.

ii. Tracer dans le même repère la courbe représentant la fonction P du 1 qui donnerait le nombre de parasites pour une croissance relative instantanée constante, égale à $C(0)$.

iii. Utiliser le graphique pour répondre à la question suivante :
Jusqu'à quelle valeur approximative e t, la différence $P(t) - N(t)$ reste-t-elle inférieure à 500 ?

8.3.1 Élasticité

L'*élasticité-prix* est définie comme le rapport entre la variation relative de la demande d'un bien et la variation relative du prix de ce bien. Ce rapport est généralement négatif car lorsque le prix augmente, la demande diminue et réciproquement.
Ainsi :

	au départ	après variation	variation absolue	variation relative
prix	p	p_1	$\Delta p = p_1 - p$	$\dfrac{\Delta p}{p}$
quantité demandée	q	q_1	$\Delta q = q_1 - q$	$\dfrac{\Delta q}{q}$

et l'élasticité e de la demande par rapport au prix est donné donnée par $e = \dfrac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \dfrac{\Delta q}{\Delta p} \times \dfrac{p}{q}$.

Exemple : Si, sur un marché, la demande diminue de 24 % lorsque le prix augmente de 8 %, on dit que l'élasticité-prix de la demande est égale à : $\dfrac{\frac{-24}{100}}{\frac{8}{100}} = -3$.

Lorsque la demande q est une fonction dérivable du prix p ($q = f(p)$) et que les variations sont petites (de l'ordre de 1 % pour le prix) alors $\dfrac{\Delta q}{\Delta p} \approx f'(p)$ et on obtient l'élasticité instantanée : $e(p) = f'(p) \times \dfrac{p}{f(p)} = p \times \dfrac{f'(p)}{f(p)}$.

On montre facilement que lorsque le prix augmente de 1 %, l'élasticité mesure le pourcentage de variation de la demande. Ainsi, dans l'exemple précédent, quand le prix augmente de 1 %, la demande baisse de 3 %.

D'après Wikipédia On peut distinguer trois cas particuliers :

- Quand l'élasticité est nulle, la demande ne varie pas quand le prix varie. La demande reste inchangée quel que soit le prix. C'est notamment le cas des produits de première nécessité : bien que le prix augmente, la consommation se maintient car il existe peu de produits de substitution. Lorsque le prix baisse, la demande n'augmente pas nécessairement. L'effet peut être accentué s'il n'existe pas de produit de substitution (exemple : les pâtes remplacées par le riz ou la pomme-de-terre). Une élasticité nulle à court terme peut toutefois s'avérer non nulle à long terme, car l'augmentation des prix peut pousser à la recherche de nouveaux produits de substitution. Le pétrole, par exemple, est un bien non substituable à court terme mais, sur le long terme, l'augmentation de son prix peut favoriser l'exploitation de nouvelles sources d'énergie.
- Quand l'élasticité est infinie, un petit changement de prix entraîne un grand changement de demande. C'est par exemple le cas des produits de mode dont les ventes s'effondrent en période de crise et décuplent en période de croissance.
- Quand l'élasticité est positive, la demande augmente avec le prix. On peut alors distinguer deux types :
  - Un bien de Giffen (d'après ROBERT GIFFEN) est un type de bien de première nécessité (exemple : le pain) ; lorsque son prix augmente, la demande peut également augmenter pour ce bien et diminuer pour des biens de substitution plus coûteux (ex : la viande). Ce paradoxe s'applique généralement à des foyers à faibles revenus : le prix d'un bien A augmentant, ils ne peuvent y substituer le bien B relativement plus cher, même si son prix reste stable. Ils sont alors contraints de réduire leur consommation de bien B pour équilibrer leur budget et reporter cette consommation sur le bien A.
  - Un bien de Veblen (d'après THORSTEIN VEBLEN) est un type de bien de luxe (ex : le parfum) ; lorsqu'il n'est « pas assez cher » (c'est-à-dire que son prix ne reflète pas son positionnement haut de gamme) sa demande est faible (soit car la qualité perçue est inférieure, soit parce qu'il n'est plus un symbole de statut).

Exercice 8.10.

On note p le prix d'un produit en euros et $f(p)$ la demande liée a ce produit pour le prix p.
L'élasticité $E(p)$ de la demande par rapport au prix p est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % de p.

La demande $f(p)$ d'un produit proposé à un prix p (en €) est donné par :

$$f(p) = \frac{10^5 \times p}{p^2 - 100} \text{ avec } p \in [11\,;+infini[$$

Partie A : Étude de la demande

1. Calculer la demande pour $p = 11$, $p = 15$ et $p = 90$.
2. (a) Vérifier que $f(p) > 0$ pour tout $p \geqslant 11$.
   (b) Montrer que f est décroissante sur $[11\,;+\infty[$
3. On suppose que le prix p, initialement égal a 15 €, subit une augmentation de 1 %.
   (a) Calculer le nouveaux pris p_1, ainsi que la demande correspondant à ce prix, arrondie a l'unité près.
   (b) En déduire $E(15)$, l'élasticité de la demande par rapport au prix de 15 €.

Partie B : Étude de l'élasticité de la demande.

En économie, on considère qu'une bonne approximation de $E(p)$ est donné par $p \times \dfrac{f'(p)}{f(p)}$ et on écrit même $E(p) = p \times \dfrac{f'(p)}{f(p)}$.

1. (a) Quel est le signe de $E(p)$ pour $p \geqslant 11$?
   (b) Établir que $E(p) = 1 - \dfrac{2p^2}{p^2 - 100}$
2. (a) Étudier la limite suivante de $E(p)$ en $+\infty$.
   (b) Calculer $E'(p)$, ou E' est la fonction dérivée de E, et en déduire le tableau de variation de E.
   (c) Calculer la valeur p_0 pour laquelle l'élasticité est de $-1,25$.
   (d) Comment évolue la demande quand le prix passe de 30 € à 30,30 € ?

Exercice 8.11.

Après une étude de marché, on a modélisé l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit en fonctin de son prix unitaire x, pour $x \in [1\,;8]$: $f(x) = 10\mathrm{e}^{0,65x}$ et $g(x) = 600\mathrm{e}^{-0,35x}$, le prix unitaire étant exprimé en euros, et $f(x)$ et $g(x)$ donnant le nombre d'objets offerts ou demandés en milliers.

1. Déterminer le prix d'équilibre du produit.
2. (a) Étudier le sens de variation de f, puis de g sur $[1\,;8]$.

(b) Tracer les représentations graphiques de f et de g dans un même repère orthogonal.

(c) Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 1.

3. (a) Déterminer l'élasticité-prix instantané de l'offre en fonction du prix x.
Calculer cette élasticité pour un prix unitaire de 4 €.
En donner une interprétation en terme de variation.

   (b) Même question pour l'élasticité-prix de la demande.

‘

Exercice 8.12.

Partie A : Question préliminaire

Vérifier que le nombre $\alpha = -1 + \ln 125$ est solution de l'équation $(\mathscr{E})$:

$$(\mathscr{E}) : \mathrm{e}^{x+1} - 10^4 \mathrm{e}^{-(x+1)} - 45 = 0.$$

En donner la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.
On admettra que α est la seule solution de $(\mathscr{E})$.

Partie B : Offre et demande

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit unitaire x sont telles que :

$$f(x) = 100\left(\mathrm{e}^{x+1} - 45\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 10^4 \mathrm{e}^{-(x+1)}$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ et $g(x)$ sont positives ou nulles.
On désignera par I l'intervalle trouvé ; cet intervalle est dit « intervalle de validité du modèle ».
2. Déterminer la valeur x telle que $f(x) = g(x)$, appelée « prix d'équilibre ».
3. Étudier les variations de f et de g sur l'intervalle I (on précisera les limites en $+\infty$).
4. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Les unités graphiques sont 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 000 unités sr l'axe des ordonnées.
   (a) Tracer les courbes représentatives de f et de g dans $\mathscr{P}$.
   (b) Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 2.
5. On considère la fonction E_f définie sur I par :

$$E_f(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ où } f' \text{ désigne la fonction dérivée de } f.$$

   Le nombre $E_f(x)$ s'appelle « élasticité de l'offre par rapport au prix x » ; on admet qu'il indique le pourcentage de variation de l'offre pour un accroissement de 1 % d'un prix x donné. $E_f(x)$ est négatif lors d'une diminution de l'offre.
   (a) Calculer $E_f(x)$.
   (b) On considère le prix $x = 3,8$. Pour un accroissement de 1 % de ce prix, quel est le pourcentage de variation de l'offre ?

Devoir maison

Exponentielle de base a – Loi binomiale

EXERCICE 1

On prévoit qu'une automobile, achetée neuve, subit une décote de 20 % la **première** année d'utilisation, puis une nouvelle décote de 15 % la **deuxième** année, et enfin une décote de 10 % **chacune** des années suivantes.

1. Une automobile est achetée neuve 20 000 €. Quelle est sa valeur, à un euros près :
   (a) au bout d'un an ; (b) au bout de 2 ans ; (c) au bout de 4 ans.
2. Quel est le taux annuel moyen de décote si l'automobiliste garde sa voiture 4 ans ?
3. Une automobile achetée neuve au prix de P_0 (en euros). On appelle $P(x)$ la valeur de cette automobile, en euros, au bout de x années.
   (a) Montrer que $P(x) = P_0 \times 0,68 \times 0,9^{x-2}$, lorsque $x \geqslant 3$.
   (b) Au bout de 5 ans et demi, la valeur d'une automobile est d'environ 4 571,13 €. Quel était son prix initial (arrondi à l'euro) ?
   (c) Résoudre l'équation $0,68 \times (0,9)^{x-2} \leqslant 0,5$?
   Donner une interprétation de ce résultat.
   (d) Une voiture a été achetée en l'an 2 000. À partir de quelle année, sa valeur sera-t-elle pour la première fois, inférieure ou égale à la moitié du prix neuf ?

EXERCICE 2 *Amérique du sud – Novembre 2 005*

Lors d'un examen, Julien doit répondre à un Q.C.M.
À chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chaque question, soit il connaît la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connaît pas et, dans ce cas, bien qu'il ait la possibilité de ne pas répondre, il préfère tenter sa chance et répond au hasard il a alors une chance sur trois que sa réponse soit exacte.

On suppose, de plus, que la probabilité que Julien connaisse la réponse à une question donnée est égale à $\frac{1}{2}$.
On note :

- C l'évènement « Julien connaît la réponse » ;
- E l'évènement « la réponse est exacte ».

Rappel de notation : pour un évènement A donné, $p(\mathrm{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A et $\overline{\mathrm{A}}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. (a) Julien répond à une question du Q.C.M.
   Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   (b) Démontrer que : $p(\mathrm{E}) = \frac{2}{3}$.
   (c) Calculer la probabilité que Julien connaisse la réponse à la question sachant que sa réponse est exacte.
2. Le Q.C.M. est composé de trois questions indépendantes. Il est noté sur 3 points. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0. Soit X la note obtenue par Julien à ce Q.C.M.«
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra s'aider d'un arbre. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
   (b) Quelle est la probabilité que Julien ait au moins 1,5 point à ce Q.C.M. ?
   (c) En supposant que tous les élèves se comportent comme Julien, quelle moyenne, arrondie au centième, peut-on attendre à ce Q.C.M. ?

Chapitre 9

Adéquation à une loi équirépartie

Sommaire

9.1 Le contexte

D'après bac à maths.

Imaginons que l'on dispose d'une pièce de monnaie dont on souhaite savoir si elle est bien équilibrée ou non.

On la lance 50 fois (on peut difficilement envisager de la lancer un très grand nombre de fois à la main) et on obtient 30 fois PILE et 20 fois FACE. Peut-on raisonnablement estimer que la pièce est bien équilibrée ou non ?

En fait, on ne peut être sûr de rien mais on peut, d'un point de vue statistique, avoir une idée plus ou moins valide de la réponse grâce aux simulations.

En effet, on peut simuler (avec l'ordinateur par exemple) 10 000 fois l'expérience consistant à lancer 50 fois une pièce de monnaie bien équilibrée, et examiner si obtenir 30 fois PILE et 20 fois FACE est exceptionnel ou non, et dans quelle mesure.

On pourra ainsi décider si notre piece est, elle aussi, bien équilibrée (au risque de commettre une erreur).

Nous sommes donc confrontés à plusieurs questions :

quels sont les criteres de decisions ?
quelle est le risque d'erreur ?

Voilà pour le principe.

Voyons maintenant, plus en détails, les calculs et la méthode. Notons $\mathscr{E}$ l'expérience qui consiste à lancer 50 fois une pièce de monnaie.

On simule, sur ordinateur, 10 000 fois l'expérience $\mathscr{E}$ pour une pièce bien équilibrée (hypothèse d'équirépartition : chaque face à une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'apparition) et on obtient les résultats suivants :

Nombre de « PILE » obtenus	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
effectifs	1	1	6	16	36	76	154	274	441	581	755	942	1 057	1 171

Nombre de « PILE » obtenus	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
effectifs	1 055	1 052	802	581	413	288	149	71	47	19	8	3	1	

Par exemple, sur les 10 000 expériences, 76 ont donné 17 PILE (et donc 33 FACE).

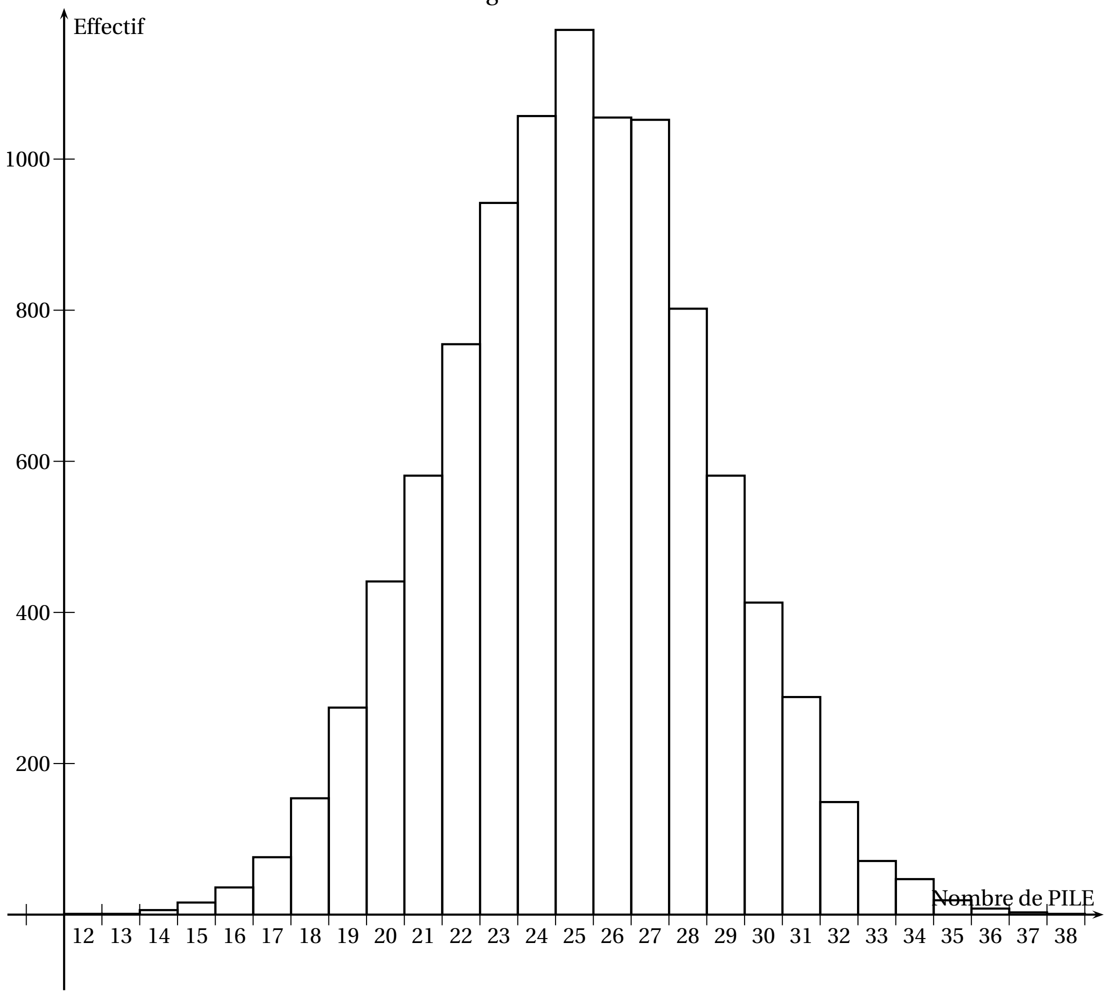
On constate que 413 ont donné 30 PILE (et donc 20 FACE) ce qui répresente tout de même 4,13 % de l'effectif total.

Illustrons cette distribution avec le diagramme 9.1 page suivante

On constate, sur cette simulation, qu'à peine plus de un dixième de l'effectif donne exactement 25 PILE et 25 FACE et que de nombreuses expériences montrent que sur 50 lancers, le nombre de PILE ou FACE n'est pas forcément voisin, bien que les calculs aient été faits pour une pièce bien équilibrée (phénomène de fluctuation de l'échantillonnage).

Pour mesurer la distance de l'événement « Obtenir 30 PILE et 20 FACE » à la théorie dans le cas d'une pièce équilibrée, nous passons par les fréquences : nous avons obtenu une fréquence de PILE de $\frac{3}{5}$ au lieu de $\frac{1}{2}$, et une fréquence de FACE de $\frac{2}{5}$ au lieu de $\frac{1}{2}$.

FIG. 9.1 – Diagramme de la distribution



Nous disposons de deux moyens[1] de mesurer la distance entre deux nombres x et y :

- soit $|x - y|$;
- soit $(x - y)^2$.

Pour des raisons pratiques et de cohérence avec la variance, c'est la seconde distance qui a été choisie par les statisticiens. On la note d^2_{obs} (le carré pour rappeler qu'il s'agit de la distance de l'événement observé à la simulation donnée par le carré de la différence).

On a ainsi :

$$d^2_{\text{obs}} = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,02$$

Ce nombre étant souvent très petit, pour des raisons de lisibilité (il est plus facile de comparer, par exemple, 210 et 196 que 0,0210 et 0,0196) on le multiplie parfois par un coefficient arbitraire.

Ici nous utiliserons $5\,000 d^2_{\text{obs}}$. Pour l'événement « Obtenir 30 PILE et 20 FACE », $5\,000 d^2_{\text{obs}} = 100$

L'idée est de calculer la quantité $5\,000 d^2$ pour chaque résultat de la simulation. Cela donne :

Nombre de « PILE » obtenus	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$5\,000 d^2$	676	576	484	400	324	256	196	144	100	64	36	16	4	0
effectifs	1	1	6	16	36	76	154	274	441	581	755	942	1 057	1 171
Nombre de « PILE » obtenus	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
$5\,000 d^2$	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484	576	676	
effectifs	1 055	1 052	802	581	413	288	149	71	47	19	8	3	1	

Évidemment, plus une épreuve de la simulation est proche des fréquences théoriques, plus sa valeur de $5\,000 d^2$ est proche de 0 et inversement.

Réorganisons les données en faisant un tableau des valeurs $5\,000 d^2$ suivants les effectifs cumulés croissants :

[1] Voir l'introduction des mesures de dispersion en Première.

Valeurs de $5000d^2$	0	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484	576
effectifs cumulés croissants	1 171	3 283	5 277	6 834	7 996	8 850	9 412	9 715	9 862	9 945	9 980	9 994	9 998

Maintenant, nous allons décider, suivant une marge d'erreur fixée à l'avance, si nous considérons que notre pièce peut être envisagée comme bien équilibree ou non. Pour cela, tout dépend de la position de notre $5000d^2_{\text{obs}}$ dans le tableau ci-dessus. La règle de décision usuelle est la suivante :

- si on se donne une marge d'erreur de 10 %, on raisonne par rapport aux déciles :
  - · si $5000d^2_{\text{obs}} \leqslant D_9$ (neuvième décile), alors on considere que le modèle observe suit la loi d'équirépartition
  - · $5000d^2_{\text{obs}} > D_9$, alors on considère que le modèle observé ne suit pas la loi d'équirépartition
- si on se donne une autre marge d'erreur, par exemple 1 %, on raisonne de même en comparant $5000d^2_{\text{obs}}$ au 99e centile.

Dans notre situation, calculons le neuvième décile D_9 qui est défini comme un réel tel qu'au moins 90 % de l'effectif total ait une valeur inférieure ou égale à D_9. Parmi les valeurs de $5000d^2$, on prend celles qui sont inférieures ou égales à 9 000. D'après le tableau, D_9 est compris entre 100 et 144.

Ici $5000d^2_{\text{obs}} \leqslant D_9$ Donc, nous pouvons affirmer avec une marge d'erreur de 10 % que notre pièce est bien équilibrée.

Par contre, si nous avions eu une autre pièce donnant 32 PILE et 18 FACE, nous aurions eu dans ce cas :

$$5000d^2_{\text{obs}} = \left(\frac{32}{50} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{50} - \frac{1}{2}\right)^2 = 196$$

Cette valeur de $5000d^2_{\text{obs}}$ est trop marginale : $5000d^2_{\text{obs}} > D_9$.

Une telle pièce serait considérée comme non équilibrée avec une marge d'erreur de 10 %.

Remarques.

- Les résultats peuvent différer si on recommence une autre simulation car l'étendue peut être différente, les valeurs des déciles (ou centiles ou autres) également.
- Il peut arriver qu'on rejette le modèle observé s'il est inférieur au premier décile. Dans ce cas, les fréquences observées sont très proches des fréquences théoriques (puisque d^2 est petit). La probabilité que le modèle observé soit équiréparti est donc très forte. Ceci dit, certains statisticiens le considère comme « douteux » (trop beau pour être vrai), c'est ce qui s'est passé pour certains résultats du biologiste Mendel qui avait des résultats statistiques tellement conformes aux fréquences théoriques que certains le soupçonnent aujourd'hui d'avoir embelli ses mesures !

9.2 Bilan

Soit $\mathscr{E}$ l'expérience qui consiste à répéter n fois une épreuve comportant k issues.

On cherche à savoir, si d'après les résultats observés, on peut décider si l'épreuve suit le modèle d'équirépartition.

On note :

$$d^2_{\text{obs}} = \sum_{i=1}^{k} \left(f_{\text{obs}} - \frac{1}{k}\right)^2$$

On suppose que l'on dispose de données simuleées (un grand nombre de fois) sur un modèle théoriquement équireparti et on étudie la série statistique des grandeurs d^2 obtenues.

Pour une marge d'erreur de 10 %, on raisonne avec le neuvième decile D_9 de la série des d^2 : si $d^2_{\text{obs}} \leqslant D_9$, on considere que l'expérience observée est équirépartie avec une marge d'erreur de 10 % ; dans le cas contraire, on considère que l'expérience observée n'est pas équirépartie.

9.3 Exercices

Exercice 9.1.

Une clinique fait des statistiques sur les naissances (naturelles et non provoquées) selon le jour de la semaine.

Sur 1 000 naissances naturelles relevées, on obtient les résultats suivants :

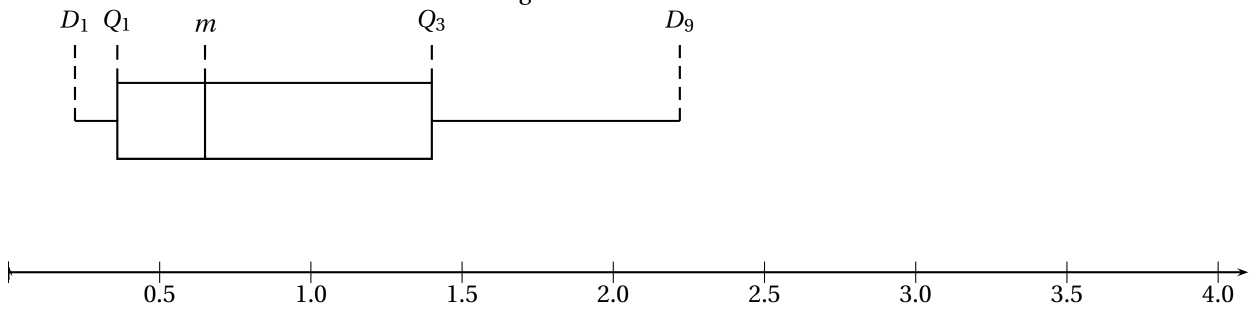
Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Nombre de naissances	146	163	158	156	156	116	105

On s'intéresse à la validité de l'hypothèse « le nombre de naissance est indépendant du jour de la semaine ». Pour tout entier i compris entre 1 et 7, on note f_i la fréquence des naissances le $i^{\text{ème}}$ jour de la semaine.

1. Calculer $d^2_{\text{obs}} = \sum_{i=1}^{7} \left(f_i - \frac{1}{7}\right)$ puis donner la valeur de $1000d^2_{\text{obs}}$ arrondie à 10^{-2}.

2. On simule sur un ordinateur 50 000 séries de 1 000 naissances équiréparties sur les sept jours de la semaine. Pour chacune de ces 5 000 séries, l'ordinateur a calculé la valeur de $1\,000d^2$ (où d est la distance entre les fréquences de la série et les fréquences théoriques). Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte de la figure 9.2 de la présente page. Avec un risque d'erreur de 10 %, peut-on considérer que le nombre de naissances observées dans la clinique est indépendant du jour de la semaine ?

FIG. 9.2 – Diagramme en boite de l'exercice 9.1



Exercice 9.2.
D'après une étude de l'INSERM, les infarctus ne se produisent pas également chaque jour de la semaine.
Les fréquences calculées sur 17 000 hommes âgés de 25 à 54 ans décédés entre 1 991 et 2 001 sont les suivantes :

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Fréquence	14,8 %	13,3 %	13,4 %	13,6 %	13,8 %	15 %	16,1 %

Reprendre la simulation de l'exercice 9.1 pour confirmer ou infirmer l'étude de l'INSERM.

Exercice 9.3.
On dispose d'un dé tétraèdrique et on voudrait savoir s'il est bien équilibré. Pour cela on lance 200 fois le dé et on obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

1. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.
2. On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.
3. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraèdrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Mimimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

   Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?
4. Mêmes questions avec un autre dé ayant donné les résultats suivants :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	30	52	46	32

Exercice 9.4.
Un professeur a demandé à ses élèves de jeter 200 fois un dé et de noter leurs résultats.
Voici les relevés de Mathieu :

Face k	1	2	3	4	5	6
Nombre de sorties de la face k	37	34	33	33	29	34

Les résultats lui semblent très probants et Mathieu s'attend à des félicitations.

1. Calculer la valeur de $6\,000d^2_{\text{obs}}$ dans l'hypothèse d'un dé bien équilibré.
2. Une simulation à l'ordinateur a donné les résultats suivants :

i	5	10	20	30	40	50	100	150
Nombre de simulations où $6\,000d^2 < i$	36	155	451	698	847	920	995	1000

   Pourquoi le professeur peut-il légitimement penser que Mathieu n'a pas lancé 200 fois le dé ?

Exercice 9.5 (Adéquation à une loi binomiale).

Une étude sur 1 000 familles de trois enfants a donné les résultats suivants :

Nombre de garçons i	0	1	2	3	Total
effectif e_i	110	384	382	124	1 000
fréquence f_i					1

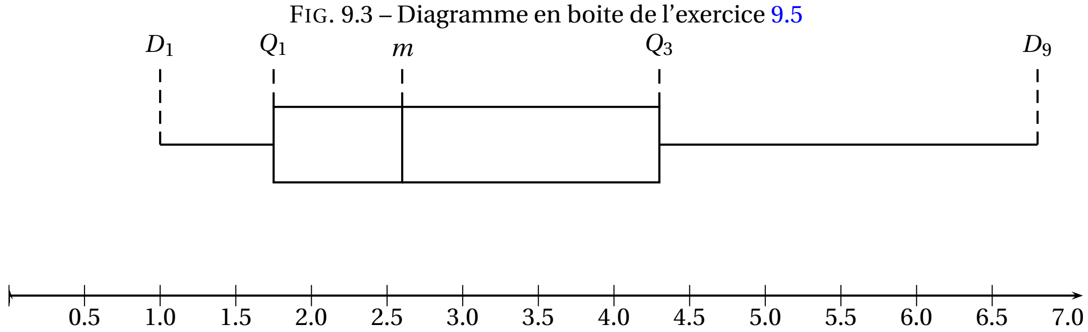
On se propose d'étudier la compatibilité de ses résultats avec l'hypothèse que la naissance d'une fille ou d'un garçon sont deux événements équiprobables.

1. Si cette hypothèse est correcte, la loi théorique du nombre de garçons dans une famille de trois enfants est une loi binomiale de paramètres 3 et 0,5.
   Compléter alors le tableau suivant :

Nombre de garçons i	0	1	2	3
probabilité p_i				

2. Pour une loi binomiale (et pour toute autre loi) on mesure la distance entre les fréquences observées et les probabilités théoriques par la formule :
$$\chi^2_{\text{obs}} = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}$$
   Ici $n = 1000$; calculer la valeur de χ^2_{obs} (on pourra s'aider d'un tableur).
3. Une simulation sur 100 essais a donné les résultats résumés dans le diagramme de la figure 9.3 de la présente page.
   Indiquer une valeur approximative du neuvième décile de cette distribution.

FIG. 9.3 – Diagramme en boite de l'exercice 9.5



4. La distribution observée est-elle en adéquation avec la loi $\mathscr{B}(3; 0,5)$?
   L'hypothèse d'équiprobabilité pour la naissance d'une fille ou d'un garçon est-elle acceptable ?