

Devoir surveillé n°9

Exponentielle – Suites arithmétiques et géométriques

Le barème n'est qu'indicatif. Le devoir est noté sur 15. Une anti-sèche légale est autorisée¹. La calculatrice est autorisée mais pas le prêt de calculatrice entre élèves.

EXERCICE 9.1 (5 points).

Les questions sont indépendantes. On attend une justification pour chaque réponse.

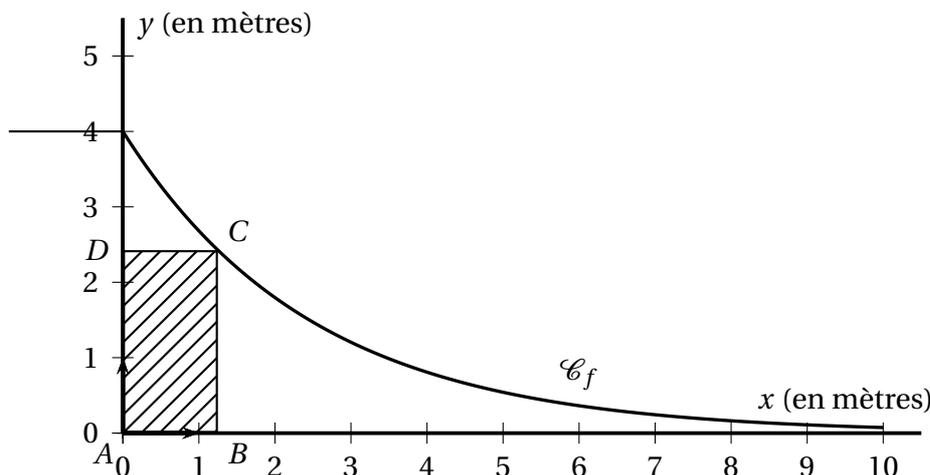
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2e^{x-1}}{(e^x)^2}$. Donner $f(x)$ sous la forme ke^{ax+b} où k, a et b sont des réels à déterminer.
- $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x(e^{-x} + e^{x-3})$. Donner la valeur exacte de $g(2)$ sous la forme la plus simple possible.
- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $(x-2)e^{x-1} = 0$.
- Résoudre sur \mathbb{R} l'inéquation $e^x - 1 \geq 0$.
- Calculer la fonction dérivée de la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

EXERCICE 9.2 (5 points).

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = 4e^{-0,4x}.$$

Cette courbe \mathcal{C}_f est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle $ABCD$ représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe \mathcal{C}_f .

- On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$.
Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3,6 \text{ m}^2$.

1. Feuille A5, manuscrite, recto.

-
2. (a) Montrer que l'aire du panneau, en m^2 , est donnée par la fonction $\mathcal{A}(x) = 4xe^{-0,4x}$ où $x \in [0; 10]$, en m, est l'abscisse de B .
- (b) Montrer que la dérivée, \mathcal{A}' de la fonction \mathcal{A} est $\mathcal{A}'(x) = (4 - 1,6x)e^{-0,4x}$ pour $x \in [0; 10]$.
En déduire les variations de \mathcal{A} .
- (c) Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible ?
On donnera les dimensions d'un tel panneau au centimètre près.
-

EXERCICE 9.3 (5 points).

Un bail est un contrat de location. Il est en général valable 3 ans.

On propose à Arthur, pour la location d'un appartement, deux contrats de location :

Contrat A : Le premier loyer est de 300 € et il augmente de 2 € chaque mois.

Contrat B : Le premier loyer est de 300 € et il augmente de 0,65 % chaque mois.

On définit les suites (A_n) et (B_n) comme étant les suites des loyers mensuels respectifs des contrats A et B pour le n^{e} mois pour n variant de 1 à 36. On a ainsi $A_1 = B_1 = 300$ €.

1. (a) Justifier que (A_n) est une suite arithmétique.
(b) Calculer A_{36} .
(c) Calculer $A_1 + A_2 + \dots + A_{36}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = 1,0065 \times B_n$.
(b) En déduire la nature de la suite (B_n)
(c) Calculer B_{36} . On arrondira au centime.
(d) Calculer $B_1 + B_2 + \dots + B_{36}$. On arrondira au centime.
3. Quel contrat est le plus avantageux pour Arthur?
-