

Devoir surveillé n°4

Fonctions – Suites – Polynômes de degré 2

Ce devoir, noté sur 20, est un devoir de rattrapage pour les élèves ayant été absent·e·s à au moins un des devoirs du premier semestre. Il porte sur tout le programme du premier semestre. La calculatrice est autorisée mais l'échange des calculatrices entre les élèves pendant le contrôle est interdit. L'anti-sèche légale n'est pas autorisée. Sauf indication contraire, toutes les réponses devront être justifiées.

EXERCICE 4.1 (13 points).

Une petite entreprise produit chaque mois entre 0 et 15 kilogrammes de crevettes décortiquées. Pour x kg produits, on note $C(x)$ le coût de production, $R(x)$ la recette de la vente et $B(x)$ le bénéfice réalisé, tous les trois en euros.

La courbe de la figure 4.1 page suivante propose les courbes représentatives du coût (C) et de la recette (R).

Partie A : Lectures graphiques.

À l'aide des ces courbes et avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Quels sont les coûts fixes? *On n'attend pas de justification.*
2. L'entreprise réalise-t-elle un bénéfice lorsque qu'elle produit et vend 1 kg de crevettes? *Justifier brièvement.*
3. Pour quelle(s) production(s) le coût de production est-il égal à la recette? *On n'attend pas de justification.*
4. Pour quelle(s) production(s) le bénéfice réalisé est-il positif? *Justifier brièvement.*

Partie B : Calculs

Pour x exprimé en kg et compris entre 0 et 15, le coût de la vente et la recette sont

modélisé·e·s par les fonctions C et R , exprimées en euro, et telles que :

$$C(x) = 5x^2 + 40x + 100 \text{ et } R(x) = 100x.$$

1. Montrer que le bénéfice de la vente, exprimé en euros, B est tel que : $B(x) = -5x^2 + 60x - 100$ pour $0 \leq x \leq 15$.
2. Montrer qu'on a aussi $B(x) = -5(x - 2)(x - 10)$.
3. En déduire les racines de $B(x)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer le signe de $B(x)$ selon les valeurs de x , pour $0 \leq x \leq 15$, et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le tableau des variations de B et en déduire le bénéfice maximum de l'entreprise et la production pour laquelle il est atteint.

EXERCICE 4.2 (7 points).

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = -2n + 3 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 100 \\ v_{n+1} = 0,95v_n + 20 \end{cases}$$

1. Déterminer les 3 premiers termes de chacune des deux suites.
 - (a) Quel semble être le sens de variation de (u_n) ?
 - (b) Montrer que $u_{n+1} = -2n + 1$.
 - (c) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
 - (d) Conclure.
2. Étude de (u_n)
 - (a) Quel semble être le sens de variation

FIGURE 4.1: Figure de l'exercice 4.1

