# Chapitre 7

# Variables aléatoires

## Sommaire



## 7.1 Activités d'introduction

Les activités d'introduction seront piochées dans le manuel.

## 7.2 Variable aléatoire

**Définition 7.1** (Variable aléatoire)**.** Soit $\Omega$ l'univers d'une expérience aléatoire sur lequel on a défini une loi de probabilité. On définit une variable aléatoire sur $\Omega$ lorsqu'on associe un nombre réel à chaque issue de $\Omega$.

**Exemple.** On tourne une roue dans une fête foraine qui est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge ($R$), 3 de couleur verte ($V$) et 4 de couleur bleue ($B$). On note la couleur sur laquelle s'arrête la roue.
L'univers des possibles est $\Omega = \{R, V, B\}$ et la loi de probabilité est $p(R) = \frac{1}{8}$, $p(V) = \frac{3}{8}$ et $p(B) = \frac{4}{8}$.
Si on associe à chaque couleur un gain $X$, par exemple : on gagne 3 € si le rouge sort, 1 € si le vert sort et enfin on perd 2 € si le bleu sort, alors on crée une variable aléatoire $X$ qui peut prendre comme valeur 3, 1 et $-2$. On pourra noter $X(\Omega)$ l'univers des possibles pour $X$. Ici $X(\Omega) = \{3 ; 1 ; -2\}$.

**Définition 7.2** (Loi de probabilité)**.** Si $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ désignent les valeurs possibles pour $X$, on note $X = x_i$ les issues pour lesquelles $X$ prend la valeur $x_i$. On note $p(X = x_i)$ la probabilité de cet évènement, l'ensemble de ces probabilités étant la loi de probabilité de la variable aléatoire.

**Exemple.** Dans l'exemple précédent, la loi de probabilité est : $p(X = 3) = \frac{1}{8}$, $p(X = 1) = \frac{3}{8}$ et $p(X = -2) = \frac{4}{8}$. On pourra la présenter sous forme de tableau :

| $k$ | 3 | 1 | $-2$ |
|---|---|---|---|
| $p(X=k)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{8}$ |

**Définition 7.3** (Espérance)**.** L'espérance de la variable aléatoire $X$ est le nombre, noté $E(X)$ :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \ldots + x_n \times p(X = x_n)$$

**Exemple.** Dans l'exemple précédent, l'espérance de $X$ est :

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + (-2) \times \frac{4}{8} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{-2}{8} = -0,25$$

Ainsi, pour chaque partie, on peut espérer un gain de $-0,25$ €, c'est-à-dire que sur un grand nombre de parties, on perdra en moyenne $-0,25$ € par partie.

## 7.3 Loi de BERNOULLI

**Définition 7.4** (Épreuve de BERNOULLI)**.** On appelle *épreuve de* BERNOULLI de paramètre $p$ toute expérience aléatoire ayant exactement deux issues possibles, qu'on appelle généralement, pour l'une, *succès*, notée $S$, et, pour l'autre, *échec*, notée $\overline{S}$, et telle que $p(S) = p$.

**Définition 7.5** (Schéma de BERNOULLI)**.** On appelle *schéma de* BERNOULLI de paramètres $n$ et $p$ la répétition à $n$ reprises, de façon indépendante, d'une même épreuve de BERNOULLI de paramètre $p$.

Par la suite, on s'intéressera à la variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès sur un schéma de BERNOULLI, ce nombre de succès pouvant être compris entre 0 et $n$.

**Exemple.** On lance un dé à 6 faces parfaitement équilibré et on considère qu'on a un succès lorsque le 6 sort.
On lance 3 fois de suite ce dé.

1. Justifier que le lancer de ce dé est une épreuve de BERNOULLI.
2. Construire l'arbre de probabilité correspondant au schéma de BERNOULLI.
3. On note $X$ le nombre de succès obtenu. Décrire la loi de $X$ et calculer son espérance $E(X)$.

## 7.4 Exercices

Les exercices seront choisis dans le manuel.