Chapitre 6

Polynômes de degré trois

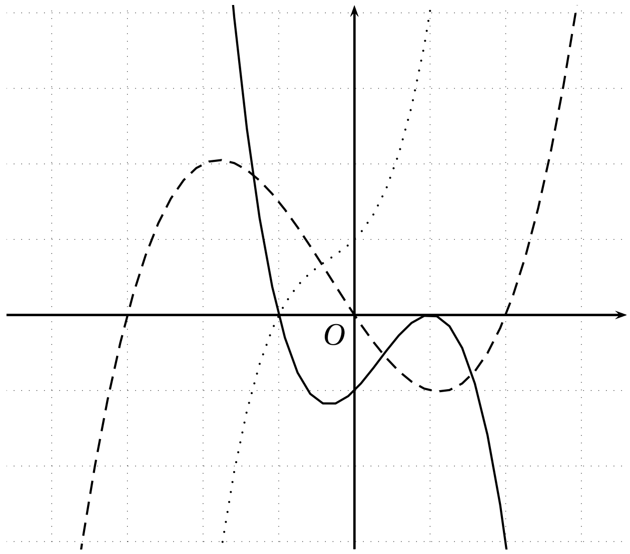
Sommaire

6.1 Cas général

Définition 6.1. On appelle polynôme de degré trois toute expression pouvant s'écrire sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$.

Propriété 6.1. *La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré trois coupe l'axe des abscisses au moins une fois et au plus trois fois.*

On l'admettra.



Exemples.

- $2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$ est un polynôme de degré trois avec $a = 2$, $b = 5$, $c = -3$ et $d = 4$
- $-x^3 + 2x + 7$ est un polynôme de degré trois avec $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$ et $d = 7$
- $-3x^3 + 4$ est un polynôme de degré trois avec $a = -3$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 4$
- x^3 est un polynôme de degré trois avec $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 0$

6.2 Quelques cas particuliers

6.2.1 $f : x \longmapsto ax^3$ ($a \neq 0$, $b = c = d = 0$)

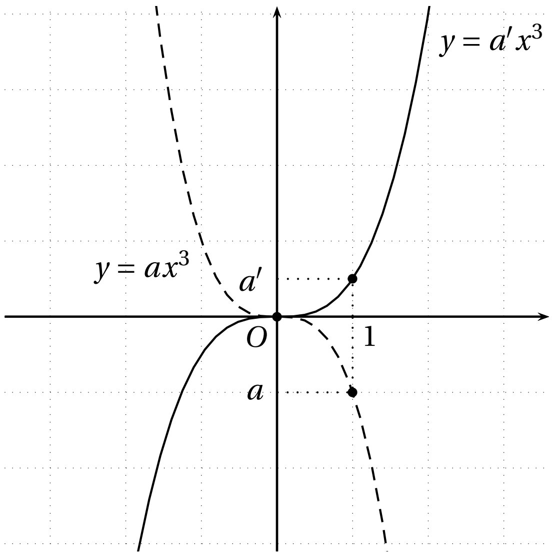
Définition 6.2. La fonction $f : x \longmapsto ax^3$ où $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré trois.

Propriété 6.2. *La fonction $f : x \longmapsto ax^3$ où $a \neq 0$ est :*

- *croissante si $a > 0$;*
- *décroissante si $a < 0$.*

Propriété 6.3. *La courbe de la fonction $f : x \longmapsto ax^3$ où $a \neq 0$ passe par les points $(0 ; 0)$ et $(1 ; a)$.*

En effet, pour tout $a \neq 0$, $f(0) = a \times 0^3 = a \times 0 = 0$ donc la courbe de f passe par le point $(0; 0)$ et $f(1) = a \times 1^3 = a \times 1 = a$ donc la courbe de f passe par le point $(1 ; a)$



6.2.2 $f : x \longmapsto ax^3 + d$ ($a \neq 0$, $b = c = 0$)

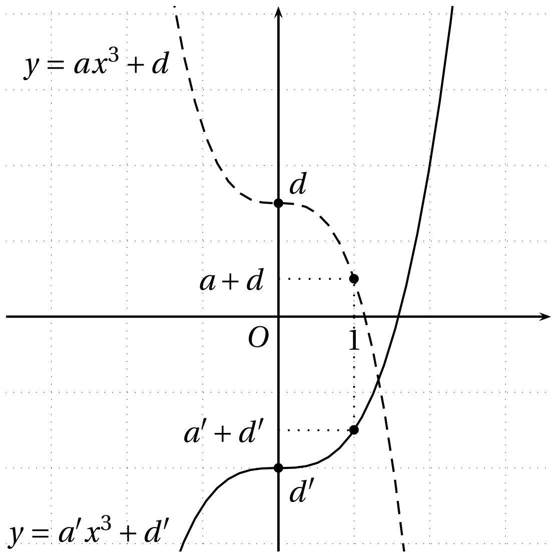
Définition 6.3. La fonction $f : x \longmapsto ax^3 + d$ où $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré trois.

Propriété 6.4. *La fonction $f : x \longmapsto ax^3 + d$ où $a \neq 0$ est :*

- *croissante si $a > 0$;*
- *décroissante si $a < 0$.*

Propriété 6.5. *La courbe de la fonction $f : x \longmapsto ax^3 + d$ où $a \neq 0$ passe par les points $(0; d)$ et $(1 ; a + d)$.*

En effet, pour tout $a \neq 0$, $f(0) = a \times 0^3 + d = a \times 0 + d = d$ donc la courbe de f passe par le point $(0; d)$ et $f(1) = a \times 1^3 + d = a \times 1 + d = a + d$ donc la courbe de f passe par le point $(1 ; a + d)$



6.2.3 $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Définition 6.4. La fonction $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ où $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré trois.

Il suffit de développer l'expression $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ pour obtenir sa forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Propriété 6.6. *La fonction $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ où $a \neq 0$ admet comme racines x_1, x_2 et x_3.*

En effet, $f(x_1) = a(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = a \times 0 \times (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 0$ et, de la même manière, $f(x_2) = 0$ et $f(x_3) = 0$.

Si deux des racines sont égales, par exemple si $x_2 = x_3$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_2) = a(x - x_1)(x - x_2)^2$ et on dit que x_2 est une racine double.
Si les trois racines sont égales, alors $f(x) = a(x - x_1)^3$ et x_1 est une racine triple.

Propriété 6.7. *La courbe de la fonction* $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ *où* $a \neq 0$ *passe par les points* $(x_1 ; 0)$, $(x_2 ; 0)$ *et* $(x_3 ; 0)$.

Pour trouver l'expression complète de $f(x)$, il suffit alors d'un 4è point qui nous permet de trouver a.

Propriété 6.8. *Le signe de fonction* $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ *où* $a \neq 0$ *s'obtient par un tableau de signe de la forme :*

- *Si les trois racines sont distinctes (pour l'exemple* $x_2 < x_3 < x_1$*) :*

x	$-\infty$		x_2		x_3		x_1		$+\infty$
a		signe de a		signe de a		signe de a		signe de a	
$x - x_1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - x_2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - x_3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- *Si* x_2 *racine double (pour l'exemple* $x_2 < x_1$*) :*

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$x - x_1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		signe de $-a$	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- *Si* x_1 *racine triple :*

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
a		signe de a		signe de a	
$(x - x_1)^3$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

Il faut savoir refaire ces tableaux sans apprendre par cœur leur forme générale.

6.3 Exercices

Les exercices seront choisis dans le manuel.