Un corrigé du devoir surveillé n°7

EXERCICE 7.1 (4 points)**.**
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto (3x^2+1)(-4x+7)$

Deux méthodes possibles :

Première méthode : $f(x) = -12x^3 + 21x^2 - 4x - 7$ donc $f'(x) = -12 \times 3x^2 + 21 \times 2x - 4 = -36x^2 + 42x - 4$

Seconde méthode : $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$. Ainsi $f'(x) = (3 \times 2x) \times (-4x+7) + (3x^2+1) \times (-4) = 6x(-4x+7) - 4(3x^2+1) = -24x^2 + 42x - 12x^2 - 4 = -36x^2 + 42x - 4$.

- $g : x \longmapsto x^3\sqrt{x}$

$g = u \times v$ donc $g' = u'v + uv'$. Ainsi $g(x) = (3x^2) \times (\sqrt{x}) + (x^3) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$

- $h : x \longmapsto (3x+1)^4$

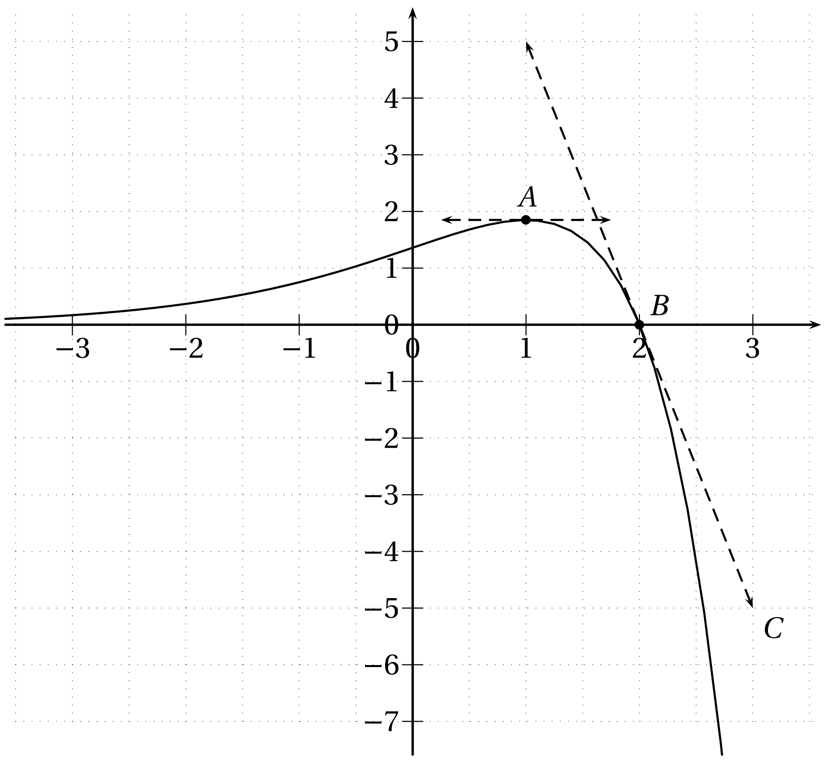
$h = u^4$ donc $h' = u' \times 4u^3$. Ainsi $h'(x) = 3 \times 4(3x+1)^3 = 12(3x+1)^3$.

- $i : x \longmapsto \sqrt{2x+1}$

$i = \sqrt{u}$ donc $i' = u' \times \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Ainsi $i'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

EXERCICE 7.2 (5 points)**.**
On a représenté sur la figure ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait de plus que :

- la tangente à la courbe en A d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente à la courbe en B, de cordonnées $(2 ; 0)$ passe par le point $C(3 ; -5)$.



1. En justifiant, déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a, donc $f'(1)=0$, car la tangente au point A est parallèle à l'axe des abscisses, et $f'(2)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-5}{1}=-5$.

2. Une des courbes données sur la figure 7.1 page 114 est celle de la fonction f'. Déterminer laquelle en justifiant précisément votre choix.

Les variations de f nous indiquent les signes de $f'(x)$. Comme f est croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$ alors $f'(x)$ est positive sur $]-\infty;1]$ et négative sur $[1;+\infty[$. Le courbe de f' ne peut donc qu'être la courbe 2.

3. Une des courbes données sur la figure 7.1 page 114 est celle d'une fonction F telle que $F'=f$. Déterminer laquelle en justifiant précisément votre choix.

Les signes de $F'(x)=f(x)$ nous indiquent les variations de F. Comme $F'(x)$ est positive sur $]-\infty;2]$ et négative sur $[2;+\infty[$ alors F est croissante sur $]-\infty;2]$ et décroissante sur $[2;+\infty[$. Le courbe de F ne peut donc qu'être la courbe 3.

EXERCICE 7.3 (11 points)**.**
Soit $f: x \longmapsto \frac{x^2-2x+1}{2x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.

$M(x;y)\in\mathscr{C}\cap(Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{x^2-2x+1}{2x+1} \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{0^2-2\times0+1}{2\times0+1}=1 \\ x=0 \end{cases}$ donc $\mathscr{C}\cap(Oy)=\{(0;1)\}$.

$M(x;y)\in\mathscr{C}\cap(Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{x^2-2x+1}{2x+1} \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{2x+1}=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Résolvons $\frac{x^2-2x+1}{2x+1}=0$.
$\frac{N}{D}=0 \Leftrightarrow N=0$ et $D\neq 0$, donc $\frac{x^2-2x+1}{2x+1}=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$ et $x\neq-\frac{1}{2}$.
$\Delta=(-2)^2-4\times1\times1=0$ donc une racine $x_0=-\frac{-2}{2\times1}=1$.
Ainsi $\mathscr{C}\cap(Ox)=\{(1;0)\}$.

2. (a) Montrer que, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$:

$$f'(x)=\frac{2(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$

$f=\frac{u}{v}$ donc $f'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.
Ainsi $f'(x)=\frac{(2x-2)\times(2x+1)-(2)\times(x^2-2x+1)}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2+2x-4x-2-2x^2+4x-2}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}=\frac{2(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$.

(b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x puis le tableau des variations de f en y indiquant les extremums.

2 et $(2x+1)^2$ sont tous deux strictement positifs donc le signe de $f'(x)$ sera celui de x^2+x-2 qui est un trinôme positif sauf entre ses racines.
$\Delta = 1^2 - 4\times(1)\times(-2) = 9 > 0$ donc le trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.
Ainsi :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. (a) Déterminer les abscisses des points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

   La tangente est parallèle à l'axe des abscisses quand son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire quand $f'(x) = 0$. Or on sait déjà que c'est aux points d'abscisses -2 et 1.

   (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.

   $T : y = f'(-1)(x-(-1)) + f(1) = -4(x+1) - 4 = -4x - 8.$

4. Dans le repère de la figure 7.2 page suivante on a tracé une partie $\mathscr{C}$. Dans ce repère :

   (a) Placer les éventuels points obtenus à la question 1.

   (b) Tracer les tangentes obtenues à la question 3.

   (c) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$. *On pourra s'aider d'un tableau de valeurs.*

   Voir la figure 7.2.

FIGURE 7.1: Courbes de l'exercice 7.2

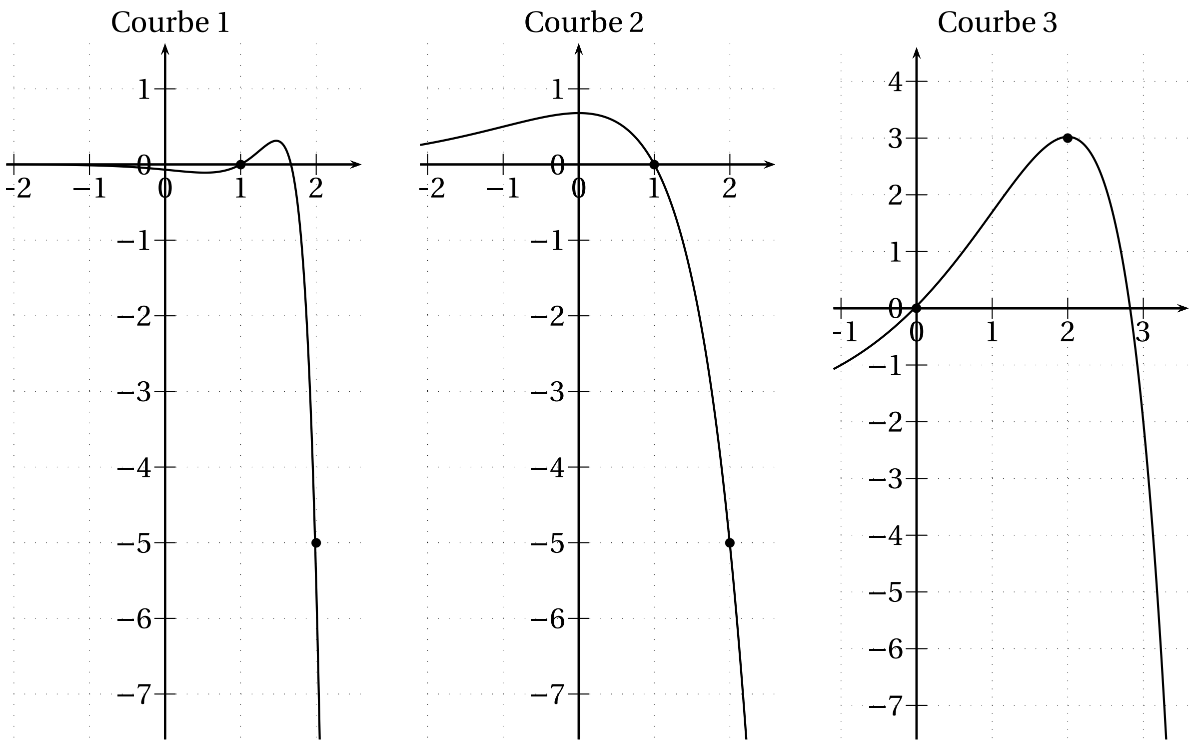


FIGURE 7.2: Figure de l'exercice 7.3