

Devoir surveillé n°5

Second degré – Nombre dérivé – Suites – Géométrie repérée – Trigonométrie

Ce devoir, noté sur 25, est un devoir de rattrapage pour les élèves ayant été absent·e·s à au moins un des devoirs du premier semestre. Il porte sur tout le programme du premier semestre. La calculatrice est autorisée mais les élèves ne doivent pas échanger leur calculatrice pendant toute la durée du contrôle. L'anti-sèche légale n'est pas autorisée. Toutes les réponses devront être justifiées.

EXERCICE 5.1 (Second degré et nombre dérivé - 10 points).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto 2x^2 - 8x - 10$ et \mathcal{C} sa courbe représentative.

Partie A : Étude de quelques caractéristiques de \mathcal{C} .

1. Quelle est la nature de \mathcal{C} ?
2. Déterminer les coordonnées des éventuelles intersections de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer les coordonnées des éventuelles intersections de \mathcal{C} avec l'axe des ordonnées.
4. Déterminer les coordonnées du sommet de \mathcal{C} .

Partie B : Nombres dérivés.

On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

1. En utilisant le taux d'accroissement de f , déterminer $f'(-1)$ puis une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse -1 .
2. En utilisant le taux d'accroissement de f , déterminer $f'(2)$.

Partie C : Tracés.

Dans le repère fourni sur la figure 5.1 donnée en annexe :

- placer les points trouvés dans la partie A;
- tracer les tangentes qu'on peut déduire de la partie B;
- compléter avec le tracé de \mathcal{C} .

EXERCICE 5.2 (Géométrie repérée – 5 points).

Le plan est muni d'un repère dans lequel les points A , B , et C ont les coordonnées suivantes :

$$A(1; 2) \quad B(3; -1) \quad \text{et} \quad C(2; 5)$$

La droite \mathcal{D} a pour équation cartésienne : $\mathcal{D} : 11x + 8y = 66$.

1. Déterminer une équation de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB) .
3. Montrer que les droites \mathcal{D} et Δ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

EXERCICE 5.3 (Trigonométrie – 5 points).

Les questions sont indépendantes.

1. En détaillant les calculs, déterminer la valeur de $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin(-x)$
2. Déterminer la valeur principale de $\frac{77\pi}{3}$ puis en déduire la valeur de $B = \cos\left(\frac{77\pi}{3}\right)$.
3. Déterminer la valeur principale de $\frac{85\pi}{4}$ puis en déduire la valeur de $C = \sin\left(\frac{85\pi}{4}\right)$.

EXERCICE 5.4 (Suites – Algorithmique – 5 points).

Au 1^{er} janvier 2023, une association sportive comptait 900 adhérent·e·s.

En observant l'évolution des adhérent·e·s sur les années précédentes, la présidente de l'association a modélisé cette évolution de la manière suivante :

- En moyenne, chaque année, 25 % des adhérent·e·s ne renouvellent pas leur adhésion ;
- En moyenne, chaque année, 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

On modélise le nombre d'adhérent·e·s par la suite (u_n) telle que u_n représente le nombre d'adhérent·e·s au 1^{er} janvier de l'année 2023 + n . Ainsi $u_0 = 900$.

On arrondira les résultats à l'unité.

1. (a) Calculer le nombre d'adhérent·e·s qu'on peut prévoir, selon ce modèle, au 1^{er} janvier 2024.
 (b) Calculer u_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 (c) Calculer u_3
 (d) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 12$.
2. On donne l'algorithme ci-dessous, où n est un entier naturel.

Entrée
Saisir s
Initialisation
$u \leftarrow 900$
$n \leftarrow 0$
Traitement
Tant que $u > s$
$n \leftarrow n + 1$
$u \leftarrow 0,75 \times u + 12$
Fin Tant que
Sortie
Afficher n

- (a) Compléter le tableau 5.1 fourni en annexe en faisant fonctionner cet algorithme à la main avec $s = 400$.
 Indiquer ce qu'il renvoie dans ce cas et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- (b) La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérent·e·s devient inférieur à 300. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérent·e·s se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ? Si oui, au bout de combien d'années ? *On justifiera avec soin.*

Annexes

FIGURE 5.1: Repère de l'exercice 5.1

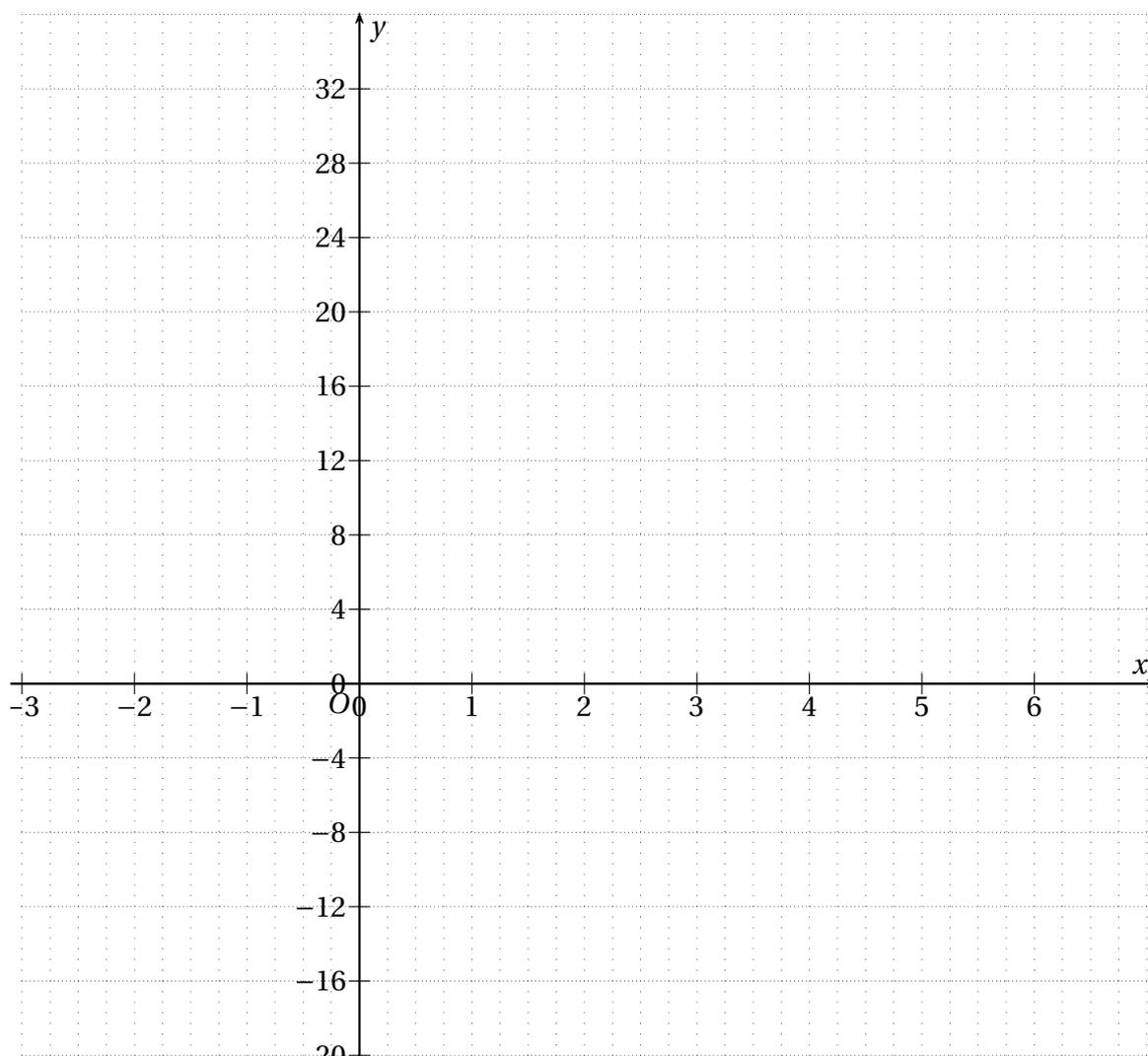


TABLE 5.1: Repère de l'exercice 5.4

Valeur de n	Valeur de u	A-t-on $u > s$?