Un corrigé du devoir surveillé n°3

EXERCICE 3.1 (2,5 points)**.**
La suite (u_n) est définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n-1)^2 - n^2$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite.

   $u_0 = (0-1)^2 - 0^2 = 1$, $u_1 = (1-1)^2 - 1^2 = -1$, $u_2 = (2-1)^2 - 2^2 = -3$ et $u_3 = (3-1)^2 - 3^2 = -5$

2. Que peut-on conjecturer quant à sa monotonie ?

   (u_n) semble décroissante.

3. Démontrer la conjecture précédente.

   Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   $u_{n+1} = ((n+1)-1)^2 - (n+1)^2 = (n)^2 - (n+1)^2 = n^2 - (n^2+2n+1) = n^2 - n^2 - 2n - 1 = -2n - 1$.
   $u_n = (n-1)^2 - n^2 = n^2 - 2n + 1 - n^2 = -2n + 1$.
   $u_{n+1} - u_n = -2n - 1 - (-2n+1) = -2n - 1 + 2n - 1 = -2$.
   $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ donc la suite est bien décroissante.

EXERCICE 3.2 (2,5 points)**.**
La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Déterminer les 4 premiers termes de cette suite.

   $u_0 = 0$, $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$, $u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$, $u_3 = 2u_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ et $u_4 = 2u_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$.

2. Les trois fonctions ci-contre sont écrites en Python. Une seule d'elles permet d'afficher tous les termes de la suite, de u_0 à u_n. Indiquer laquelle. On justifiera en expliquant pourquoi les deux autres ne le permettent pas.

```
def suite1(n) :
    u = 0
    for i in range(n+1) :
        u = 2 * u + 1
        print(u)
```

```
def suite2(n) :
    u = 0
    for i in range(n+1) :
        print(u)
        u = 2 * u + 1
```

```
def suite3(n) :
    u = 0
    for i in range(n+1) :
        u = 2 * u + 1
    print(u)
```

   *suite*1 n'affiche pas u_0, *suite*3 n'affiche que le dernier terme, c'est donc *suite*2 qui permet d'afficher tous les termes de la suite de u_0 à u_n.

EXERCICE 3.3 (6 points).

Hubert est le propriétaire en 2022 d'un appartement qu'il compte louer à l'année. Il envisage de le louer annuellement à 9 600 €.

Les loyers sont révisés chaque année, en général à la hausse, selon un indice fourni par l'INSEE.

Après s'être renseigné sur les évolutions des 10 années précédentes, Hubert a constaté qu'en moyenne le loyer annuel est augmenté chaque année de 1,2 %. Hubert décide d'utiliser cette augmentation moyenne comme modèle pour les années à venir, afin d'évaluer les sommes qu'il va toucher.

Pour la suite, on appelle (u_n) la suite les loyers annuels où u_n est le loyer annuel de l'année $2022+n$.

Ainsi $u_0 = 9600$.

On arrondira les loyers au centime.

1. (a) Montrer que le loyer annuel en 2023 sera de 9 715,20 €.

   $u_1 = u_0 + \frac{1,2}{100}u_0 = 9600 + 115,20 = 9715,20$.
   Le loyer annuel de 2023 sera donc bien de 9 715,20 €.

   (b) Calculer u_2 et interpréter le résultat.

   $u_2 = u_1 + \frac{1,2}{100}u_1 \approx 9831,78$ donc le loyer annuel de 2024 sera de 9 831,78 €.

   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,012u_n$

   $u_{n+1} = u_n + \frac{1,2}{100}u_n = \left(1+\frac{1,2}{100}\right)u_n = 1,012u_n$.
   ou bien
   Augmenter de 1,2 % revient à multiplier par 1,012 donc $u_{n+1} = 1,012u_n$.

2. On donne, dans la table 3.2 page suivante, un algorithme écrit en « langage courant ».

   (a) Le faire tourner « à la main » si n vaut 3 en indiquant vos résultats successifs sur votre copie dans un tableau comme celui proposé ci-dessous et indiquer le résultat qu'il renvoie :

k	u	s
	9 600	9 600
1	9 715,20	19 315,20
2	9 831,78	29 146,98
3	9 949,76	39 096,75

   L'algorithme renvoie donc 39 096,75.

   (b) Que fait cet algorithme dans le cas général ?

   Cet algorithme calcule et renvoie la somme de tous les loyers annuels, de l'année 2022 à l'année $2022+n$.

   (c) En donner une traduction sous la forme d'une fonction écrite en Python.

   Voir la table 3.3 page ci-contre.
   On peut remplacer « range(n) » par « range(1,n + 1) » pour que k aille bien de 1 jusqu'à n, cependant range(n) est plus court et la boucle, dans laquelle k n'intervient pas, aura bien lieu n fois.

3. On donne une fonction, dans la table 3.4 page suivante, écrite en Python.

   (a) Que renvoie *machin*(11000) ?

   La fonction renvoie 12.

   (b) L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

   Au bout de 12 ans, soit en 2022 + 12 = 2034 le loyer annuel dépassera 11 000 €.

TABLE 3.1: Algorithme de l'exercice 3.3

TABLE 3.2: Algorithme 1

```
Entrée
    n
Initialisation
    u ← 9600
    s ← 9600
Traitement
    Pour k allant de 1 à n
        u ← u × 1,012
        s ← s + u
    Fin pour
Sortie
    s
```

TABLE 3.3: Algorithme 2

```
def somme(n) :
    u = 9600
    s = 9600
    for k in range(n) :
        u = u * 1,012
        s = s + u
    return s
```

TABLE 3.4: Algorithme 3

```
def machin(s) :
    u = 9600
    n = 0
    while u < s :
        u = u * 1,012
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 3.4 (5 points).
On donne les mesures d'angles orientés de vecteurs suivants : $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=-\frac{4\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}.$$

2. Donner une mesure des chacun des angles ci-dessous en justifiant brièvement :

   (a) $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)=-\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}$.

   (b) $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\pi=\frac{5\pi}{6}$.

   (c) $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;-\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\pi=\frac{5\pi}{6}$.

   (d) $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\,;-\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)\mod 2\pi\equiv-\frac{\pi}{6}\mod 2\pi$.

   (e) $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\left(-\overrightarrow{AC}\,;-\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)\mod 2\pi\equiv\frac{\pi}{6}\mod 2\pi$.

   (f) $\left(4\overrightarrow{AB}\,;4\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

   (g) $\left(2\overrightarrow{AB}\,;-2\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

   (h) $\left(-3\overrightarrow{AB}\,;4\overrightarrow{AC}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

   (i) $\left(-3\overrightarrow{AB}\,;-4\overrightarrow{AC}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\,;-\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\mod 2\pi$.

EXERCICE 3.5 (9 points)**.**
Le cercle trigonométrique est fourni ci-dessous.

1. Sur ce cercle sont placés les points A, B, C, I, I', J et J'. Compléter le tableau suivant où θ pour chacun des points M est la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ en radians.

Point	A	B	C	I	I'	J	J'
θ	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	0	0
$\sin(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	1	-1

2. Placer chacun des points suivants sur ce même cercle trigonométrique où θ pour chacun des points M est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ en radians. :

Point	D	E	F	G	H
θ	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{14\pi}{3}$

3. Déterminer, en détaillant la manière de procéder et sans utiliser la calculatrice, $\sin\left(\frac{289\pi}{6}\right)$

Enlevons des tours entiers à $\frac{289\pi}{6}$, c'est-à-dire des $2\pi = \frac{12\pi}{6}$.
Or $289 = 24 \times 12 + 1 \Leftrightarrow \frac{289\pi}{6} = 24 \times \frac{12\pi}{6} + 1 \times \frac{\pi}{6} = 24 \times 2\pi + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6} \mod 2\pi$.
Donc $\sin\left(\frac{289\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

4. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$:

(a) $A = \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

(b) $B = \sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

(c) $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

(d) $D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos(x)$.