

Devoir surveillé n°3

Suites – Angles orientés – Trigonométrie

Le devoir est noté sur 25 points. Le barème n'est qu'indicatif.

EXERCICE 3.1 (2,5 points).

La suite (u_n) est définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n-1)^2 - n^2$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite.
2. Que peut-on conjecturer quant à sa monotonie?
3. Démontrer la conjecture précédente.

EXERCICE 3.2 (2,5 points).

La suite (u_n) est définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite.
2. Les trois fonctions ci-contre sont écrites en Python. Une seule d'elle permet d'afficher tous les termes de la suite, de u_0 à u_n . Indiquer laquelle. On justifiera en expliquant pourquoi les deux autres ne le permettent pas.

```
def suite1(n) :
    u = 0
    for i in range(n) :
        u = 2 * u + 1
    print(u)
```

```
def suite2(n) :
    u = 0
    for i in range(n) :
        print(u)
        u = 2 * u + 1
```

```
def suite3(n) :
    u = 0
    for i in range(n) :
        u = 2 * u + 1
    print(u)
```

EXERCICE 3.3 (6 points).

Hubert est le propriétaire en 2022 d'un appartement qu'il compte louer à l'année. Il envisage de le louer annuellement à 9 600 €.

Les loyers sont révisés chaque année, en général à la hausse, selon un indice fourni par l'INSEE. Après s'être renseigné sur les évolutions des 10 années précédentes, Hubert a constaté qu'en moyenne le loyer annuel est augmenté chaque année de 1,2 %. Hubert décide d'utiliser cette augmentation moyenne comme modèle pour les années à venir, afin d'évaluer les sommes qu'il va toucher.

Pour la suite, on appelle (u_n) la suite des loyers annuels où u_n est le loyer annuel de l'année 2022 + n .

Ainsi $u_0 = 9600$.

On arrondira les loyers au centime.

1. (a) Montrer que le loyer annuel en 2023 sera de 9 715,20 €.
- (b) Calculer u_2 et interpréter le résultat.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,012u_n$

2. On donne l'algorithme suivant, écrit en « langage courant » :

Entrée

n

Initialisation

$u \leftarrow 9600$

$s \leftarrow 9600$

Traitement

Pour k allant de 1 à n

$u \leftarrow u \times 1,012$

$s \leftarrow s + u$

Fin pour

Sortie

s

- (a) Le faire tourner « à la main » si n vaut 3 en indiquant vos résultats successifs sur votre copie dans un tableau

comme celui proposé ci-dessous et indiquer le résultat qu'il renvoie :

k	u	s

(b) Que fait cet algorithme dans le cas général?

(c) En donner une traduction sous la forme d'une fonction écrite en Python.

3. On donne la fonction suivante, écrite en Python :

```
def machin(s):
    u = 9600
    n = 0
    while u < s:
        u = u * 1,012
        n = n + 1
    return n
```

(a) Que renvoie *machin*(11000)?

(b) L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3.4 (5 points).

On donne les mesures d'angles orientés de vecteurs suivants : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AB}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{6}$.

2. Donner une mesure des chacun des angles ci-dessous en justifiant brièvement :

(a) $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

(d) $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CA})$

(g) $(2\overrightarrow{AB}; -2\overrightarrow{AC})$

(b) $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC})$

(e) $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA})$

(h) $(-3\overrightarrow{AB}; 4\overrightarrow{AC})$

(c) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CA})$

(f) $(4\overrightarrow{AB}; 4\overrightarrow{AC})$

(i) $(-3\overrightarrow{AB}; -4\overrightarrow{AC})$

EXERCICE 3.5 (9 points).

Les questions sont indépendantes.

Le cercle trigonométrique est fourni ci-dessous.

1. Sur ce cercle sont placés les points A, B, C, I, I', J et J' . Compléter le tableau suivant où θ pour chacun des points M est la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ en radians.

Point	A	B	C	I	I'	J	J'
θ							
$\cos(\theta)$							
$\sin(\theta)$							

2. Placer chacun des points suivants sur ce même cercle trigonométrique où θ pour chacun des points M est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ en radians. :

Point	D	E	F	G	H
θ	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{14\pi}{3}$

3. Déterminer, en détaillant la manière de procéder et sans utiliser la calculatrice, $\sin\left(\frac{289\pi}{6}\right)$

4. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$:

(a) $A = \cos(\pi - x)$

(c) $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

(b) $B = \sin(\pi + x)$

(d) $D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

