Un corrigé du devoir surveillé n°1

EXERCICE 1.1 (Question de cours – 2 points)**.**
Soit ax^2+bx+c un trinôme (donc avec $a\neq 0$).
Montrer que si a et c sont de signe contraire (donc $c\neq 0$) alors le trinôme a forcément deux racines distinctes.

C'est le signe du discriminant qui nous indique le nombre de racines.
Si a et c de signe contraire, alors $ac<0 \Leftrightarrow -4ac>0 \Leftrightarrow b^2-4ac>0 \Leftrightarrow \Delta>0$, donc le trinôme admet deux racines distinctes.

EXERCICE 1.2 (7 points)**.**
Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2+x+1=0$

   x^2+x+1 est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$, $b=1$ et $c=1$. Les solutions de l'équation sont ses éventuelles racines.
   $\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$ donc ce trinôme n'a pas de racine et l'équation $x^2+x+1=0$ n'a pas de solution.

2. $2x^2+x=1$

   $2x^2+x=1 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$. Cherchons les racines de ce trinôme. $\Delta=9>0$ donc il a deux racines $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-3}{4}=-1$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$. L'équation $2x^2+x=1$ a donc deux solutions : -1 et $\frac{1}{2}$.

3. $x^2=2x-1$

   $x^2=2x-1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$. Cherchons les racines de ce trinôme. $\Delta=0$ donc il a une racine double $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$. L'équation $x^2=2x-1$ a donc une solution : 1.

4. $4x^2-3x+1=0$

   Cherchons les racines de ce trinôme. $\Delta=-7<0$ donc l'équation $4x^2-3x+1=0$ n'a pas de solution.

EXERCICE 1.3 (7,5 points)**.**
Sans justification, compléter le tableau suivant avec les formes manquantes, si elles existent.

Lorsqu'on n'a pas la forme développée, on développe les formes canonique ou factorisée pour l'obtenir.
À partir de la forme développée on obtient la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}$ ou bien la forme factorisée en cherchant les racines éventuelles, celle-ci étant alors $a(x-x_1)(x-x_2)$ s'il y a deux racines, $a(x-x_0)^2$ s'il y a une racine et pas de forme factorisée s'il n'y a pas de racines.
Voir le tableau 1.1 page suivante pour les résultats.

EXERCICE 1.4 (6 points)**.**
Soit $f: x \longmapsto 2x^3+4x^2-2x-4$ définie pour tout réel x.

1. Montrer que 1 est une racine de f.

   $f(1)=2\times 1^3+4\times 1^2-2\times 1-4=2+4-2-4=0$ donc 1 est bien une racine de f.

TABLE 1.1: Tableau de l'exercice 1.3

Forme	Développée	Canonique	Factorisée
$A(x)$	$2x^2 - x - 1$	$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$	$2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
$B(x)$	$2x^2 - 4x - 2$	$2(x-1)^2 - 4$	$2\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$
$C(x)$	$3x^2 - 3x - 6$	$3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}$	$(3(x+1)(x-2)$
$D(x)$	$4x^2 + 16x + 16$	$4(x+2)^2$	$4(x+2)^2$
$E(x)$	$x^2 + 2x + 3$	$(x+1)^2 + 2$	Pas de forme factorisée

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x.

Développons :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x-1)(ax^2+bx+c) \\ & = & ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ & = & ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{array}$$

On identifie les coefficients.
Puisque :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \\ & = & 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

Alors : $\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b - a = 4 \\ c - b = -2 \\ -c = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{array}\right.$

Donc $f(x) = (x-1)(2x^2 + 6x + 4)$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

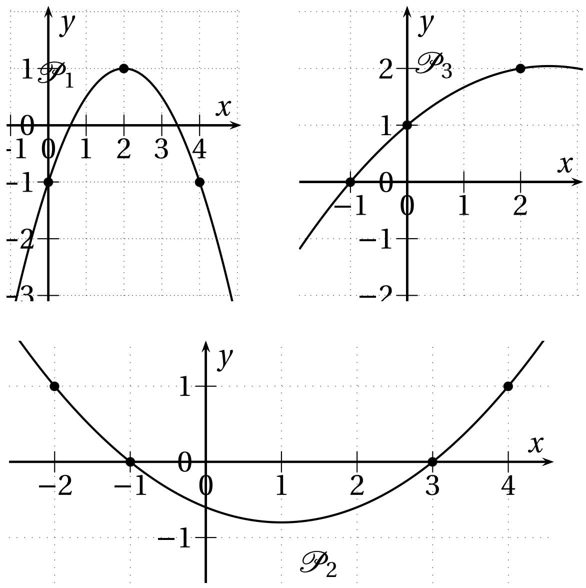
$x \longmapsto x - 1$ est une fonction affine croissante s'annulant en 1.

$x \longmapsto 2x^2 + 6x + 4$ est une fonction trinôme qui est du signe de $a = 2$ c'est-à-dire positive sauf entre ses racines.
Or $\Delta = 36 - 4 \times 2 \times 4 = 4 > 0$ donc deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$.

Dressons le tableau de signes que nous pouvons en déduire :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+6x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

EXERCICE 1.5 (7,5 points)**.**
Les paraboles $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ de la figure ci-dessous sont les représentations graphiques respectives des fonctions trinômes f_1, f_2 et f_3. On a placé quelques points à coordonnées entières situés sur les courbes.
Déterminer une expression de chacune de ces fonctions en expliquant brièvement la méthode.



$\mathscr{P}_2$ coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -1$ et en $x_2 = 3$ qui sont les racines de f_2 donc la forme factorisée de f_2 est $f_2(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x+1)(x-3)$.
$(4\,;1) \in \mathscr{P}_2$ donc $f_2(4) = 1 \Leftrightarrow a(4+1)(4-3) = 1 \Leftrightarrow 5a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$.
D'où :

$$f_2(x) = -\frac{1}{5}(x+1)(x-3)$$

Le sommet S de la parabole $\mathscr{P}_1$ est de coordonnées $S(2\,;1) = (\alpha\,;\beta)$ donc la forme canonique de f_1 est $f_1(x) = a(x-\alpha)^2+\beta = a(x-2)^2+1$.
$(0\,;-1) \in \mathscr{P}_1$ donc $f_1(0) = -1 \Leftrightarrow a(0-2)^2+1 = -1 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.
D'où :

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2+1$$

$\mathscr{P}_3$ passe par les points $(-1\,;0)$, $(0\,;1)$ et $(2\,;2)$ donc $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ et $f(2) = 2$.
La forme développée $f_3(x) = ax^2+bx+c$ nous donne :

$$\begin{cases} a\times(-1)^2+b\times(-1)+c = 0 \\ a\times 0^2+b\times 0+c = 1 \\ a\times 2^2+b\times 2+c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c = 0 \\ c = 1 \\ 4a+2b+c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = \frac{5}{6} \\ c = 1 \end{cases}$$

D'où :

$$f_3(x) = -\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x+1$$