Chapitre 15

Fonctions inverse, racine carrée, valeur absolue

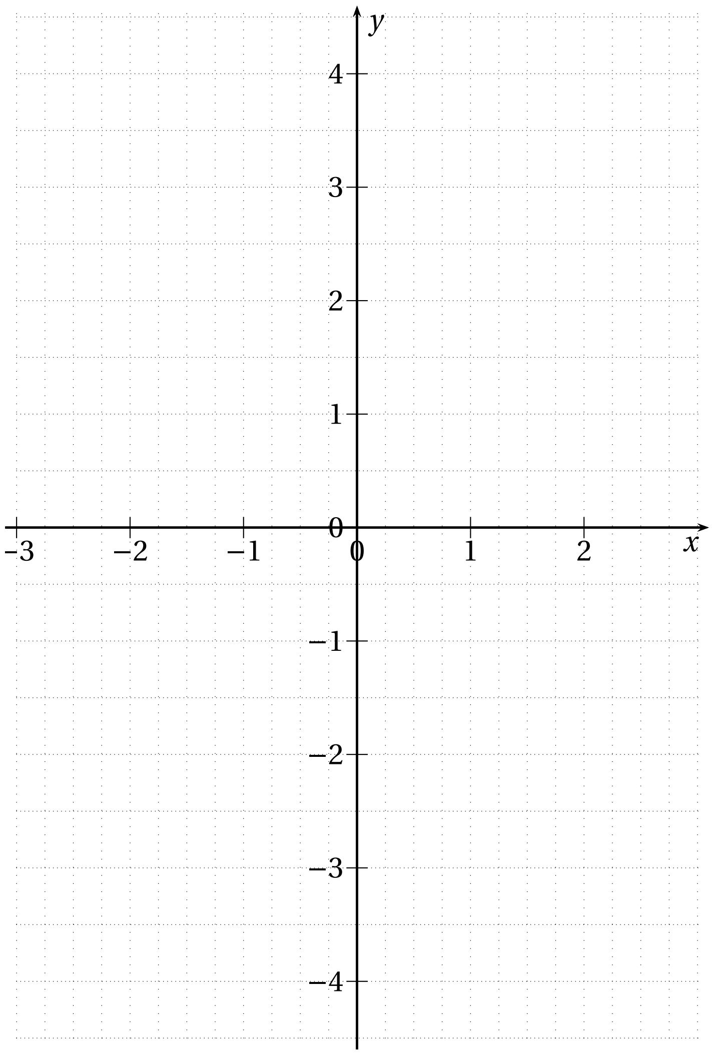
Sommaire

15.1 Fonction inverse

Définition 15.1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est appelée *fonction inverse.*

ACTIVITÉ 15.1.
Soit f la fonction inverse.

1. Montrer que la fonction inverse est impaire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonctioninverse dans le repère ci-contre.
   Ce type de courbe s'appelle une *hyperbole.*
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^{+*} =]0\,;+\infty[$?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Montrer que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.
   (b) Soit $0 < a < b$
      i. Quel est le signe de $b - a$?
      ii. Quel est le signe de ab?
      iii. En déduire le signe de $\frac{b-a}{ab}$ puis celui de $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.
      iv. En déduire les variations de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty\,;0[$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$f(x)$													

Propriété 15.1. *Soit f la fonction inverse.*

- *La fonction inverse est une fonction impaire.*
- *f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

15.2 Fonction racine carrée

Définition 15.2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée *fonction racine carrée*.

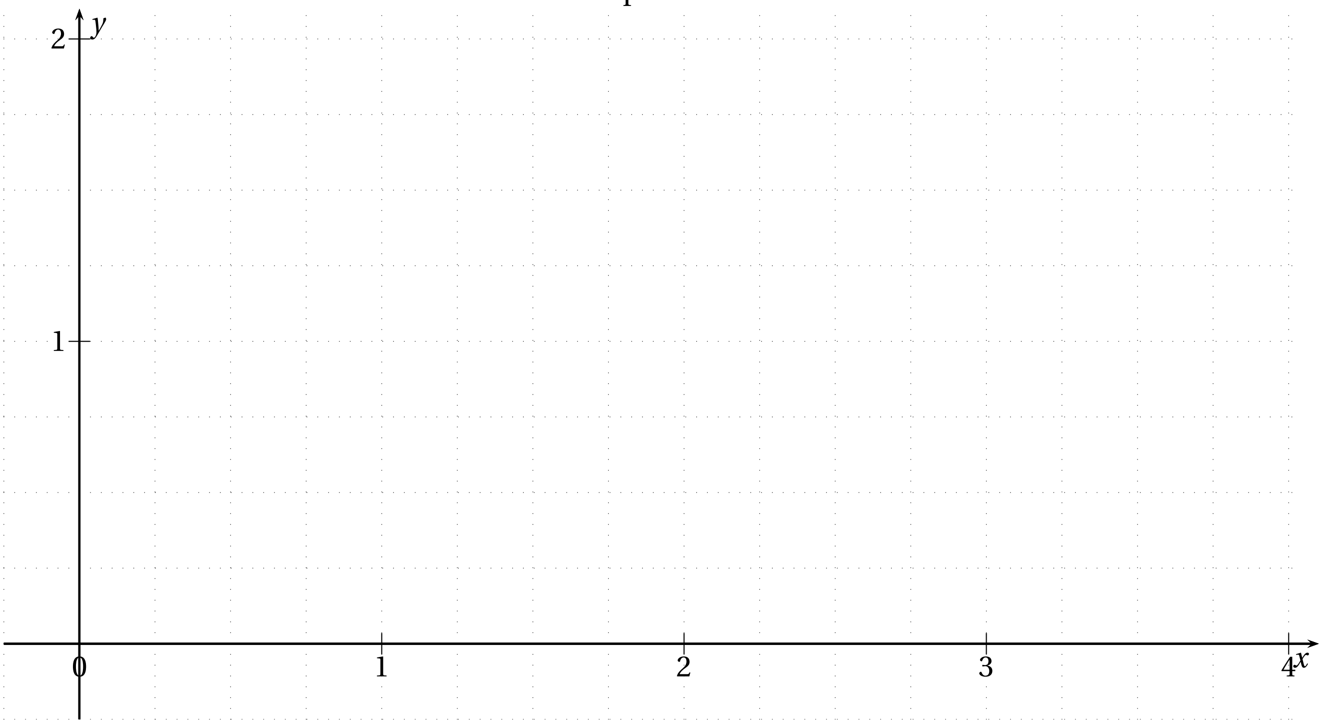
ACTIVITÉ 15.2.
Soit f la fonction racine carrée.

1. La fonction racine carrée est-elle paire ? Impaire ?
2. Compléter le tableau ci-dessous puis tracer la courbe représentative de la fonction racine carrée dans le repère de la figure 15.1 de la présente page.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

3. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la fonction racine carrée ?
Prouvons-le.
Soit $0 \leqslant a < b$.
   (a) Que peut-on dire alors de $b - a$?
   (b) Montrer que $b - a = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.
   (c) Que peut-on dire du signe de $\sqrt{b} + \sqrt{a}$? En déduire le signe de $\sqrt{b} - \sqrt{a}$.
   (d) En déduire alors le sens de variation de la fonction racine.

FIGURE 15.1: Repère de l'activité 15.2



Propriété 15.2. *Soit f la fonction racine carrée.*
f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	0 $+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0 ↗

15.3 Fonction valeur absolue

15.3.1 Valeur absolue

Définition 15.3. On appelle *valeur absolue* d'un réel x le réel, noté $|x|$, tel que :

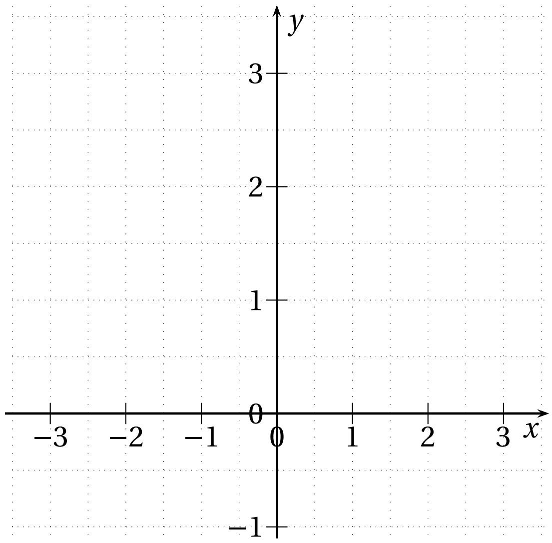
$$\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0 \text{ alors } |x| = x \\ \text{Si } x \leqslant 0 \text{ alors } |x| = -x \end{cases}$$

La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |x|$.

Par exemple, $|3| = 3$ et $|-7| = 7$.

Activité 15.3.
Soit f la fonction valeur absolue.

1. Montrer que la fonction valeur absolue est paire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction carrée dans le repère ci-contre.
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$?
   Démontrons cette conjecture.
   Montrer que si $0 \leqslant a < b$ alors $|a| < |b|$. Que peut-on en déduire ?
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$									

Propriété 15.3. *Soit f la fonction valeur absolue.*

- *La fonction valeur absolue est une fonction paire.*
- *Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et admet comme minimum 0.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \|x\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

15.3.2 Valeur absolue et intervalles

Activité d'introduction

ACTIVITÉ **15.4.**
On appelle *distance entre deux nombres réels a et b*, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite réelle munie d'un repère $(O; \vec{\imath})$.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la distance entre les deux nombres réels :
   - 2 et 3
   - −1 et 3
   - 0 et 3
   - 3 et −1
   - −2 et −4
   - 0 et −3
2. Conjecturer le lien entre distance entre deux réels et valeur absolue.
   En se basant sur les deux dernières distances calculées dans la question précédente, donner une nouvelle définition de $|x|$.
3. Pour un intervalle $[a; b]$, le nombre $c = \frac{a+b}{2}$ est appelé *centre* de l'intervalle, le nombre $d = b - a$ est appelé *amplitude* ou diamètre de l'intervalle et enfin le nombre $r = \frac{b-a}{2}$ est appelé rayon de l'intervalle.
   (a) Calculer le centre et le rayon de $[2; 6]$.
   (b) Traduire $|x-4|$ en termes de distance entre deux réels.
   (c) Compléter : $x \in [2; 6] \Leftrightarrow |x-4| \leqslant \ldots$
   (d) Traduire les inégalités suivantes en intervalles :
   - $|x-1| \leqslant 2$
   - $|x+2| < 3$
   - $|x-1| \geqslant 4$
   - $|x+3| > 1$

   (e) Traduire les intervalles suivants en termes de valeurs absolues :
   - $x \in [1; 25]$
   - $x \in [6; 20]$
   - $x \in [-6; 2]$

Bilan et compléments

Définition 15.4 (Une autre définition de la valeur absolue)**.** Soit a et b deux réels. On appelle distance entre a et b le nombre $|a-b|$ et $|a| = |a-0|$ la distance du nombre a à 0.

On admettra que cette définition est équivalente à la précédente.

Définition 15.5. Soit a et b deux nombres tels que $a < b$.
On dira que l'intervalle $[a; b]$ a :
- pour *centre* le nombre $c = \frac{a+b}{2}$;
- pour *amplitude* (ou diamètre) le nombre $d = |a-b|$;
- pour *rayon* le nombre $r = \frac{|a-b|}{2}$.

Propriété 15.4. *Soit a et b deux nombres tels que a < b.*

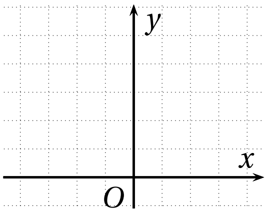
$$x \in [a; b] \Leftrightarrow \left| x - \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \right| \leqslant \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \quad \textit{et} \quad x \in]a; b[\Leftrightarrow \left| x - \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \right| \ldots \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

15.4 Exercices et problèmes

15.4.1 Exercices

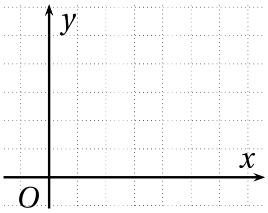
EXERCICE 15.1.
Déterminer graphiquement l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de chacune des inéquations suivantes.
On construira avec soin les représentations graphiques des fonctions de référence concernées et on fera apparaître les traits de constructions.

$2 \leqslant x^2$



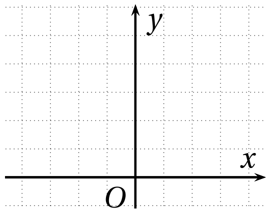
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{x} \geqslant 2$



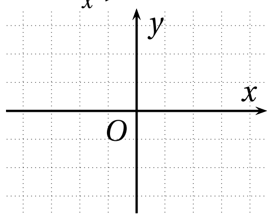
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$|x| > 1$



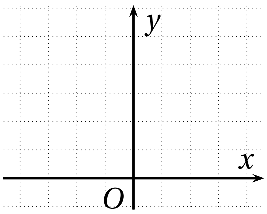
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{x} \geqslant -3$



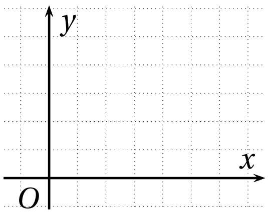
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1 \leqslant x^2 \leqslant 5$



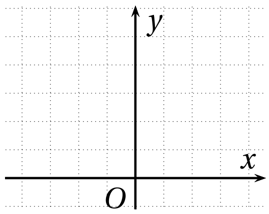
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$3 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 4$



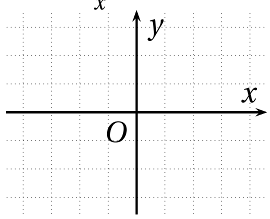
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$4 > |x| > 2$



$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{x} < 2$



$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

EXERCICE 15.2.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x > 3$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors $\ldots \frac{1}{x} \ldots$
3. Si $x > 2$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
4. Si $x < -3$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
5. Si $x < 4$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
6. Si $x > -10$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
7. Si $x < 1$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
8. Si $x > -5$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$

EXERCICE 15.3.
Calculer $\sqrt{x^2}$ dans les cas suivants :

- $x = 3$
- $x = -3$
- $x = 2$
- $x = -2$

En déduire la valeur de $\sqrt{x^2}$.

15.4.2 Problèmes

PROBLÈME 15.1.
Déterminer l'ensemble (sous forme d'intervalle) des réels x vérifiant :

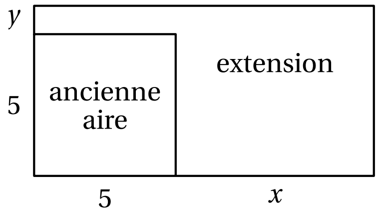
1. $|x - 10| \leqslant 1$
2. $|x - 2,5| \leqslant 0,2$
3. $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{2}$
4. $|x + 5| \leqslant 3$
5. $|x + 1| \geqslant 2$
6. $|x - 3| > 1$

PROBLÈME 15.2.
Écrire une inégalité vérifiée par x et utilisant une valeur absolue dans les cas suivants :

1. $x \in [-4 ; 5]$
2. $x \in [0 ; 1,1]$
3. $x \in \left[\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right]$

PROBLÈME 15.3.

La petite station balnéaire de Port-Soleil est de plus en plus fréquentée. Aussi pour satisfaire les vacanciers, le maire a-t-il décidé d'agrandir l'aire de jeu. Actuellement, cette aire a la forme d'un carré de 5 mètres de côté. Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire ci-dessous :



1. Exprimer l'aire de cette nouvelle aire de jeu en fonction de x et y.
2. Les contraintes budgétaires de la commune font que la surface de la nouvelle aire de jeu devra être de 100 mètres carrés.
   Démontrer que $y = \frac{100}{5+x} - 5$.
   Quelle information le maire doit-il donner à l'entrepreneur : x, y ou les deux ?
3. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f : x \mapsto \frac{100}{5+x} - 5$.
   (a) La valeur de y est limitée à 5 mètres par le bord de mer. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   (b) Représenter la fonction f avec la calculatrice sur l'intervalle $[5; 15]$.
   (c) Quelles semblent être les variations de f sur l'intervalle $[5; 15]$?
   (d) Parmi les deux valeurs suivantes de x, laquelle donne à la nouvelle aire de jeu la plus grand périmètre : $x_1 = 5$ m ou $x_2 = 10$ m ?

PROBLÈME 15.4.

On va découvrir plusieurs méthodes pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{33}$.

Méthode 1 : Avec une calculatrice

1. Sans calculatrice, donner un encadrement à l'unité de $\sqrt{33}$.
2. Après avoir complété le tableau ci-dessous, donner un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième :

n	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
n^2											

3. Quel est l'encadrement de $\sqrt{33}$ au millième ?

Méthode 2 : Avec un tableur

1. Construire la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Pas											
2	n	5										6
3	n²											

2. Quelle formule doit-on écrire dans la cellule B1 pour calculer le pas qui permet d'aller de B2 à L2 en 10 étapes ?
   Compléter la cellule C2 pour augmenter B2 du pas calculé en B1, puis recopier la formule jusqu'en K2.
   Pour recopier la formule sans changer B1, écrire \$B\$1 au lieu de B1 (le \$ fixe la lettre ou le nombre lors des copiés-collés).

3. Compléter la cellule B3 pour obtenir le carré du nombre en B2, puis recopier la formule jusqu'à L3.
4. Observer le tableau et donner un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième.
5. Remplacer le contenu de B2 et de L2 par les bornes de l'encadrement.
   Quel encadrement de $\sqrt{33}$ obtient-on ?
   Quelle est sa précision ?
6. Recommencer la question précédente avec le nouvel encadrement jusqu'à obtenir une précision de 10^{-4}.
   Changer si besoin le format d'affichage des nombres.
7. Utiliser la feuille de calcul pour obtenir une approximation de $\sqrt{125}$ à 10^{-4} près.

Méthode 3 : Avec un programme

HÉRON D'ALEXANDRIE[1] a donné son nom à une formule qui permet, à l'aide des longueurs des trois côtés d'un triangle, d'obtenir l'aire de ce triangle :

PROPRIÉTÉ (Formule de HÉRON)**.** *Soit un triangle dont les longueurs des côtés sont a, b et c. Soit p le demi-périmètre de ce triangle, c'est-à-dire $p = \frac{a+b+c}{2}$. Alors, l'aire S de ce triangle est donnée par :*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Problème : cette formule nécessite de rechercher la racine carrée d'un nombre et, au premier siècle apr. J.-C. il n'y avait ni calculatrice, ni tableur mais on savait faire les opérations de base, y compris les divisions.

Qu'à cela ne tienne, HÉRON inventa une méthode pour obtenir rapidement une valeur approchée de la racine carrée de tout nombre à l'aide d'un algorithme.

Algorithme de HÉRON : Pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{n}$

On débute avec un nombre a_0 tel que $0 < a_0 < \sqrt{n}$.

Étape 1 : On fait la moyenne de a_0 et de $\frac{n}{a_0}$ on trouve a_1

Étape 2 : On fait la moyenne de a_1 et de $\frac{n}{a_1}$ on trouve a_2

On continue autant d'étapes que l'on veut.

La suite de nombres va tendre vers la racine carrée cherchée

On va appliquer cet algorithme pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{33}$.

1. Choisir un entier naturel a_0 qui convient.
2. Compléter :

n	0	1	2	3	4	5
a_n						

3. Que dire de la précision du résultat obtenu en 5 étapes ?
4. Déterminer une approximation de $\sqrt{125}$.

1. ingénieur, mécanicien et mathématicien grec du 1er siècle apr. J.-C.