# Chapitre 13

# Fonctions carré et cube

## Sommaire

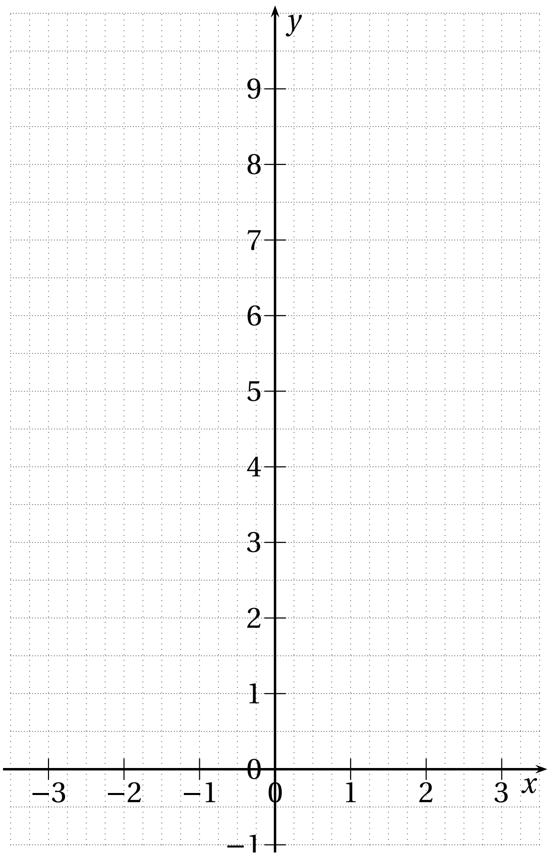


## 13.1 Fonction carré

**Définition 13.1.** La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^2$ est appelée *fonction carrée.*

**ACTIVITÉ 13.1.**
Soit $f$ la fonction carrée.

1. Montrer que la fonction carrée est paire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction carrée dans le repère ci-contre.
   Ce type de courbe s'appelle une *parabole.*
4. Quel semble être le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ ?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Factoriser $a^2 - b^2$
   (b) Soit $0 \leqslant a < b$.
      i. Quel est le signe de $a - b$ ?
      ii. Quel est le signe de $a + b$ ?
      iii. En déduire le signe de $a^2 - b^2$.
      iv. En déduire le sens de variation de $f : x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}^-$.



| $x$ | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,25 | 2,5 | 2,75 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | | |

**Propriété 13.1.** *Soit $f$ la fonction carrée.*

- *La fonction carrée est une fonction paire.*
- *Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et admet comme minimum 0.*

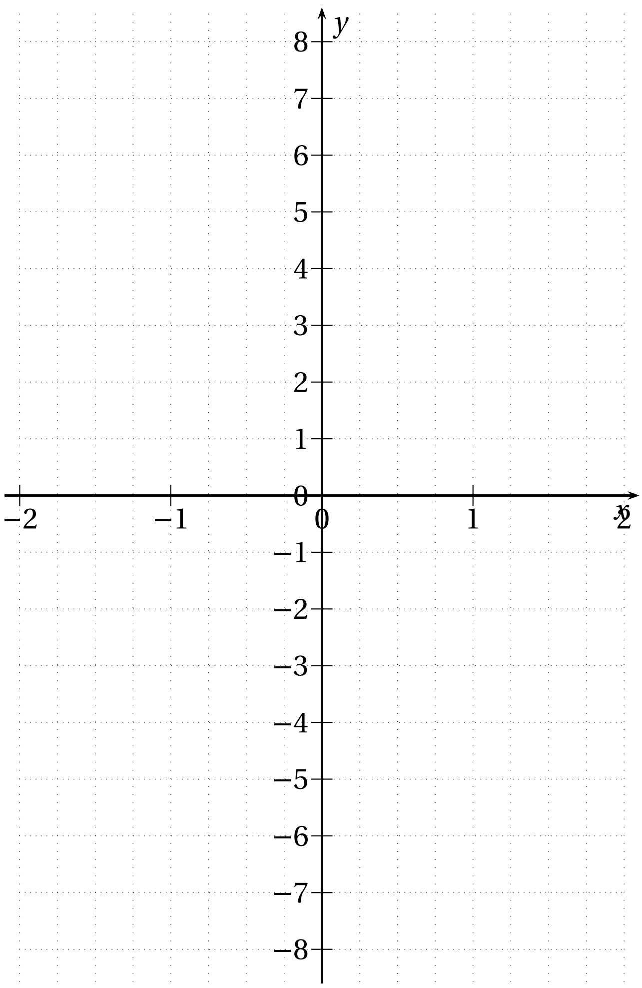
| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)=x^2$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

## 13.2 Fonction cube

**Définition 13.2.** La $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$ est appelée *fonction cube.*

**Activité 13.2.**
Soit $f$ la fonction cube.

1. Montrer que la fonction cube est impaire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction cube dans le repère ci-contre.
4. Quel semble être le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ ?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Montrer que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
   (b) Soit $0 \leqslant a < b$
      i. Quel est le signe de $a-b$ ?
      ii. Quel est le signe de $ab$ ? En déduire le signe de $a^2+ab+b^2$.
      iii. En déduire le signe de $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ puis celui de $a^3-b^3$.
      iv. En déduire les variations de $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}^-$.




| $x$ | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

**Propriété 13.2.** *Soit $f$ la fonction cube.*

- *La fonction cube est une fonction impaire.*
- *Elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x^3$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

## 13.3 Exercices et problèmes

### 13.3.1 Exercices

**EXERCICE 13.1.**
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carrée ou de son tableau de variation, compléter par ce qu'il est possible de déduire pour $x^2$ :

1. Si $x > 3$ alors ..............................
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ..........................
3. Si $x > 2$ alors ..............................
4. Si $x < -3$ alors ............................
5. Si $x < 4$ alors ..............................
6. Si $x > -10$ alors ...........................
7. Si $x < 1$ alors ..............................
8. Si $x > -5$ alors ............................

**EXERCICE 13.2.**
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2 = 4$ ;
2. $x^2 = 5$ ;
3. $x^2 = 0$ ;
4. $x^2 = -2$ ;
5. $x^2 < 4$ ;
6. $x^2 \geqslant 9$ ;
7. $x^2 > -2$ ;
8. $x^2 \leqslant -3$ ;
9. $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$ ;
10. $-1 \leqslant x^2 \leqslant 9$ ;
11. $0 \leqslant x^2 \leqslant 8$ ;
12. $4 > x^2 > 1$.

### 13.3.2 Problèmes

**PROBLÈME 13.1.**
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x \leqslant x^2$
2. $x^3 \leqslant x^2$

**PROBLÈME 13.2.**
On donne les fonctions $f$, $g$ et $h$ suivantes :

- $f : x \mapsto x$ ;
- $g : x \mapsto x^2$ ;
- $h : x \mapsto x^3$.

Leurs courbes sont notées, respectivement, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.
Sur $[O ; +\infty[$, étudier les positions relatives :

1. de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$ ;
2. de $\mathscr{C}_g$ et de $\mathscr{C}_h$ ;
3. de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_h$.

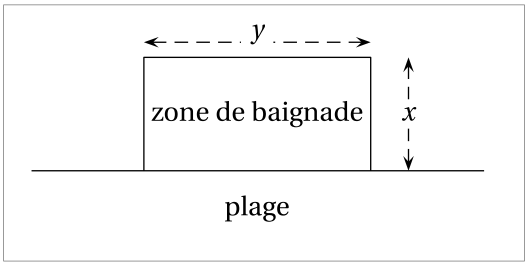
**PROBLÈME 13.3.**
Accoudée à son balcon, Morgan laisse échapper son téléphone portable.
La hauteur $h$ par rapport au sol, en mètre, à laquelle le téléphone se situe après $t$ secondes de chute est donnée par la relation : $h(t) = -4,90t^2 + 15$.

1. De quelle hauteur Morgan lâche-t-il son téléphone ?

2. Au bout de combien de temps passe-t-il au 3<sup>e</sup> étage situé à une hauteur de 9 mètres ?

3. Combien de temps s'écoule-t-il pour que le téléphone atteigne le sol ?

**PROBLÈME 13.4.**
Les maîtres nageurs d'une plage disposent d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel ils délimitent la zone de baignade surveillée, de forme rectangulaire.
Le problème est de déterminer les dimensions de ce rectangle pour que l'aire de baignade soit maximale.
On appelle $x$ la largeur du rectangle et $y$ sa longueur.




1. Expression de l'aire de la zone de baignade
   (a) Calculer l'aide de la zone de baignade lorsque $x = 50$ m et lorsque $x = 100$ m.
   (b) Quelles sont les valeurs posibles pour $x$ ?
   (c) Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprimer $y$ en fonction de $x$.
   (d) Exprimer, en fonction de $x$, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la zone de baignade. Sur quel intervalle cette fonction est-elle définie ?

2. Recherche graphique de l'aire maximale.
   (a) Représenter dans un repère aux unités bien choisies la courbe de $\mathscr{A}$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de $x$, l'aire semble-t-elle maximale ?

3. Recherche par le calcul de l'aire maximale.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0;400]$, $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$\mathscr{A}(x) = 20000 - 2(x-100)^2$$
   (b) Peut-on obtenir une aire de 22 000 m$^2$ ? Justifier.
   (c) Quelle est l'aire maximale qu'on peut obtenir ? Quelles sont alors les dimensions du rectangle ?

**PROBLÈME 13.5.**
Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto -x^3 + 4x$ et $g(x) = -x^2 + 4$. On a tracé sur le graphique 13.1 de la présente page les courbes représentatives de $f$ et de $g$.

1. Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier succintement.
2. Déterminer graphiquement le nombre de solution des équations :
   - $f(x) = 0$;
   - $g(x) = 0$;
   - $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre par le calcul : $f : (x) = 0$ et $g(x) = 0$
4. Résoudre graphiquement : $f(x) \leqslant g(x)$.
5. Un logiciel de calcul formel affiche les choses suivantes :

```
(%i1) factor(-x^3+x^2+4*x-4);
(%o1)       - (x - 2) (x - 1) (x + 2)
```

   (a) Interpréter ces deux lignes.
   (b) En déduire une résolution algébrique de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

FIGURE 13.1: Graphique de l'exercice 13.5