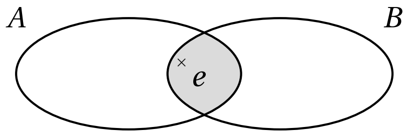
Chapitre 4

Rappels et compléments sur les probabilités Probabilités conditionnelles

Sommaire

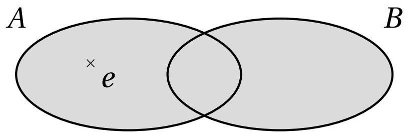
4.1 Vocabulaire des ensembles



> **Définition 4.1** (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
> On la note $A \cap B$.

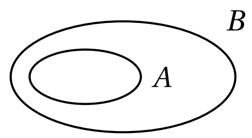
Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.



> **Définition 4.2** (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
> On la note $A \cup B$.

Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

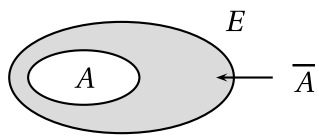


> **Définition 4.3** (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
> On note alors $A \subset B$ (« A inclus dans B ») ou $B \supset A$ (« B contient A »).

On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.



> **Définition 4.4** (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.

Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

> **Définition 4.5** (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*.
> Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

4.2 Expérience aléatoires

4.2.1 Issues, univers

> **Définition 4.6.** L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

Dans ce chapitre, Ω sera toujours un ensemble fini.

4.2.2 Évènements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2;3;\cdots;11;12\}$.
Le tableau 4.1 page ci-contre définit le vocabulaire relatif aux *évènements* (en probabilité).

TABLE 4.1: Vocabulaire relatif aux évènements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Évènement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3; 6; 9; 12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10; 11; 12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
Évènement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Évènement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un évènement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un évènement impossible.
Évènement certain (noté Ω)	C'est un évènement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un évènement certain.
Évènement « A et B » (noté $A \cap B$)	Évènement constitué des issues communes aux 2 évènements	$A \cap B = \{6; 12\}$
Évènement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Évènement constitué de toutes les issues des deux évènements	$A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$
Évènements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des évènements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Évènements contraires (l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux évènements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'évènement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

4.3 Fréquence

4.3.1 Définition

Définition 4.7. Soit une population de référence Ω et A une sous-population de Ω. La *fréquence de A dans Ω* est le nombre réel

$$f(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Ce nombre est aussi appelé la *proportion de A dans Ω*.
Lorsqu'il y a un risque de confusion sur l'ensemble de référence, on peut l'indiquer en indice : $f(A) = f_\Omega(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.

4.3.2 Fréquence et réunion

Propriété 4.1. *Soit A et B deux sous-population d'un ensemble de référence Ω. Alors :*

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

4.3.3 Fréquence et inclusion

Définition 4.8. Soit trois ensembles tels que $A \subset B \subset \Omega$. On appelle fréquence condtionnelle de A dans B, notée $f_B(A)$, la fréquence de A dans la sous-population B de Ω.

$$f_B(A) = \frac{card(A \cap B)}{card(B)}$$

Propriété 4.2. *Soit trois ensembles tels que $A \subset B \subset \Omega$. On a :*

$$f_B(A) = \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

On en déduit que :

Propriété 4.3. *Soit trois ensembles tels que $A \subset B \subset \Omega$ et $f_\Omega(B)$ et $f_B(A)$ les fréquences respectives de B dans Ω et de A dans B. Alors :*

$$f(A \cap B) = f_\Omega(A \cap B) = f_B(A) \times f_\Omega(B) = f_B(A) \times f(B)$$

4.4 Tableaux croisés

4.4.1 Tableau des effectifs

Lorsqu'on s'intéresse à deux caractères d'une population, par exemple le nombre d'admis au diplôme national du brevet en fonction du sexe du candidat, on peut les représenter à l'aide d'un tableau croisé :

Cas particulier :

	Admis	Recalés	Total
Garçons	3 117 779	47 905	365 684
Filles	346 187	27 262	373 449
Total	663 966	75 167	739 133

Plus généralement :

	A	$\overline{A}$	Total
G	$card\,(A \cap G)$	$card\left(\overline{A} \cap G\right)$	$card\,(G)$
$\overline{G}$	$card\left(A \cap \overline{G}\right)$	$card\left(\overline{A} \cap \overline{G}\right)$	$card\left(\overline{G}\right)$
Total	$card\,(A)$	$card\left(\overline{A}\right)$	$card\,(\Omega)$

4.4.2 Tableau des fréquences

En divisant les effectifs par l'effectif de l'ensemble de référence, on obtient le tableau des fréquences, celles des lignes et colonnes des totaux étant appelées *fréquences marginales*.

Cas particulier :

	Admis	Recalés	Total
Garçons	0,429 9	0,064 8	0,494 7
Filles	0,468 4	0,036 9	0,505 3
Total	0,898 3	0,101 7	1

Plus généralement :

	A	$\overline{A}$	Total
G	$f\,(A \cap G)$	$f\left(\overline{A} \cap G\right)$	$f\,(G)$
$\overline{G}$	$f\left(A \cap \overline{G}\right)$	$f\left(\overline{A} \cap \overline{G}\right)$	$f\left(\overline{G}\right)$
Total	$f\,(A)$	$f\left(\overline{A}\right)$	$f\,(\Omega)$

4.4.3 Tableau des fréquences conditionnelles

On peut dresser un tel tableau en y faisant apparaître les fréquences conditionnelles en ligne (les lignes sont alors indépendantes) ou en colonnes (les colonnes sont alors indépendantes.

En ligne

Cas particulier :

	Admis	Recalés	Total
Garçons	$\dfrac{317\,779}{365\,684} = 0{,}869\,0$	$\dfrac{47\,905}{365\,684} = 0{,}131\,0$	1
Filles	$\dfrac{346\,187}{373\,449} = 0{,}927\,0$	$\dfrac{27\,262}{373\,449} = 0{,}073\,0$	1

Plus généralement :

	A	$\overline{A}$	Total
G	$f_G\,(A)$	$f_G\left(\overline{A}\right)$	1
$\overline{G}$	$f_{\overline{G}}\,(A)$	$f_{\overline{G}}\left(\overline{A}\right)$	1

En colonne

Cas particulier :

	Admis	Recalés
Garçons	$\frac{317\,779}{663\,966}=0{,}4786$	$\frac{47\,905}{75\,167}=0{,}1310$
Filles	$\frac{346\,187}{663\,966}=0{,}9270$	$\frac{27\,262}{75\,167}=0{,}3627$
Total	1	1

Plus généralement :

	A	$\overline{A}$
G	$f_A(G)$	$f_{\overline{A}}(G)$
$\overline{G}$	$f_A\left(\overline{G}\right)$	$f_{\overline{A}}\left(\overline{G}\right)$
Total	1	1

4.5 Probabilités

4.5.1 Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 4.9. Soit $\Omega=\{\omega_1\,;\omega_2\,;\cdots;\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité p sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire w_i, des nombres $p_i\in[0\,;1]$, appelés *probabilités*, tels que :

- $\sum\limits_i p_i=p_1+p_2+\cdots+p_n=1$;
- la probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i=p(\{\omega_i\})=p(\omega_i)$.

Propriété 4.4. *Soit A et B deux évènements de Ω, alors :*

- $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$;
- $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'évènement certain est 1 alors la probabilité de l'évènement impossible, qui est son contraire, est 0.

4.5.2 Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 4.10. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un évènement A est la suivante :

Propriété 4.5. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout évènement élémentaire ω et tout évènement A on a :*

$$p(\omega)=\frac{1}{Card(\Omega)}$$

$$p(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

4.6 Probabilités conditionnelles

4.6.1 Activités

ACTIVITÉ 4.1 (Tirages avec ou sans remise)**.**
On dispose d'une urne opaque contenant des boules indiscernables au toucher. Deux tiers des boules sont noires et un tiers des boules sont blanches. On procède au tirage aléatoire de manière successive de deux boules et on s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues.

Partie A : Cas où l'urne contient trois boules.
On donnera les résultats arrondis au millième au besoin.

1. On procède à un tirage avec remise (on remet la première boule obtenue dans l'urne avant de procéder au second tirage).
   (a) Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation aléatoire.
   Quel est le nom de cette situation ?
   (b) Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. On procède à un tirage sans remise (on ne remet pas la première boule obtenue dans l'urne avant de procéder au second tirage).
   (a) Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation aléatoire.
   Est-ce la même situation que dans le cas précédent ?
   (b) Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
   La loi est-elle identique à celle du cas précédent ?

Partie B : Cas où l'urne contient trois cents boules.
On donnera les résultats arrondis au millième au besoin.

1. On procède à un tirage avec remise (on remet la première boule obtenue dans l'urne avant de procéder au second tirage).
   (a) Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation aléatoire.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. On procède à un tirage sans remise (on ne remet pas la première boule obtenue dans l'urne avant de procéder au second tirage).
   (a) Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation aléatoire.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
3. Que peut-on dire de ces deux lois ?

ACTIVITÉ 4.2.
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Femmes	76	92	50	218
Hommes	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

Les fiches de tous ces élèves sont rangées dans un carton et on choisit une fiche au hasard parmi les 350.
On appellera E, S, L, F et H les évènements respectifs « la fiche est celle d'un élève de 1 ES », « la fiche est celle d'un élève de 1 S », « la fiche est celle d'un élève de 1 L », « la fiche est celle d'une femme » et « la fiche est celle d'un homme ».

1. Déterminer $p(E \cap F)$ et interpréter le résultat.
2. Déterminer $p(F)$ et interpréter le résultat.
3. La probabilité de l'évènement « la fiche est celle d'un élève inscrit en section ES, **sachant qu**'il est une femme » est dite probabilité conditionnelle de l'évènement E sachant F et est notée $p_F(E)$.
   (a) Déterminer $p_F(E)$.
   (b) Comment aurait-on pu obtenir ce résultat à partir des deux précédents ?
   (c) Compléter le tableau 4.2 de la présente page en y indiquant les probabilités conditionnelles des différentes sections connaissant le sexe.

TABLE 4.2: Distribution des probabilités conditionnelles connaissant le sexe

	E	L	S	Total
F	$p_F(E) = \dfrac{76}{218}$			
H				

4.6.2 Bilan et compléments

Définition

Définition 4.11 (Probabilité conditionnelle)**.** Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties de cet univers, avec $A \neq \varnothing$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(B)$, est définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Propriété 4.6 (Formule des probabilités composées)**.** *Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties non vides de cet univers. Alors :*

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

Preuve. $p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ d'une part. $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$ d'autre part. ♢

Avec la situation de l'activité 4.2 on a :

- $p(E \cap F) = p_F(E) \times p(F) = \frac{76}{218} \times \frac{218}{350} = \frac{76}{350}$;
- $p(E \cap F) = p_E(F) \times p(E) = \frac{76}{119} \times \frac{119}{350} = \frac{76}{350}$.