# Chapitre 1

# Généralités sur les fonctions

## Sommaire



## 1.1 Activités d'introduction

Les activités seront choisies dans le manuel par le professeur.

## 1.2 Premières notions

### 1.2.1 Définition

**Définition 1.1** (Notion de fonction)**.** Une fonction est un procédé qui, à un élément $x$ d'un ensemble de départ, associe **au plus** un élément $y$ d'un ensemble d'arrivée.
On notera $f : x \mapsto y$ ou $f : x \mapsto f(x)$ qui se lit « $f$ est la fonction qui à $x$ associe $y$ (ou $f(x)$) »..
On dit que $y$ est *l'image* de $x$.
On dit que $x$ est *un antécédent* de $y$.

Si $x$ et $y$ sont des nombres, on dit que $f$ est une fonction *numérique*. Ce sera le cas de la plupart des fonctions que nous verrons.

**Définition 1.2** (Ensemble de définition)**.** L'ensemble des réels $x$ possédant une image par une fonction numérique $f$ est appelé *l'ensemble de définition de la fonction* $f$. On le note souvent $D_f$.

### 1.2.2 Représentation graphique

Les fonctions sont la plupart du temps définies soit par une expression algébrique soit par une courbe.

**Définition 1.3** (Représentation graphique)**.** Dans un plan muni d'un repère, la *représentation graphique* de la fonction $f$ est l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ du plan tels que :

- L'abscisse $x$ de $M$ décrit l'ensemble de définition $D_f$ ;
- L'ordonnée $y$ est l'image de $x$ par $f$ : $y = f(x)$.

On note souvent $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de $f$. On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.
Si la courbe est d'un seul « tenant » on parle de *courbe représentative* de la fonction $f$.

*Remarque.* L'équation permet de déterminer si un point $A(x_A; y_A)$ appartient ou pas à cette courbe. En effet, un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe. On a alors :

$$A \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$$

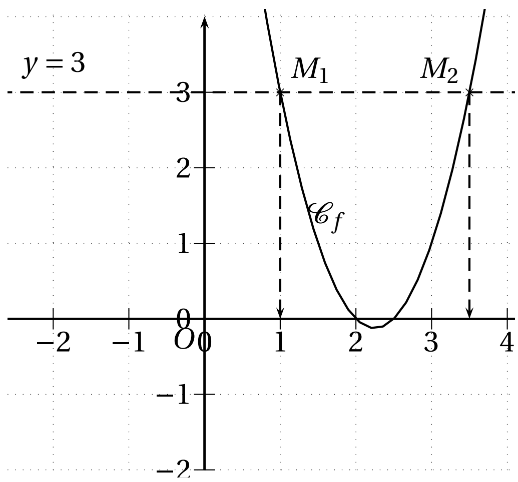
Dans la pratique, pour les fonctions numériques définies par une expression algébrique, pour esquisser une représentation graphique, on utilise souvent un tableau de valeurs.

### 1.2.3 Résolutions graphiques d'équations ou d'inéquations

**Résolutions d'équations de la forme $f(x) = k$**

Résoudre l'équation $f(x) = k$ c'est déterminer tous les antécédents éventuels d'un élément $k$ de l'ensemble d'arrivée, c'est-à-dire chercher tous les $x$ de l'ensemble de départ tels que $f(x) = k$.
Une telle recherche peut se faire graphiquement à partir de la représentation graphique de la fonction $f$.

**Exemple.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 2x^2 - 9x + 10$. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 3$.
On commence par tracer soigneusement la courbe représentative de $f$ et on obtient la représentation donnée sur la figure ci-contre.
On cherche les points de la courbe ayant pour ordonnée 3.
Pour cela on peut tracer la droite d'équation $y = 3$ et chercher les points d'intersection de cette droite avec la courbe de $f$.
On obtient ici deux points $M_1(1;3)$ et $M_2\left(\frac{7}{2};3\right)$. Les solutions sont leurs abscisses : 1 et $\frac{7}{2}$.
On écrit : « Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont $x = 1$ ou $x = \frac{7}{2}$ car les points de la courbe de $f$ d'ordonnée 3 ont pour abscisses 1 et $\frac{7}{2}$ ».



**Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$**

Ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :

- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ dan un repère (orthogonal) ;
- on trace la droite d'équation $y = k$ ;
- on recherche les points de la courbe situés *sous* la droite ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

**Exemple.** Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant 3$, après avoir tracé $y = 3$ on constate que les points de la courbe situés sous cette droite ont leurs abscisses comprises entre 0 et $\frac{5}{2}$.
Donc $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$.

*Remarque.*

- On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant k$.

  On retient alors les abscisses des points situés *au-dessus* de la droite d'équation $y = k$.

  Dans l'exemple $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 0\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$.
- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > k$ ou $f(x) < k$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.

  Dans l'exemple $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{5}{2}\right[$.

## 1.3 Fonctions affines – Équations réduites de droites

**Définition 1.4.** Soit $m$ et $p$ deux réels. Une fonction *affine* $f$ est une fonction qui à tout réel $x$ associe $f(x) = mx + p$.

*Remarques.*

- Lorsque $p = 0$, la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx$ est une fonction affine dite *linéraire*;
- Lorsque $m = 0$, la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = p$ est une fonction affine dite *constante*.

**Propriété 1.1.** *Soit $f$ la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.*
*La représentation graphique de $f$ est une droite $\mathscr{D}$ qui coupe l'axe des ordonnées en* $(0; p)$.
*$m$ est appelé* coefficient directeur *de la droite $\mathscr{D}$.*
*$p$ est appelé* ordonnée à l'origine *de la droite $\mathscr{D}$.*
*On dit que la droite $\mathscr{D}$* a pour équation $y = mx + p$.

*Remarques.*

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère ;
- La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses ;
- Pour tracer une droite, on peut déterminer les coordonnées de deux de ses points, les plus éloignés possibles pour plus de précision dans le tracé.

**Propriété 1.2.** *Soit $f$ la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.*
*Pour tous réels $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1 \neq x_2$. Alors $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et $p = f(x_1) - mx_1$.*

De cette proprité découle la suivante :

**Propriété 1.3.** *Soit $\mathscr{D}$ une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Alors cette droite admet une unique équation de la forme $y = mx + p$ dite* équation réduite *de la droite et si $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ sont deux points distincts de la droite, alors $m = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ et $p = y_A - mx_A$.*

# 1.4 Taux de variation

## 1.4.1 Définition

**Définition 1.5.** Soit $f$ une fonction (numérique) définie sur un intervalle $I$, et soit $a$ et $b$ deux nombres distincts appartenant à $I$. Le *taux de variation* de $f$ entre $a$ et $b$ est le nombre réel

$$\tau(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*Remarques.*

- $\tau$ se lit « *tau* » ;
- on le nomme parfois *taux d'accroissement*
- on parle aussi bien de taux de variation de $f$ entre $a$ et $b$ que de taux de variation de $f$ sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

## 1.4.2 Interprétation géométrique

Le taux de variation est aussi le coefficient directeur, appelé parfois pente, de la droite passant par les points $A(a\,;\,f(a))$ et $B(b\,;\,f(b))$.

# 1.5 Monotonie et signe du taux de variation

## 1.5.1 Monotonie – Sens de variation

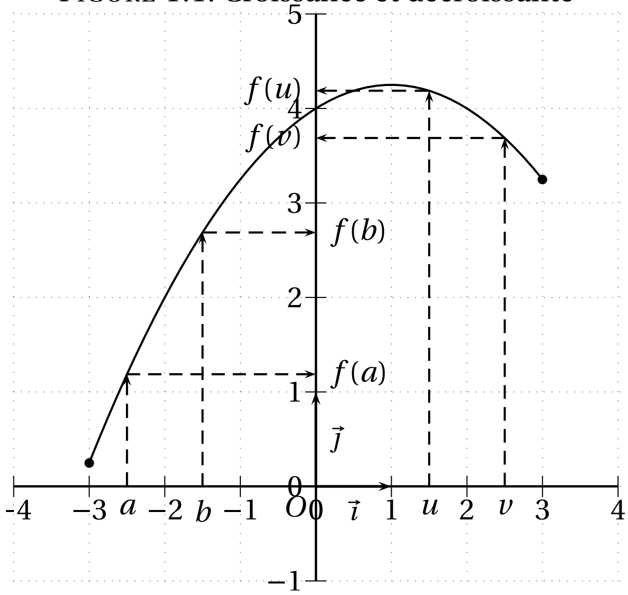
Il s'agit de traduire mathématiquement qu'une fonction « augmente » ou « diminue ».

**Exemple.** Soit, par exemple, la fonction définie sur $[-3;3]$ par la courbe représentative donnée sur la figure 1.1 page ci-contre. On constate que lorsque $x \in [-3;1]$ , si $x$ augmente, $f(x)$ augmente aussi alors que lorsque $x \in [1;3]$, si $x$ augmente, $f(x)$ diminue.
C'est la définition mathématique de la croissance ou de la décroissance d'une fonction $f$.

**Définition 1.6.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est

- *strictement croissante* sur $I$ si, pour tous réels $a$ et $b$ de $I$, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- *strictement décroissante* sur $I$ si, pour tous réels $a$ et $b$ de $I$, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
- *constante* sur $I$ si, pour tous réels $a$ et $b$ de $I$, on a : $f(a) = f(b)$.

FIGURE 1.1: Croissance et décroissante




*Remarque.* Lorsque $f$ est croissante, $a$ et $b$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont dans le même ordre; on dit de $f$ qu'elle conserve l'ordre.
Lorsque $f$ est décroissante, $a$ et $b$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont dans un ordre inverse; on dit de $f$ qu'elle inverse l'ordre.

**Définition 1.7.** Si $f$ ne change pas de sens de variation sur $I$, c'est-à-dire si elle y reste strictement croissante ou décroissante, on dit que $f$ est *monotone*.

### 1.5.2 Taux de variation et sens de variation

**Propriété 1.4.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. Si, pour tous nombres distincts $a$ et $b$ appartenant à $I$ :*

- $\tau(a,b) > 0$ *alors $f$ est strictement croissante sur $I$ ;*
- $\tau(a,b) < 0$ *alors $f$ est strictement décroissante sur $I$ ;*
- $\tau(a,b) = 0$ *alors $f$ est constante sur $I$.*

La preuve sera faite en classe.

## 1.6 Exercices

Les exercices seront choisis dans le manuel par le professeur.