Chapitre 13

Relations métriques dans le triangle

Sommaire

13.1 Formule d'AL-KASHI 133

13.2 Formule de l'aire 133

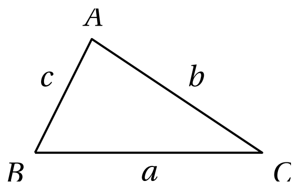
13.3 Formule des sinus 134

13.4 Formule de HÉRON 134

13.5 Exercices 135

13.1 Formule d'AL-KASHI

Dans ce paragraphe et dans les suivants, on parle d'un triangle ABC non aplati dont on note les longueurs $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et S son aire.



Théorème 13.1 (Formule d'AL-KASHI)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut, on a*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

La preuve sera faite en classe.

Remarques.

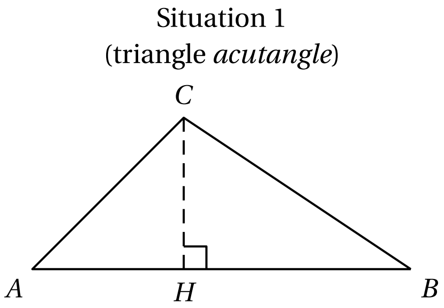
- Si le triangle est rectangle en A, on retrouve le théorème de PYTHAGORE qui n'en est qu'un cas particulier. La formule d'AL-KHASI s'appelle aussi *Pythagore généralisé.*
- En permutant les côtés et les angles, on a aussi :
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

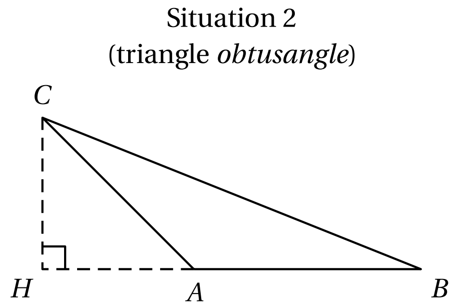
13.2 Formule de l'aire

Propriété 13.2 (Formule de l'aire)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut :*

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Preuve. Deux situations sont à considérer :





L'aire du triangle est donnée par : $S = \frac{1}{2} AB \times CH$.
Or $CH = AC \sin \widehat{A}$ (situation 1) ou $CH = AC \sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = AC \sin \widehat{A}$ (situation 2).
Dans les deux cas, $S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$.
En permutant, on obtient les deux autres égalités. ♢

13.3 Formule des sinus

Propriété 13.3 (Formule des sinus)**.** *Avec les conventions de notation vues plus haut :*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Preuve. D'après ce qui précède, on a : $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$.
En multipliant par $\frac{2}{abc}$, on obtient $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$.
Le triangle étant non aplati, les angles sont non nuls et les sinus de ces angles aussi, on peut donc inverser ces quotients : $\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ ♢

Exemple. Soit ABC un triangle tel que $c = AB = 5$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$ et $\widehat{B} = 30^\circ$.
Alors $\widehat{C} = 180 - 40 - 30 = 110^\circ$et, comme $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$, on obtient $\frac{a}{\sin 40} = \frac{b}{\sin 30} = \frac{5}{\sin 110}$ puis $a \approx 3{,}42$ cm et $b \approx 2{,}66$ cm.

13.4 Formule de HÉRON

Propriété 13.4 (Formule de HÉRON)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut et en notant p le demi-périmètre du triangle ($2p = a + b + c$), on a :*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

On l'admettra.

13.5 Exercices

EXERCICE 13.1.
ABC est un triangle tel que $a=2$, $b=3$ et $c=4$. Calculer la valeur exacte de l'aire S de ABC.

EXERCICE 13.2.
ABC est un triangle tel que $b=3$, $c=8$ et $\widehat{A}=60^\circ$. Calculer la valeur exacte de a ainsi que les mesures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

EXERCICE 13.3.
ABC est un triangle tel que $b=6\sqrt{2}$, $\widehat{A}=105^\circ$ et $\widehat{C}=45^\circ$. Calculer les valeurs exactes de a et c.

EXERCICE 13.4.
ABC est un triangle tel que $BC=4$, $\widehat{B}=\frac{\pi}{4}$ rad et $\widehat{C}=\frac{\pi}{3}$ rad.

1. Montrer que $\sin\widehat{A}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. Calculer les valeurs exactes de AB et AC.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC

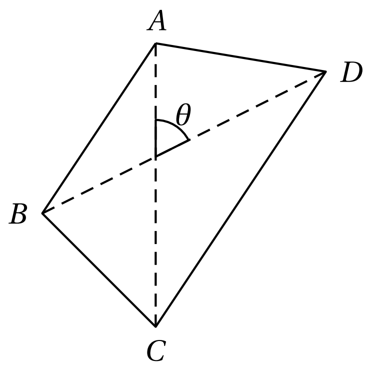
EXERCICE 13.5.
ABC est un triangle tel que $S=5$ cm^2, $c=AB=13$ cm et $b=AC=2$ cm. Calculer la (ou les) longueur(s) possible(s) du troisième côté $a=BC$.

EXERCICE 13.6.
ABC est un triangle tel que $AB=7$, $AC=4$ et $\widehat{A}=60^\circ$.

1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer la valeur exacte de $\sin\widehat{B}$.

EXERCICE 13.7.
$ABCD$ est un quadrilatère convexe. On note θ l'angle entre ses deux diagonales (AC) et (BD). Démontrer que l'aire S du quadrilatère $ABCD$ est donnée par :

$$S=\frac{1}{2}\times AC\times BD\sin\theta$$



EXERCICE 13.8.
Un promeneur marche 5 km en direction de l'Est, puis 2 km en direction du Nord-Est. Surpris par le mauvais temps, il retourne directement à son point de départ en courant.
Sur quelle distance d a-t-il couru ? (On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10 m).

EXERCICE 13.9.
Montrer que « ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \sin^2\widehat{A}=\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}$ ».