

Devoir surveillé n°8

Suites – Exponentielle – Variables aléatoires

Le devoir est sur 27,5 points selon le barème provisoire.

EXERCICE 8.1 (3 points).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Dans cet exercice, pour chacune des questions, plusieurs réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Chaque bonne réponse rapporte un point, une question sans réponse ou avec une réponse fausse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Soit a un réel; l'expression $\frac{2e^{a-1}}{(e^a)^2}$ est égale à :

☐ 1

☐ $2e^{3a-1}$
☐ e^{-2}
☐ $\frac{2}{e^{a+1}}$

2. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

☐ $-e^{\frac{1}{a}}$
☐ $\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$
☐ $\frac{1}{e^a}$
☐ e^a

3. Pour tout réel a , le nombre réel $e^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

☐ $\sqrt{e^a}$
☐ $\frac{e^a}{2}$
☐ $\frac{e^a}{e^2}$
☐ $e^{\sqrt{a}}$

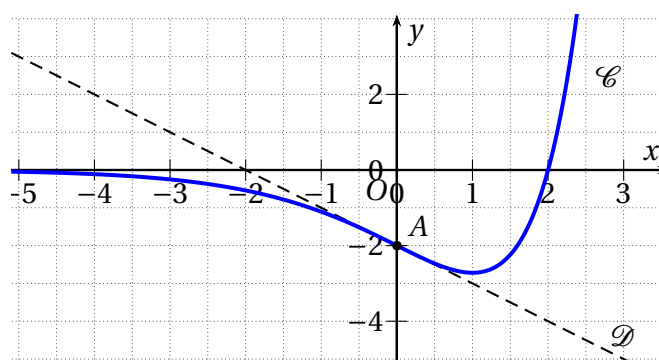
EXERCICE 8.2 (5 points).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (x-2)e^x$ dont on donne un extrait de la courbe ci-contre, agrémenté de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(0; -2)$ en pointillés.

Cette courbe ne pourra pas être utilisée comme justification mais elle peut aider à vérifier ses résultats.

1. (a) Montrer que $f'(x) = (x-1)e^x$.
- (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- (c) Dresser le tableau des variations de f (on indiquera la valeur exacte du minimum).

2. Donner une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.



EXERCICE 8.3 (4 points).

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f : x \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-x}$.
2. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels. On indiquera les valeurs exactes des extremums.

EXERCICE 8.4 (3,5 points).

On lance deux fois de suite un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On obtient un couple de deux nombres $(a; b)$ et l'ensemble de l'univers Ω est composé des 36 couples différents possibles. La loi de probabilité associée est équirépartie.

On crée la variable aléatoire X qui, à chacun de ces couples $(a; b)$ de Ω , associe le plus grand des deux nombres (ou le nombre obtenu si jamais il y a égalité).

1. Donner $X(\Omega)$
2. Donner la loi de X sous la forme d'un tableau.
3. Calculer la valeur exacte de $E(X)$, l'espérance mathématique de X , en détaillant son calcul (pointillés autorisés), et interpréter sa valeur approchée à une décimale dans le contexte de l'expérience aléatoire.

EXERCICE 8.5 (8 points).

Deux roues de fêtes foraines proposent 8 secteurs équiprobables.

On paye une certaine somme pour avoir le droit de jouer et on tourne la roue qui s'arrête aléatoirement sur un secteur et, selon la couleur du secteur sur laquelle la roue s'arrête, on nous verse de l'argent.

Roue A : Elle est composée de 5 secteurs de couleur rouge, 2 secteurs de couleur orange et un secteur de couleur verte.

La partie coûte 2 €.

Si la roue s'arrête sur un secteur :

Rouge : on ne nous verse rien (donc on a perdu 2 €);

Orange : on nous verse 3 € (donc on a gagné 1 €);

Vert : on nous verse 6 € (donc on a gagné 4 €).

Roue B : Elle est composée de 3 secteurs de couleur rouge, 3 secteurs de couleur orange et deux secteurs de couleur verte.

La partie coûte 4 €.

Si la roue s'arrête sur un secteur :

Rouge : on ne nous verse rien (donc ...);

Orange : on nous verse 4 € (donc ...);

Vert : on nous verse 8 € (donc ...).

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain final par partie de la roue A et Y celle donnant celui de la roue B .

1. Déterminer la loi de X , son espérance $E(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$. *On détaillera les calculs, pointillés autorisés. On arrondira au dixième au besoin.*
2. Déterminer la loi de Y , $E(Y)$ et $\sigma(Y)$. *On ne détaillera pas les calculs. On arrondira au dixième au besoin.*
3. Comparer ces deux jeux en se basant sur ces résultats.

EXERCICE 8.6 (7 points).

On arrondira ses résultats au centime d'euro en cas de besoin.

La location annuelle d'une maison se monte à 7 000 €. Le locataire s'engage à louer durant 7 années complètes. Le propriétaire lui propose deux contrats :

Contrat A : Le locataire accepte chaque année une augmentation de 5 % du loyer de l'année précédente;

Contrat B : Le locataire accepte chaque année une augmentation forfaitaire de 400 €.

1. **Étude du contrat A**

On appelle A_n le montant du loyer de la n -ième année avec le contrat A. On a donc $A_1 = 7\,000$.

- Justifier de (A_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .
- Donner l'expression de A_n en fonction de n et calculer le loyer de la 7^e année.
- Calculer la somme payée, au total, au bout de 7 années de location.

2. **Étude du contrat B**

On appelle B_n le montant du loyer de la n -ième année avec le contrat B. On a donc $B_1 = 7\,000$.

- Indiquer la nature de la suite (B_n) .
- Donner l'expression de B_n en fonction de n et calculer le loyer de la 7^e année.
- Calculer la somme payée, au total, au bout de 7 années de location.

3. **Choix entre les deux contrats**

À l'aide des questions précédentes, déterminer quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire pour ces 7 années.

4. **Allons plus loin**

On donne la fonction *LaFonction* suivante, qui se lance sans argument, dont les lignes sont numérotées, écrite en Python :

```

10 def LaFonction() :
20     u = 7000
30     v = 7000
40     n = 1
50     while u <= v :
60         n = n + 1
70         u = u * 1.05
80         v = v + 400
90     return n

```

- Indiquer la valeur qu'elle renvoie et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Indication : on pourra l'implémenter dans sa calculatrice, ou la faire fonctionner à la main à l'aide d'un tableau

du type fourni ci-dessous qu'on complètera au fur et à mesure.

u	v	n	$u \leq v ?$
7 000	7 000	1	Oui
⋮	⋮	⋮	⋮

Dans tous les cas aucune justification n'est attendue : juste la valeur du résultat et son interprétation.

- Question bonus (hors barème) :** Indiquer quelles lignes seraient à modifier ou à ajouter et à quelle place (en s'aidant des numéros de ligne) de façon à obtenir une fonction qui renverrait le nombre d'années nécessaires pour que la somme des loyers du contrat A dépasse celle du contrat B et donner quelle serait la valeur retournée.

EXERCICE 8.7 (7 points).

À l'automne 2010, Claude a acheté une maison à la campagne où il dispose de $1\,500\text{ m}^2$ entièrement engazonné. Depuis il a pu établir que tous les ans 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude n'aime pas la mousse, aussi, à chaque automne il l'arrache sur une surface de 50 m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2 .
 (b) La suite (u_n) est-elle arithmétique? Est-elle géométrique? *On justifiera.*
2. Justifier (par une phrase brève) que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.
 (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 (b) Exprimer v_n en fonction de n .
 En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.
 (c) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
4. **Question bonus (hors barème) :** *Pour cette question, toute trace de recherche ou de résultat même partiel sera valorisée.*
 Est-il possible que plus des deux tiers du terrain soient envahis par la mousse? Et la totalité?