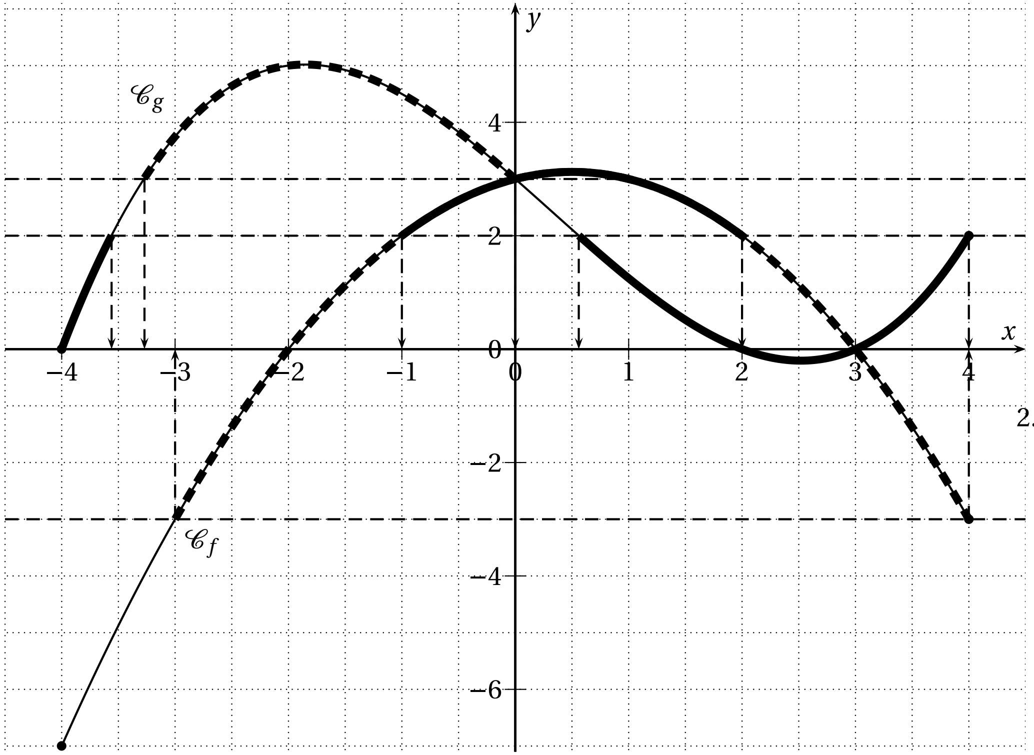
Un corrigé du devoir surveillé n°8

EXERCICE 8.1 (6,5 points)**.**
Sur la figure ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions toutes les deux définies sur $[-4\,;4]$.



Avec la précision permise par le graphique et sans justifier :

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

(a) $f(x) \geqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-1\,;2]$ (abscisses des points indiqués par la ligne en trait plein sur la courbe de f) ;

(b) $f(x) > -3 \Leftrightarrow x \in]-3\,;4[$ (abscisses des points indiqués par la ligne en trait pointillé sur la courbe de f) ;

(c) $g(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-4\,;3,6] \cup [0,6\,;4]$ (abscisses des points indiqués par la ligne en trait plain sur la courbe de g) ;

(d) $g(x) > 3 \Leftrightarrow x \in]-3,27\,;0[$ (abscisses des points indiqués en trait pointillé sur la courbe de g) ;

(e) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in \{0\,;3\}$ (abscisses des points d'intersection des deux courbes) ;

(f) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in]0\,;3[$ (abscisses des points où la courbe de f est au-dessus de celle de g).

2. Dresser pour chacune de ces fonctions son tableau de signe en fonction des valeurs de x.

x	-4		-2		3		4
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	-4		2		3		4
Signe de $g(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Dresser pour chacune de ces fonctions son tableau des variations.

x	-4		$0,5$		4
			$\approx 3,1$		
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	
	-7				-3

x	-4		$\approx -1,9$		$\approx 2,5$		4
			≈ 5				2
Variations de g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				$\approx -0,2$		

EXERCICE 8.2 (4,5 points)**.**
Chacune des trois fonctions suivantes est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de chacune d'entre elles.

- $f : x \longmapsto x^2 + 4$

  $f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$. Comme par ailleurs son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, f est une fonction paire.

- $g : x \longmapsto x^3 + x - 3$

  $g(-x) = (-x)^3 + (-x) + 3 = -x^3 - x - 3$. Beaucoup ont alors cru que $g(-x) = -g(x)$ or ce n'est pas le cas ; en effet $-g(x) = -(x^3 + x - 3) = -x^3 - x + 3 \neq x^3 - x - 3$. On a donc $g(-x) \neq g(x)$ et $g(-x) \neq -g(x)$ donc g n'est ni paire ni impaire.
  Une autre façon de s'en rendre compte est de calculer sur un exemple. Prenons $x = 2$. $g(2) = 8 + 2 - 3 = 7$, $g(-2) = -8 - 2 - 3 = -10$ donc $g(-2) \neq g(2)$ et $g(-2) \neq -g(2)$ donc ces deux contre-exemples suffisent à montrer qu'elle n'est ni paire ni impaire.

- $h : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$

  $h(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -h(x)$. Comme par ailleurs son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, h est une fonction impaire.

EXERCICE 8.3 (5 points)**.**
On donne le tableau des variations d'une fonction f :

x	-4		2		3		6		10
	-1						1		
f		$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	
			-2						0

Dans chacun des cas suivants, comparer, lorsque c'est possible, les deux quantités proposées (en utilisant les signes « = », « > » ou « < ») ou, lorsqu'il est impossible de les comparer, indiquer une croix (« X »).

1. En justifiant :

   - $f(-3) > f(0)$; en effet : -3 et 0 sont tous les deux dans l'intervalle $[-4 ; 2]$ sur lequel la fonction f est décroissante. Comme $-3 < 0$ et que la fonction est décroissante, elle inverse l'ordre, donc $f(-3) > f(0)$.
   - $f(5) > f(4)$; en effet : 5 et 4 sont tous les deux dans l'intervalle $[3 ; 6]$ sur lequel la fonction f est croissante. Comme $4 < 5$ et que la fonction est croissante, elle converse l'ordre, donc $f(4) < f(5)$.

2. Sans justifier :

- $f(7)$ X $f(5)$; en effet : en 6 la fonction f change de sens de variation, on ne peut donc savoir lequel des deux est le plus grand.
- $f(-1) < f(9)$; en effet : $-1 > f(-1) > -2$ tandis que $1 > f(9) > 0$ donc $f(9)$ est le plus grand.
- $f(3) = f(10) = 0$
- $-3 < f(-2)$; en effet $-1 > f(-2) > -2$ donc il est plus grand que -3.

Exercice 8.4 (10,5 points)**.**
Le plan est muni d'un repère.

1. (a) On donne $A(1;2)$ et $B(3;-1)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1 = (AB)$

   $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;\, y_B - y_A) = (2\,;-3) = (-b\,;\, a)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ donc $\mathscr{D}_1$ admet, parmi d'autres, une équation de la forme $ax + by + c = 0$ donc, ici, $-3x - 2y + c = 0$.
   Comme $A \in \mathscr{D}_1$ alors $-3x_A - 2y_A + c = 0 \Leftrightarrow -3 - 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = 7$.
   Finalement une équation de $\mathscr{D}_1$ est $-3x - 2y + 7 = 0$.

   (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_2$ sachant qu'elle passe par $C(-2;0)$ et qu'elle est parallèle à $\mathscr{D}_1$.

   Étant parallèle à $\mathscr{D}_1$ elle admet, parmi d'autres, une équation de la forme $-3x - 2y + c = 0$.
   Comme $C \in \mathscr{D}_2$ alors $-3x_C - 2y_C + c = 0 \Leftrightarrow 6 + 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$.
   Finalement une équation de $\mathscr{D}_2$ est $-3x - 2y - 6 = 0$.

   (c) La droite $\mathscr{D}_3 : 4,5x + 3y + 1 = 0$ est-elle parallèle aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$?

   $4,5x + 3y + 1 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ donc on sait qu'un vecteur directeur de $\mathscr{D}_3$ est $\vec{u}(-b\,;\, a) = (-3\,;\, 4,5) = (X\,;\, Y)$, tandis que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ admettent comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (2\,;-3) = (X'\,;\, Y')$.
   $\det\left(\vec{u}\,;\, \overrightarrow{AB}\right) = XY' - X'Y = -3 \times (-3) - 2 \times 4,5 = 9 - 9 = 0$. Ces vecteurs sont donc colinéaires et $\mathscr{D}_1 \parallel \mathscr{D}_2 \parallel \mathscr{D}_3$.

2. On donne $\mathscr{D}_4 : 2x - y = 2$ et $\mathscr{D}_5 : 4x - 5y = -8$.

   (a) Montrer que les droites $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$ sont sécantes.

   $2x - y = 2$ est de la forme $ax + by = c$ donc on sait qu'un vecteur directeur de $\mathscr{D}_4$ est $\vec{v}(-b\,;\, a) = (1\,;\, 2) = (X\,;\, Y)$.
   $4x - 5y = -8$ est de la forme $ax + by = c$ donc on sait qu'un vecteur directeur de $\mathscr{D}_5$ est $\vec{w}(-b\,;\, a) = (5\,;\, 4) = (X'\,;\, Y')$.
   $\det(\vec{v}\,;\, \vec{w}) = XY' - X'Y = 1 \times 4 - 5 \times 2 = -6 \neq 0$ donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux droites ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

   (b) Déterminer les coordonnées de E, leur point d'intersection.

   $$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 5y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = y \\ 4x - 5(2x-2) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$
   $$\begin{cases} 2x - 2 = y \\ 4x - 10x + 10 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = y \\ -6x = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = y \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$
   $$\begin{cases} 2 \times 3 - 2 = y \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$
   Les coordonnées de E sont donc $(3;4)$.

3. Tracer les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$ dans le repère de la figure 8.1 page 116.

On ne détaillera pas ici toutes les petites résolutions qui nous permettent à partir d'un x donné de trouver le y correspondant.

- $\mathscr{D}_1$: Deux points sont donnés dans l'énoncé puisque c'est la droite (AB) : $A(1;2)$ et $B(3;-1)$.
- $\mathscr{D}_2$: Elle est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et passant par C donc on peut la tracer avec un traceur de parallèle.
- $\mathscr{D}_3$: Elle est parallèle aux précédentes. Cherchons-en un point. Si $x=0$ alors $y=-\frac{1}{3}$ ce qui nous donne le point $(0;-\frac{1}{3})$ qui n'est pas facile à placer précisément mais nous nous en contenterons.
- $\mathscr{D}_4$: Cette droite passe par $E(3;4)$. Si $x=0$ alors $y=-2$. Elle passe donc aussi par $(0;-2)$.
- $\mathscr{D}_5$: Cette droite passe par $E(3;4)$. Si $y=0$ alors $x=-2$. Elle passe donc aussi par $(-2;0)$.

On peut alors les tracer.

Exercice 8.5 (8,5 points)**.**
Le plan est muni d'un repère fourni par la figure 8.2 page suivante.

1. Dans le repère fourni, tracer les droites :
   - $\mathscr{D}_1 : y=2x-1$;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par le point $A(1;2)$ et de coefficient directeur $m=-\frac{2}{3}$.

   - $\mathscr{D}_1$ est de la forme $y=mx+p$ donc elle passe par le point $(0;p)=(0;-1)$. Par ailleurs $m=2=\frac{2}{1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ donc à partir du point précédent, pour trouver un second point, on augmente x de 1 et y de 2.
   - $\mathscr{D}_2$ passe par $A(1;2)$ et $m=-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ donc à partir de A, pour trouver un second point, on augmente x de 3 et on diminue y de 3.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}_2$ de la question 1.

   $\mathscr{D}_2 : y=mx+p$.
   On sait déjà que $m=-\frac{2}{3}$ donc $\mathscr{D}_2 : y=-\frac{2}{3}x+p$.
   Comme $A\in\mathscr{D}_2$, $p=y_A-m\times x_A=2-\left(-\frac{2}{3}\right)\times 1=\frac{8}{3}$.
   Donc $\mathscr{D}_2 : y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$.

3. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}_3$ sachant qu'elle passe par les points $B(4;3)$ et $C(-4;1)$.

   Comme $x_B\neq x_C$, $\mathscr{D}_3 : y=mx+p$.
   $m=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{3-1}{4-(-4)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.
   $p=y_B-mx_B=3-\frac{1}{4}\times 4=2$.
   Donc $\mathscr{D}_3 : y=\frac{1}{4}x+2$

4. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}_4$ sachant qu'elle passe par $E(5;2)$ et q'elle est parallèle à la droite $\mathscr{D}_1$ de la question 1.

   Comme $\mathscr{D}_1$ a une équation réduite, $\mathscr{D}_4$ aussi donc $\mathscr{D}_4 : y=mx+p$.
   Comme elle est parallèle à $\mathscr{D}_1$ les deux droites ont le même coefficient directeur donc $m=2$.
   $p=y_E-mx_E=2-2\times 5=-8$.
   Donc $\mathscr{D}_4 : y=2x-8$

5. Déterminer, sans justifier, les équations réduites des droites $\mathscr{D}_5$, $\mathscr{D}_6$ et $\mathscr{D}_7$ représentées dans le repère.

   - $\mathscr{D}_5 : y=mx+p$.
     $(0;5)=(0;p)\in\mathscr{D}_5$ donc $p=5$.
     $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{1}=-2$
     Donc $\mathscr{D}_5 : y=-2x+5$.
   - $\mathscr{D}_6 : y=mx+p$.
     $(0;2)=(0;p)\in\mathscr{D}_6$ donc $p=2$.
     $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{4}$
     Donc $\mathscr{D}_6 : y=\frac{1}{4}x+2$. $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{1}=-2$
     Donc $\mathscr{D}_6 : y=-2x+5$.
   - $\mathscr{D}_7 : y=mx+p$.
     $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{3}$
     $(1;-4)\in\mathscr{D}_7$ donc $p=-4-\frac{2}{3}\times 1=-\frac{14}{3}$.
     Donc $\mathscr{D}_7 : y=\frac{2}{3}x-\frac{14}{3}$.

FIGURE 8.1: Figure de l'exercice 8.4

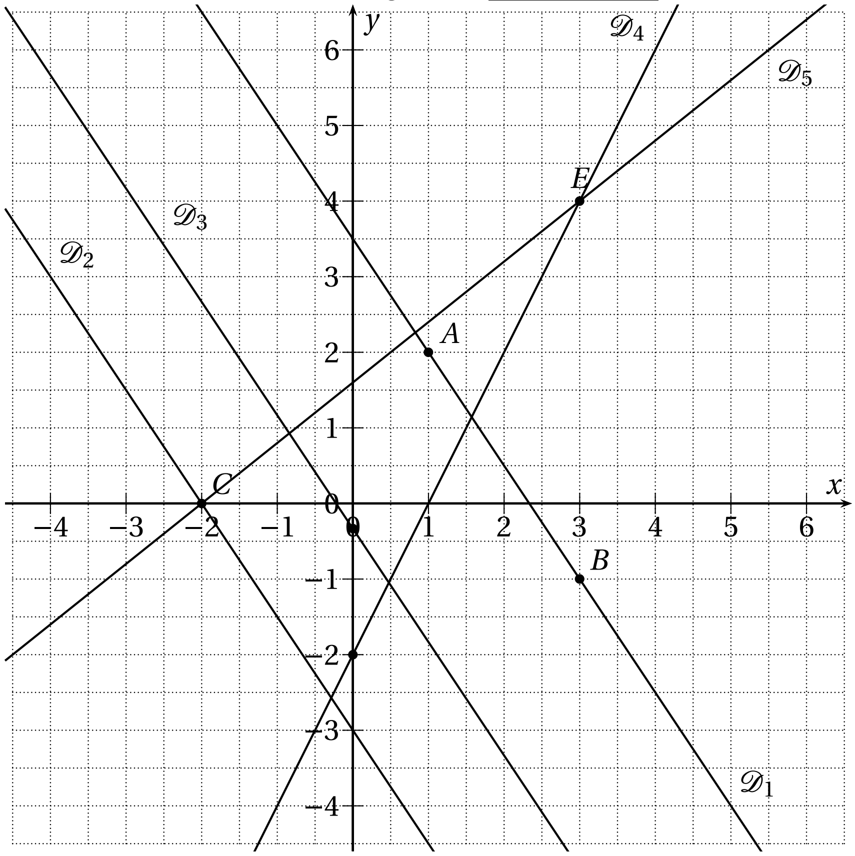


FIGURE 8.2: Figure de l'exercice 8.5