Chapitre 11

Fonctions affines

Sommaire

11.1 Activité d'introduction **95**

11.2 Bilan et compléments **96**

11.3 Exercices et problèmes **97**

11.3.1 Exercices 97

11.3.2 Problèmes 98

11.1 Activité d'introduction

ACTIVITÉ 11.1.
Trois taxis T_1, T_2 et T_3 proposent les tarifs suivants :

- T_1 : 5 € de prise en charge, puis 0,40 € du kilométre ;
- T_2 : 4 € de prise en charge, puis 0,50 € du kilométre ;
- T_3 : 7 € de prise en charge, puis 0,30 € du kilométre ;

1. Quel est le taxi le plus économique pour un trajet de
   - 5 km ?
   - 10 km ?
   - 15 km ?
2. On note x la distance que veut parcourir un client en taxi. Exprimer les tarifs $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ des taxis T_1, T_2 et T_3 en fonction de x.
3. Représenter dans le repère 11.1 page suivante les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ des fonctions f_1, f_2 et f_3.
4. En vous basant sur le graphique, indiquez pour quelles distances il est plus économique de prendre le taxi T_1, la taxi T_2 ou le taxi T_3. *On donnera les réponses sous forme d'intervalle.*
5. Un client désire faire plus de 20 km, et choisira le taxi T_3. Il vous charge étudier le coût de son trajet en fonction de la distance x.
   (a) Compléter le tableau 11.1 page suivante
   (b) La distance et le coût sont-ils des grandeurs proportionnelles ?
   (c) À l'aide du tableau précédent conjecturer de combien augmente le coût lorsque la distance augmente de :

- 1 km
- 2 km
- 5 km

(d) Que peut-on dire alors des grandeurs « augmentation de la distance » et « augmentation du coût » ?

FIGURE 11.1: Repère de l'activité 11.1

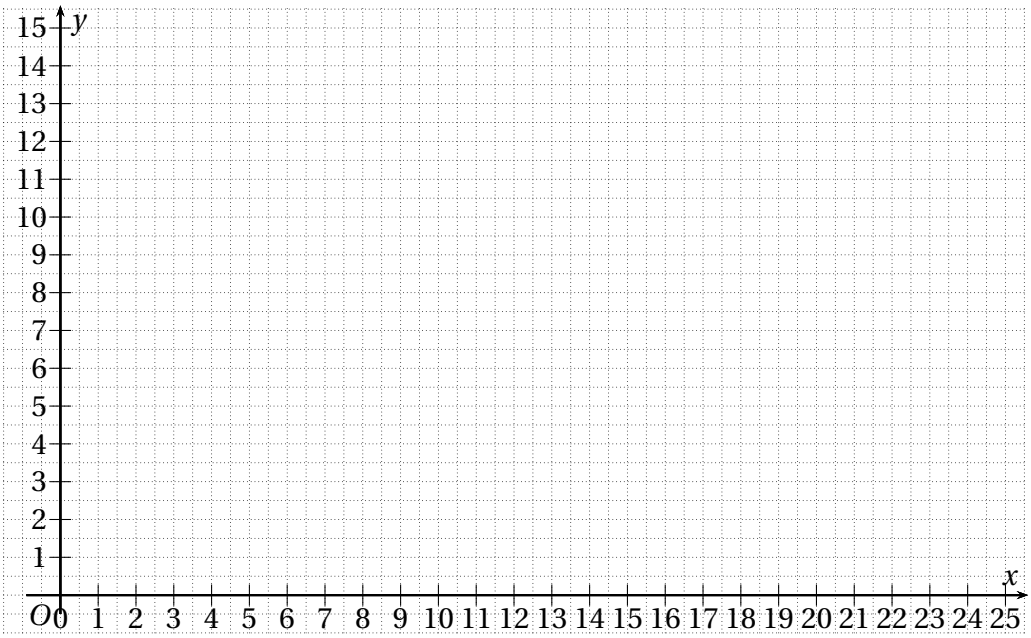


TABLE 11.1: Tableau de l'activité 11.1

Distance x	20	21	22	23	24	25	30	40	50
Coût $f_3(x)$									

11.2 Bilan et compléments

Définition 11.1. Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme

$$f(x) = mx + p \text{ où } m \text{ et } p \text{ sont des réels}$$

sont appelées *fonctions affines.*
Cas particuliers :

- si $m = 0$ alors $f : x \mapsto p$ est dite *constante*;
- si $p = 0$ alors $f : x \mapsto mx$ est dite *linéaire.*

Propriété 11.1. *La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite. Celle d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.*

La preuve sera faite en classe.

Propriété 11.2. *Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.*

- *Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.*

La preuve sera faite en classe.

Propriété 11.3. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.*

- *Si les variations des x et des $f(x)$ sont proportionnelles, alors f est une fonction affine.*
- *Réciproquement, si f est une fonction affine, alors les variations des x et des $f(x)$ sont proportionnelles.*

Dit autrement, on a :
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *=constante* $\Leftrightarrow$ *f est une fonction affine.*
Ou encore :
Pour tout x et x', $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ *=constante* $\Leftrightarrow$ *f est une fonction affine*

On l'admettra.

11.3 Exercices et problèmes

11.3.1 Exercices

Exercice 11.1.
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto mx + p$. À quelle conditon f est-elle paire ? impaire ?

Exercice 11.2.
Voici les tarifs pratiqués par deux agences de location de voitures pour des véhicules identiques (tarifs journaliers, assurance comprise) :

- agence A : Forfait de 50 € plus 0,42 € par km ;
- agence B : Forfait de 40 € plus 0,50 € par km.

1. Quelle est l'agence la plus économique selon que l'on désire faire un parcours de
   - 50 km ?
   - 150 km ?
   - 300 km ?
2. On appelle x la distance que l'on désire parcourir. Déterminer selon les valeurs de x l'agence la plus économique.
3. Écrire un algorithme prenant comme argument la distance à parcourir et indiquant quelle agence est la plus intéressante pour cette distance ainsi que le tarif à payer.

EXERCICE 11.3.
Les tarifs mensuels d'un abonnement pour un téléphone mobile sont les suivants : Forfait d'une heure 15 € plus 0,30 € par minute supplémentaire.

1. Compléter le tableau suivant, où la durée est la durée totale des communications du mois en minute et le coût est le montant final de la facture en euros :

Durée	45	80	120
Coût			

2. Existe-t-il une fonction affine f qui à une durée de communication x associe le coût $f(x)$?

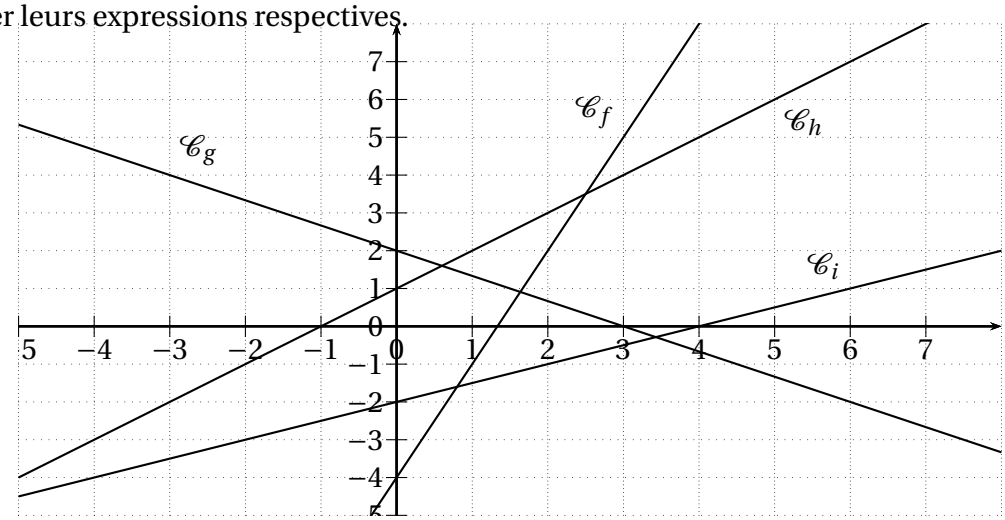
EXERCICE 11.4.
Soit f une fonction affine. Déterminer l'expression de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(1)=2$ et $f(4)=8$
2. $f(-1)=4$ et $f(2)=3$
3. $f(5)=-1$ et $f(3)=3$
4. $f(-4)=5$ et $f(1)=7$

EXERCICE 11.5.
Représenter dans un même repère les courbes des fonctions affines suivantes :

- $f(x)=2x-3$;
- $g(x)=2x+1$;
- $h(x)=\frac{1}{3}x+3$;
- $i(x)=-x+4$;
- $j(x)=-\frac{3}{4}x+5$;
- $k(x)=-3x+5$.

EXERCICE 11.6.
Dans le repère ci-dessous on a représenté les courbes de quatre fonctions affines f, g, h et i. Déterminer leurs expressions respectives.



11.3.2 Problèmes

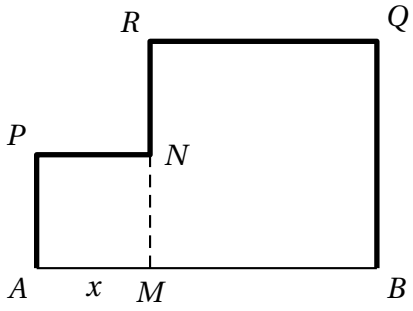
PROBLÈME 11.1.
On donne $P(x)=(2x+1)(-x+2)$.

1. (a) Étudier le signe de $2x+1$ selon les valeurs de x à l'aide des variations de la fonction affine $x \longmapsto 2x+1$.
   (b) Étudier le signe de $-x+2$ selon les valeurs de x à l'aide des variations de la fonction affine $x \longmapsto -x+2$.
   (c) En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x. *On pourra étudier le signe de chacun des facteurs et faire un tableau de signes.*
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x)<0$.
2. Étudier le signe, selon les valeurs de x, de chacune des fonctions suivantes :

- $Q(x) = (-2x+1)(-3x+4)$;
- $R(x) = (-x+4)(5-2x)$;
- $T(x) = (x-1)(-2x+4)(2x-1)$.

3. Résoudre les inéquations suivantes :

   - $S(x) \geqslant 0$ sachant que $S(x) = (2x+3)(x-1)$;
   - $U(x) \leqslant 0$ sachant que $U(x) = (4-x)(x+1)(2x+2)$.

PROBLÈME 11.2.
On donne $AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et on pose $AM = x$.
Dans le même demi-plan, on construit les carrés $AMNP$ et $MBQR$.
f est la fonction définie sur $[0\,;6]$ qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale $APNRQB$ (tracée en gras sur la figure ci-dessous).
Notez que la figure ci-dessous a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.

1. Faites une deuxième figure dans le cas où x est dans l'intervalle $[3\,;6]$.
2. Vérifiez que $f(x) = 18-2x$, si $x \in [0\,;3]$ et que $f(x) = 6+2x$, si $x \in [3\,;6]$.
3. Dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur les abscisses, 0,5 cm sur les ordonnées), construisez la courbe représentatice de f.
4. Trouvez graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.