Un corrigé du devoir maison n°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^2 + 2x - 3$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, qui est une parabole.

1. Déterminer, les coordonnées des points suivants, si jamais ils existent :

   - Les intersections de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ;

     $$M(x\,;\,y) \in \mathscr{C}_f \cap (Ox) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y = x^2 + 2x - 3 & \text{car } M \in \mathscr{C}_f \\ y = 0 & \text{car } M \in (Ox) \end{array}\right.$$
     $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

     Cherchons les racines de $x^2 + 2x - 3$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc ce trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$.
     Donc $\mathscr{C}_f \cap (Ox) = \{(-3\,;0)\,;(1\,;0)\}$.

   - Les intersections de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées ;

     $$M(x\,;\,y) \in \mathscr{C}_f \cap (Oy) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y = x^2 + 2x - 3 & \text{car } M \in \mathscr{C}_f \\ x = 0 & \text{car } M \in (Oy) \end{array}\right.$$
     $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0^2 + 2 \times 0 - 3 = -3 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

     Donc $\mathscr{C}_f \cap (Oy) = \{(0\,;-3)\}$.

   - Le sommet S de $\mathscr{C}_f$.

     Le sommet S de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4$.
     Donc $S(-1\,;-4)$.
     Remarque. L'ordonnée de S peut aussi s'obtenir en calculant $f(\alpha) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$.

2. Déterminer les nombres dérivés $f'(a)$ en chacun des points d'abscisse a trouvés dans la question 1.

   Cherchons le nombre dérivé au point $(-3\,;0)$ c'est-à-dire $f'(-3)$:

   $$\begin{aligned} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} &= \frac{(-3+h)^2 + 2(-3+h) - 3 - 0}{h} \\ &= \frac{9 - 6h + h^2 - 6 + 2h - 3}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h} = \frac{h(h-4)}{h} = h - 4 \text{ quand } h \neq 0 \end{aligned}$$

   $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h - 4 = -4$ donc f est dérivable en -3 et $f'(-3) = -4$.

Cherchons le nombre dérivé au point $(1\,;0)$ c'est-à-dire $f'(1)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2+2(1+h)-3-0}{h}\\ &= \frac{1+2h+h^2+2+2h-3}{h}\\ &= \frac{h^2+4h}{h} = \frac{h(h+4)}{h} = h+4 \text{ quand } h \neq 0\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h+4 = 4$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$.

Cherchons le nombre dérivé au point $(0\,;-3)$ c'est-à-dire $f'(0)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{h^2+2h-3-(-3)}{h}\\ &= \frac{h^2+2h-3+3}{h}\\ &= \frac{h^2+2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h+2 \text{ quand } h \neq 0\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h+2 = 2$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.

Cherchons le nombre dérivé au point $S(-1\,;-4)$ c'est-à-dire $f'(-1)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2+2(-1+h)-3-(-4)}{h}\\ &= \frac{1-2h+h^2-2+2h-3+4}{h}\\ &= \frac{h^2+0h}{h} = \frac{h(h+0)}{h} = h+0 \text{ quand } h \neq 0\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h+0 = 0$ donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

3. Dans le repère ci-dessous :

   - Représenter les tangentes à $\mathscr{C}_f$ qu'on peut tracer à partir des résultats de la question 2 ;

     On peut déduire de la question précédente 4 tangentes :

     – Celle passant par le point $(-3\,;0)$ et de coefficient directeur $f'(-3) = -4$;

     – Celle passant par le point $(1\,;0)$ et de coefficient directeur $f'(1) = 4$;

     – Celle passant par le point $(0\,;-3)$ et de coefficient directeur $f'(0) = 2$;

     – Celle passant par le point $S(-1\,;-4)$ et de coefficient directeur $f'(-1) = 0$.

- Tracer $\mathscr{C}_f$.

Nous avons déjà quelques points et quelques tangentes mais nous pouvons aussi obtenir quelques valeurs supplémentaires pour plus de précision dans le tracé :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
rappel des valeurs de $f'(x)$ déjà trouvées			-4		0	2	4		

D'où le schéma suivant :