

Un corrigé du devoir maison n°5

EXERCICE 5.1 (Une suite auxiliaire géométrique).

Une commune dispose de 380 vélos à assistance électrique (VAE) et propose un système de location de ces VAE selon les modalités suivantes :

- chaque VAE est loué pour une durée d'un mois;
- la location commence le 1^{er} jour du mois et se termine le dernier jour du même mois;
- le nombre de VAE loué est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 VAE ont été loués avec ce système de location.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de VAE. Pour cela il modélise le nombre de VAE loués chaque mois par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre de VAE loués le n -ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $u_0 = 280$.

Le responsable a constaté que sur les années précédentes, chaque mois, 10 % des personnes ayant loué un VAE un mois ne renouvelaient pas leur abonnement, les autres si, et que chaque mois 42 nouveaux clients louaient un VAE. Il suppose que pour les mois à venir ce modèle restera valable.

- (a) Calculer le nombre de VAE loués avec ce système au mois de février 2019 et au moins de mars 2019.

$u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 + 42 = 0,9 \times u_0 + 42 = 294$ donc le nombre de VAE loués en février 2019 a été de 294.

$u_2 = u_1 - \frac{10}{100}u_1 + 42 = 0,9 \times u_1 + 42 = 306,6 \approx 307$ donc le nombre de VAE loués en mars 2019 a été de 307.

Remarque. Chaque VAE est loué pour le mois entier, il faut donc arrondir à la valeur entière. Doit-on prendre l'arrondi (valeur entière la plus proche), la valeur approchée par défaut, celle par excès? Tout se défend. J'ai pris quant à moi la valeur approchée par défaut.

- (b) Déterminer si la suite (u_n) est arithmétique ou géométrique en justifiant.

$u_1 - u_0 = 14 \neq u_2 - u_1 = 13$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{294}{280} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{307}{294}$ donc (u_n) n'est pas non plus géométrique.

- (c) Justifier que $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

$u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n + 42 = 0,9 \times u_n + 42$.

Ou : « Diminuer de 10 % c'est multiplier par 0,9, auquel s'ajoutent les 42 nouveaux clients ».

- Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 420$.

- (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera ses caractéristiques.

Au moins deux façons de faire :

$$\begin{array}{ll}
 v_{n+1} = u_{n+1} - 420 & v_{n+1} = u_{n+1} - 420 \\
 = 0,9u_n + 42 - 420 & = 0,9u_n + 42 - 420 \\
 = 0,9u_n - 378 & = 0,9u_n - 378 \\
 = 0,9\left(u_n - \frac{378}{0,9}\right) & = 0,9(v_n + 420) - 378 \\
 = 0,9(u_n - 420) & = 0,9v_n + 378 - 378 \\
 = 0,9v_n & = 0,9v_n
 \end{array}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$ et de raison $q = 0,9$.

- (b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.

$$\begin{aligned}
 v_n &= v_0 \times q^n = -140 \times 0,9^n. \\
 u_n &= v_n + 420 = -140 \times 0,9^n + 420.
 \end{aligned}$$

3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$\begin{array}{ll}
 0,9 < 1 & \text{multiplions par } 0,9^n : \\
 0,9^{n+1} < 0,9^n & \text{multiplions par } -140 : \\
 -140 \times 0,9^{n+1} > -140 \times 0,9^n & \text{ajoutons } 420 : \\
 -140 \times 0,9^{n+1} + 420 > -140 \times 0,9^n + 420 & \text{ce qui nous donne :} \\
 u_{n+1} > u_n &
 \end{array}$$

La suite (u_n) est donc croissante : le nombre de client.e.s ne va faire qu'augmenter.

4. (a) Montrer que

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 420(n+1) + \sum_{i=0}^n v_i$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n u_i &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\
 &= v_0 + 420 + v_1 + 420 + \dots + v_n + 420 \\
 &= 420(n+1) + \sum_{i=0}^n v_i \\
 &= 420(n+1) + v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= 420(n+1) - 140 \times \frac{1 - 0,9^{n+1}}{1 - 0,9}
 \end{aligned}$$

- (b) Chaque mois chaque client, qu'il soit nouveau client ou client qui renouvelle son abonnement, doit envoyer un formulaire à la société de location. Déterminer le nombre de formulaires qu'a reçus la société en 2019.

On cherche $u_0 + u_1 + \dots + u_{11}$.

En appliquant la formule précédente avec $n = 11$, on trouve que $u_0 + u_1 + \dots + u_{11} \approx 4035,40$. Soit environ 4035 formulaires.

Remarque. En prenant :

- les 12 valeurs par défaut, on trouve 4031
- les 12 valeurs par excès, 4041
- les 12 arrondis, 4036

5. La commune, qui possède initialement 380 VAE, envisage d'acheter des vélos supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de VAE sera insuffisant.

Proposer un algorithme (ou une fonction) en langage Python permettant de répondre à la question, indiquer ce qu'il (ou elle) renvoie et le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de vélos.

La fonction suivante, qui est un algorithme dit « de seuil », permet d'obtenir le résultat :

```
def mois(seuil) :
    u = 280
    n = 0
    while u < seuil :
        n = n + 1
        u = 0,9 * u + 42
    return n
```

mois(380) renvoie 12, c'est donc au mois $n = 12$ qu'il a fallu augmenter le nombre de vélos, soit en janvier 2020.

EXERCICE 5.2 (Suite auxiliaire arithmétique).

 La suite (u_n) est définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les cinq premiers termes de la suite
- (u_n)
- .

$$\begin{aligned} \bullet u_0 &= 1 & \bullet u_2 &= \frac{u_1 - 1}{u_1 + 3} = -\frac{1}{3} & \bullet u_4 &= \frac{u_3 - 1}{u_3 + 3} = -\frac{3}{5} \\ \bullet u_1 &= \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = 0 & \bullet u_3 &= \frac{u_2 - 1}{u_2 + 3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (b) La suite
- (u_n)
- est-elle arithmétique? Est-elle géométrique?
- On justifiera.*

$u_1 - u_0 = -1 \neq u_2 - u_1 = -\frac{1}{3}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
 $\frac{u_1}{u_0} = 0 \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{3}{2}$ donc (u_n) n'est pas non plus géométrique.
Remarque. Le quotient $\frac{u_2}{u_1}$ n'est pas défini.

2. Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- , on pose
- $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$
- . On admet que la suite
- (v_n)
- est bien définie.

- (a) Montrer que la suite
- (v_n)
- est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.

Plusieurs façons d'arriver au résultat. En voici deux.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 1} - \frac{1}{u_n + 1} & v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1 + 1} - \frac{1}{u_n + 1} & &= \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 2} \\ &= \frac{\frac{u_n - 1 + u_n + 3}{u_n + 3}}{\frac{u_n - 1 + 2u_n + 6}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 1} & &= \frac{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3}}{\frac{3u_n + 5}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 1} \\ &= \frac{2u_n + 2}{3u_n + 5} - \frac{1}{u_n + 1} & &= \frac{2u_n + 2}{3u_n + 5} - \frac{1}{u_n + 1} \\ &= \frac{2u_n + 2}{2(u_n + 1)} - \frac{1}{u_n + 1} & &= \frac{2(u_n + 1)}{2(u_n + 1)} - \frac{1}{u_n + 1} \\ &= \frac{u_n + 1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_n + 1} & &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n + 1} \\ &= \frac{1}{2} & &= \frac{1}{2} + v_n \end{aligned}$$

 Donc $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}$.

 La suite (v_n) est arithmétique de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

- (b) Exprimer
- v_n
- puis
- u_n
- en fonction de
- n
- .

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 + n \times r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n. \\ v_n &= \frac{1}{u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = u_n + 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n} - 1 = \frac{2 \times 1}{2 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n)} - 1 = \frac{2}{1+n} - 1 = \frac{2}{1+n} - \frac{1+n}{1+n} = \\ &= \frac{2-1-n}{1+n} = \frac{1-n}{1+n}. \end{aligned}$$

- (c) Déterminer la valeur exacte de
- u_{10}
- .

$$u_{10} = \frac{1-10}{1+10} = -\frac{9}{11}.$$