

## Devoir maison n°5

### Suites auxiliaires

À rendre pour le mardi 6 avril.

Ce devoir est à faire à deux personnes minimum et à trois maximum (un seul travail rendu pour 2 ou 3 élèves).

**EXERCICE 5.1** (Une suite auxiliaire géométrique).

Une commune dispose de 380 vélos à assistance électrique (VAE) et propose un système de location de ces VAE selon les modalités suivantes :

- chaque VAE est loué pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1<sup>er</sup> jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de VAE loué est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 VAE ont été loués avec ce système de location.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de VAE. Pour cela il modélise le nombre de VAE loués chaque mois par une suite  $(u_n)$  où, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  représente le nombre de VAE loués le  $n$ -ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi  $u_0 = 280$ .

Le responsable a constaté que sur les années précédentes, chaque mois, 10 % des personnes ayant loué un VAE un mois ne renouvelaient pas leur abonnement, les autres si, et que chaque mois 42 nouveaux clients louaient un VAE. Il suppose que pour les mois à venir ce modèle restera valable.

1. (a) Calculer le nombre de VAE loués avec ce système au mois de février 2019 et au moins de mars 2019.
  - (b) Déterminer si la suite  $(u_n)$  est arithmétique ou géométrique en justifiant.
  - (c) Justifier que  $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$ .
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $v_n = u_n - 420$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique. On précisera ses caractéristiques.
  - (b) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et montrer que  $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$ .
3. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$  puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. (a) Montrer que

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 420(n+1) + \sum_{i=0}^n v_i$$

- (b) Chaque mois chaque client, qu'il soit nouveau client ou client qui renouvelle son abonnement, doit envoyer un formulaire à la société de location. Déterminer le nombre de formulaires qu'a reçus la société en 2019.

5. La commune, qui possède initialement 380 VAE, envisage d'acheter des vélos supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de VAE sera insuffisant.

Proposer un algorithme (ou une fonction) en langage Python permettant de répondre à la question, indiquer ce qu'il (ou elle) renvoie et le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de vélos.

**EXERCICE 5.2** (Suite auxiliaire arithmétique).

La suite  $(u_n)$  est définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.
  - (a) Déterminer les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
  - (b) La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique? Est-elle géométrique? *On justifiera.*
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ . On admet que la suite  $(v_n)$  est bien définie.
  - (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.
  - (b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) Déterminer la valeur exacte de  $u_{10}$ .