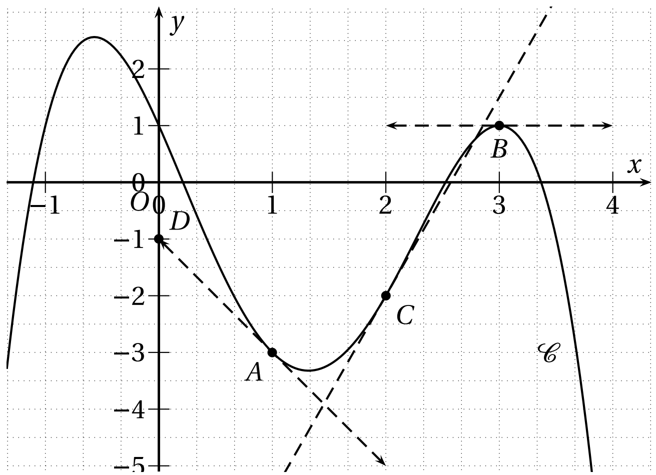
Un corrigé du devoir surveillé n°3 – Sujet B

EXERCICE 3.1 (5 points)**.**
On donne sur la figure ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f avec ses tangentes aux points $A\,(1\,;-3)$ et $B\,(3\,;\,1)$.
Le point $C\,(2\,;\,-2)$ appartient à $\mathscr{C}$.
Le point $D\,(0\,;\,-1)$ appartient à la tangente à la courbe en A.



1. Donner par lecture graphique, sans justifier, $f(1)$ et $f(3)$.

   La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $(1\,;-3)$ et $(3\,;\,1)$ donc $f(1)=-3$ et $f(3)=1$.

2. Donner par lecture graphique, en justifiant, $f'(1)$ et $f'(3)$.

   $f'(a)$ est la coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a donc $f'(1)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{1}=-2$ et $f'(3)=0$ (tangente parallèle à l'axe des abscisses).

3. On donne : $f'(2)=\frac{7}{2}$.

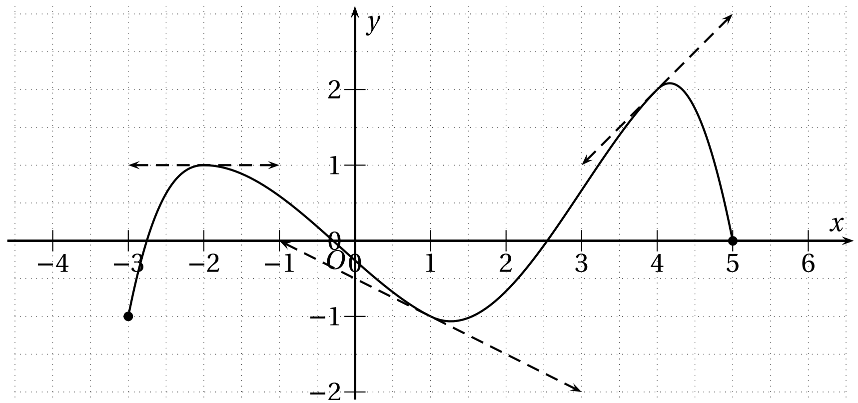
   (a) Déterminer l'équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

   L'équation réduite de la tangente est de la forme $y=mx+p$ avec $m=f'(2)=\frac{7}{2}$ donc $y=\frac{7}{2}x+p$.
   La tangente passe par le point $(2\,;-2)$ donc $-2=\frac{7}{2}\times 2+p \Leftrightarrow p=-9$.
   D'où l'équation réduire de la tangente : $y=\frac{7}{2}x-9$.

   (b) Tracer cette tangente sur la figure.

EXERCICE 3.2 (5 points)**.**
Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe d'une fonction f vérifiant les contraintes suivantes :

- f est définie sur $[-3\,;\,5]$;
- $f(4)=2$;
- $f(-2)=1$;
- $f'(1)=-\frac{1}{2}$;
- $f(1)=-1$;
- $f'(4)=1$;
- $f'(-2)=0$.



EXERCICE 3.3 (10 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer, par le calcul, les coordonnées de A, point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

$$A(x;\, y) \in \mathscr{C} \cap (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 & \text{car } A \in \mathscr{C} \\ x = 0 & \text{car } A \in (Oy) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0^2 + 2 \times 0 - 3 = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc $A(0;\, -3)$.

   (b) Déterminer, par le calcul, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

Cherchons le nombre dérivé au point $(0\,;\, -3)$ c'est-à-dire $f'(0)$:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{(0+h)^2 + 2(0+h) - 3 - (-3)}{h}$$
$$= \frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h + 2 \text{ quand } h \neq 0$$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h + 2 = 2$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.

2. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

$$M(x;\, y) \in \mathscr{C} \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 & \text{car } M \in \mathscr{C} \\ y = 0 & \text{car } M \in (Ox) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Cherchons les racines de $x^2 + 2x - 3$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc ce trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$.
Donc $\mathscr{C} \cap (Ox) = \{(-3\,;\, 0)\,;\, (1\,;\, 0)\}$.

3. Déterminer, par le calcul, $f'(-2)$ puis une équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{(-2+h)^2 + 2(-2+h) - 3 - (-3)}{h}$$
$$= \frac{4 - 4h + h^2 - 4 + 2h - 3 + 3}{h} = \frac{h(h-2)}{h} = h - 2 \text{ quand } h \neq 0$$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h - 2 = -2$ donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -2$.
Par obtenir l'équation réduite on peut, entre autre, utiliser la formule :
$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) = -2(x+2) - 3 = -2x - 7$

4. Tracés :