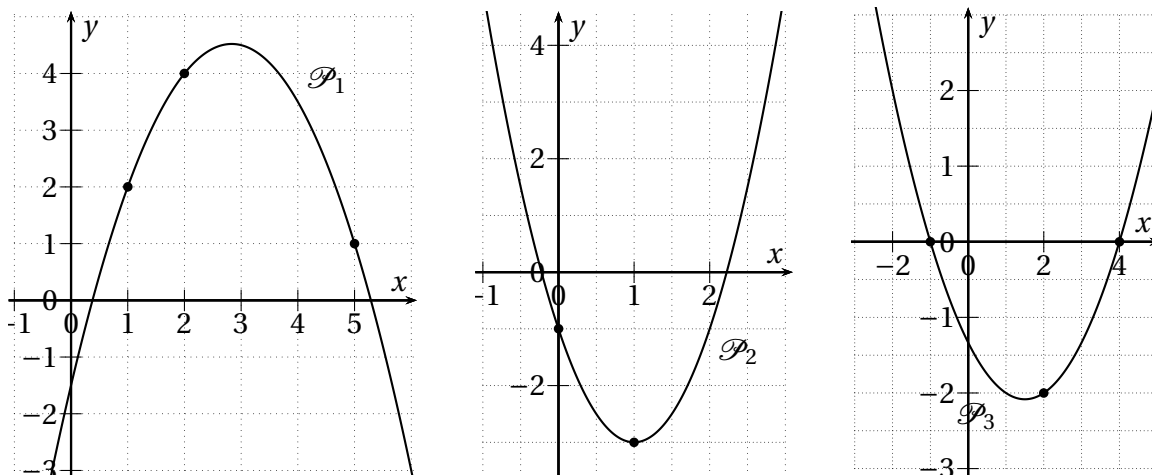

Un corrigé du devoir surveillé n°2

EXERCICE 2.1 (6 points).

Les paraboles $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ de la figure 2.1 de la présente page sont les représentations graphiques respectives des fonctions trinômes f_1 , f_2 et f_3 . On a placé quelques points à coordonnées entières situés sur les courbes.

Déterminer l'expression de chacune de ces fonctions en expliquant brièvement la méthode (les détails des calculs, s'il y en a, ne sont pas demandés).

FIGURE 2.1: Paraboles de l'exercice 2.1



f_1 : Étant une fonction trinôme, $f_1(x)$ admet une écriture de la forme $f_1(x) = ax^2 + bx + c$.
Comme les points $(1; 2)$, $(2; 4)$ et $(5; 1)$ appartiennent à $\mathcal{P}_1$ on a :

$$\begin{cases} a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c = 2 \\ a \times 2^2 + b \times 2 + c = 4a + 2b + c = 4 \\ a \times 5^2 + b \times 5 + c = 25a + 5b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{17}{4} \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc $f_1(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{3}{2}$.

f_2 : Le sommet S de $\mathcal{P}_2$ a pour coordonnées $(1; -3)$ or ces coordonnées sont $(\alpha; \beta)$ où la forme canonique de $f_2(x)$ est $f_2(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Ainsi : $f_2(x) = a(x - 1)^2 - 3$.
 $(0; -1) \in \mathcal{P}_2$ donc $f_2(0) = 1 \Leftrightarrow a(0 - 1)^2 - 3 = -1 \Leftrightarrow a = 2$.

Donc $f_2(x) = 2(x - 1)^2 - 3$.

f_3 : $\mathcal{P}_3$ intercepte l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 4 donc le trinôme f_3 a deux racines : -1 et 3 et admet comme forme factorisée $f_3(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 1)(x - 3)$.
 $(2; -2) \in \mathcal{P}_3$ donc $f_3(2) = -2 \Leftrightarrow a(2 + 1)(2 - 3) = -2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$.

Donc $f_3(x) = \frac{2}{3}(x + 1)(x - 3)$.

EXERCICE 2.2 (9 points).

Sur la figure 2.2, page ci-contre, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit les points $A(3; -1)$, $B(6; 4)$, la droite $\Delta : 2x - 3y + 4 = 0$.

1. Tracer, dans le repère fourni, la droite Δ .

Pour tracer une droite il nous faut deux points.

Prenons $x = 0$. On a alors $2 \times 0 - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$ ce qui nous donne le point $(0; \frac{4}{3})$ qui n'est pas idéal à placer. Cherchons-en deux autres.

Prenons $y = 0$. On a alors $2x - 3 \times 0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ce qui nous donne le point $(-2; 0)$ qu'on peut placer facilement.

Prenons $y = 2$. On a alors $2x - 3 \times 2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ce qui nous donne le point $(1; 2)$ qu'on peut placer facilement.

2. On donne les droites suivantes :

- $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -3)$.
- $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par A et B .
- $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par B et parallèle à Δ .

Pour chacune d'elles :

- (a) La tracer dans le repère fourni;
(b) Déterminer une équation cartésienne en détaillant sa façon de faire.

$\mathcal{D}_1$: (a) $A \in \mathcal{D}_1$, il nous faut juste un second point. En traçant un représentant de $\vec{u}$ d'origine A , on trouve un second point ce qui suffit à tracer la droite.

(b)

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{D}_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3(x-3) - 2(y+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x - 2y + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_1 : 3x + 2y - 7 = 0$$

$\mathcal{D}_2$: (a) La droite passe par A et B .

(b)

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{D}_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5(x-3) - 3(y+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 3y - 18 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_2 : 5x - 3y - 18 = 0$$

$\mathcal{D}_3$: (a) Avec un traceur de parallèle, le tracé est trivial.

(b) $\Delta: 2x - 3y + 4 = 0$ et $\Delta \parallel \mathcal{D}_3$ donc $\mathcal{D}_3$ admet une équation cartésienne de la forme $2x - 3y + c = 0$.

$B \in \mathcal{D}_3$ donc $2x_B - 3y_B + c = 0 \Leftrightarrow 12 - 12 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Donc $\mathcal{D}_3: 2x - 3y = 0$

3. Justifier que les droites Δ et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes et déterminer, par le calcul, les coordonnées de C , leur point d'intersection.

$\Delta: 2x - 3y + 4 = 0$ donc un vecteur directeur de Δ est $\vec{v}(3; 2)$.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\vec{u}(2; -3)$.

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 2 \times 2 - (-3) \times 3 = 13 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites Δ et $\mathcal{D}_1$ ne sont pas parallèles : elles sont donc sécantes.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \Delta \cap \mathcal{D}_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

FIGURE 2.2: Figure de l'exercice 2.2

