Un corrigé du devoir surveillé n°1

EXERCICE 1.1 (7 points)**.**
Sans justification, compléter le tableau suivant avec les formes manquantes, si elles existent.

Forme	Développée	Canonique	Factorisée
$A(x)$	$2x^2-4x-16$	$2(x-1)^2-18$	$2(x+2)(x-4)$
$B(x)$	$3x^2+6x+4$	$3(x+1)^2+1$	$\times$
$C(x)$	$\frac{1}{4}x^2-x+\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}(x-3)(x-1)$
$D(x)$	$\dfrac{1}{2}x^2+2x+2$	$\frac{1}{2}(x+2)^2$	$\frac{1}{2}(x+2)^2$

Explications (non exigées) :

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2x^2-4x-16 = ax^2+bx+c \text{ avec } a=2,\ b=-4 \text{ et } c=-16\\
&= a(x-\alpha)^2+\beta \text{ où } \alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{4}=1 \text{ et } \beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{144}{8}=-18\\
&= 2(x-1)^2-18\\
&= a(x-x_1)(x-x_2) \text{ car } \Delta>0 \text{ avec } x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-12}{4}=-2 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+12}{4}=4\\
&= 2(x+2)(x-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(x) &= 3(x+1)^2+1\\
&= 3(x^2+2x+1)+1 = 3x^2+6x+3+1 = 3x^2+6x+4
\end{aligned}$$

$B(x)$ n'a pas de forme factorisée car $\Delta=-12<0$

$$\begin{aligned}
C(x) &= \frac{1}{4}(x-3)(x-1)\\
&= \frac{1}{4}(x^2-4x+3) = \frac{1}{4}x^2-x+\frac{3}{4}\\
&= a(x-\alpha)^2+\beta \text{ avec } \alpha=2 \text{ et } \beta=-\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(x) &= \frac{1}{2}x^2+2x+2\\
&= a(x-\alpha)^2+\beta \text{ où } \alpha=-2 \text{ et } \beta=-\frac{\Delta}{4a}=0\\
&= 2(x+2)^2\\
&= a(x-x_0)^2 \text{ car } \Delta=0 \text{ avec } x_0=\alpha=-2\\
&= 2(x+2)^2
\end{aligned}$$

EXERCICE 1.2 (7,5 points).
Soit f la fonction qui à x associe $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{-2x^2+5x-2}$.

1. (a) Déterminer les racines de $-2x^2+5x-2$.

   Les formules ont été rappelées dans les explications de l'exercice précédent, aussi ne seront-elles plus rappelées.
   $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 9 > 0$ donc deux racines : $x_1 = \frac{-5-3}{-4} = 2$ et $x_2 = \frac{-5+3}{-4} = \frac{1}{2}$.

   (b) En déduire pour quelles valeurs de x la fonction f est définie.

   $f(x)$ est un quotient qui n'est pas défini quand son dénominateur s'annule. f est donc définie pour tout nombre sauf pour 2 et $\frac{1}{2}$ qui sont les racines du dénominateur.

2. (a) Étudier selon les valeurs de x le signe de x^2+2x-3.

   $x^2+2x-3 = ax^2+bx+c$ est un trinôme donc il sera du signe de a, ici positif, sauf entre ses éventuelles racines.
   $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$; il a donc deux racines $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$.
   x^2+2x-3 est donc positif sur $]-\infty\,;-3] \cup [1\,;+\infty[$ et négatif sur $[-3\,;1]$.

   (b) Étudier selon les valeurs de x le signe de $-2x^2+5x-2$.

   $-2x^2+5x-2 = ax^2+bx+c$ est aussi un trinôme donc il sera du signe de a, ici négatif, sauf entre ses deux racines déjà trouvées précédemment : $\frac{1}{2}$ et 2.
   $-2x^2+5x-2$ est donc négatif sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right] \cup [2\,;+\infty[$ et positif sur $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$.

   (c) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x^2+5x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

   Donc $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-3\,;\frac{1}{2}\right[\cup [1\,;2[$.

EXERCICE 1.3 (5,5 points).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

1. Montrer que -2 est une racine de f.

   $f(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$ donc -2 est bien une racine de f.

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c \\ &= ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c \end{aligned}$$

or $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ aussi, par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b+2a = -2 \\ c+2b = -5 \\ 2c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Donc $f(x) = (x+2)(x^2-4x+3)$.

3. Étudier, selon les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

Étudions le signe de $x^2 - 4x + 3 = ax^2 + bx + c$ qui est donc un trinôme, donc du signe de a, ici positif, sauf entre ses éventuelles racines.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ donc le trinôme a deux racines $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$ à l'extérieur desquelles il est positif.
Quant à $x \longmapsto x+2 = mx+p$ c'est une fonction affine croissante ($m = 1$ positif) qui s'annule en -2.
D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $f(x)$ est positif quand $x \in [-2\,;1] \cup [3\,;+\infty[$ et négatif quand $x \in]-\infty\,;-2] \cup [1\,;3]$.