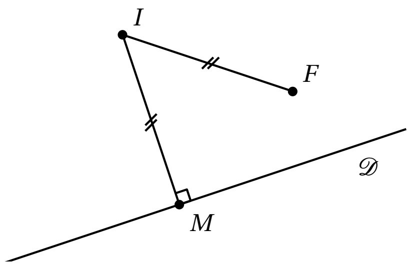
# Un corrigé du devoir maison n°1

On se place dans un plan.
Soit $\mathscr{D}$ une droite et $F$ un point quelconque du plan n'appartenant pas à $\mathscr{D}$.
Pour tout point $M$ de la droite $\mathscr{D}$, on construit le point $I$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $MI = IF$
- $(MI)$ est perpendiculaire à $\mathscr{D}$

On se pose pour objectif, dans ce devoir, de déterminer quel est l'ensemble des positions prises par $I$, on dit aussi le *lieu géométrique* de $I$, lorsque le point $M$ décrit la droite $\mathscr{D}$.

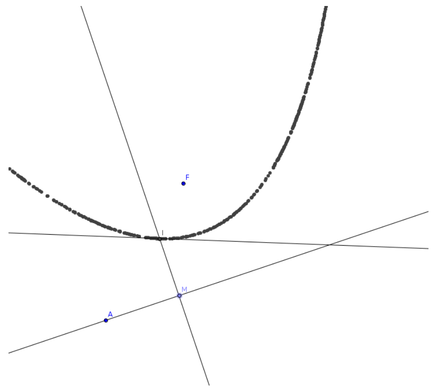



**Conjecturer avec Geogebra**

1. Quel est dans le plan l'ensemble des points équidistants de deux points ? Proposer alors une méthode de construction du point $I$ à partir du point $F$, de la droite $\mathscr{D}$ et d'un point $M$ de la droite $\mathscr{D}$.

   L'ensemble des points équidistants de deux points est la médiatrice du segment formé par ces deux points.
   $I$ est à la fois sur la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par $M$ et sur la médiatrice du segment $[FM]$ puisqu'il est à égale distance de ces deux points. Pour le construire, il suffit alors de construire cette perpendiculaire et cette médiatrice : $I$ sera leur intersection.

2. Faire une capture d'écran de la trace obtenue et fournir cette capture d'écran avec votre copie.



3. Quel semble être le lieu géométrique du point $I$ quand $M$ décrit la droite $\mathscr{D}$ ?

   I semble décrire une parabole.

**Démontrer la conjecture**

On munit le plan d'un repère orthonormé admettant la droite $\mathscr{D}$ comme axe des abscisses et dont l'axe des ordonnées passe par $F$.
Dans ce repère, on note $x$ l'abscisse de $M$, $f$ l'ordonnée de $F$ et $y$ l'ordonnée de $I$.

1. Avec les conventions précédentes, donner les coordonnées des points $F$, $M$ et $I$.

   $F$ est sur l'axe des ordonnées et d'ordonnée $f$ donc $F(0\,;f)$.
   $M$ est sur l'axe des asbcisses et d'abscisse $x$ donc $M(x\,;0)$.
   $I$ est sur la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par $M$ donc $I$ et $M$ ont la même abscisse : $x$. Son ordonnée est $y$ donc $I(x\,;y)$.

2. Montrer que la condition $MI = IF$ est alors équivalente à $MI^2 = IF^2$ puis à $x^2 - 2yf + f^2 = 0$.

   $MI$ et $IF$ étant des longueurs, donc des nombres positifs,

   $$\begin{aligned} MI = IF &\Leftrightarrow MI^2 = IF^2 \\ &\Leftrightarrow (x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2 \\ &= (x_F - x_I)^2 + (y_F - y_I)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-x)^2 + (y-0)^2 = (0-x)^2 + (f-y)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = x^2 + f^2 - 2yf + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2yf + f^2 = 0 \end{aligned}$$

3. Exprimer alors $y$ en fonction de $x$ (et $f$).

   Comme le point $F$ n'est pas sûr la droite $\mathscr{D}$, qui est l'axe des abscisses, alors $f \neq 0$.
   $x^2 - 2yf + f^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + f^2 = 2yf \Leftrightarrow y = \frac{1}{2f}x^2 + \frac{f}{2}$ (il y a équivalence car $f \neq 0$).

4. $y$ est une fonction de $x$ de quel type ? De quelle nature est alors ce lieu de point ?

   $y$ est un polynôme du second degré de $x$ donc, lorsque $M$ décrit la droite $\mathscr{D}$, $x$ décrit $\mathbb{R}$ et $I$ décrit la courbe de ce polynôme qui est bien une parabole.