

Un corrigé du devoir surveillé n°1

1. Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 20 (sans justifier) :

Les nombres premiers inférieurs à 20 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

2. Les nombres suivants sont-ils premiers (on justifiera) :

- 323

Testons la divisibilité de 323 par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{323} \approx 17,9$.

323 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13. Cependant il est divisible par 17. Et $323 = 17 \times 19$.

323 a donc strictement plus de deux diviseurs puisqu'il est divisible par 1, 323 et 17, entre autres. Il n'est donc pas premier.

- 317

Testons la divisibilité de 317 par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{317} \approx 17,8$.

317 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

317 n'a pas de diviseur premier inférieur $\sqrt{317}$, il n'a donc pas plus de deux diviseurs. N'étant divisible que par 1 et 317, il est donc premier.

3. (a) Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers (sans justifier) :

- 630

$$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7.$$

- 660

$$660 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11.$$

- 585

$$585 = 3 \times 3 \times 5 \times 13.$$

- (b) Simplifier chacune des fractions suivantes pour obtenir une fraction irréductible (on détaillera les simplifications) :

- $A = \frac{630}{660}$

$$A = \frac{630}{660} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11} = \frac{3 \times 7}{2 \times 11} = \frac{21}{22}$$

- $B = \frac{660}{585}$

$$B = \frac{660}{585} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11}{3 \times 3 \times 5 \times 13} = \frac{2 \times 2 \times 11}{3 \times 13} = \frac{44}{39}$$

- $C = \frac{585}{630}$

$$C = \frac{585}{630} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 13}{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{13}{2 \times 7} = \frac{13}{14}$$

4. Effectuer les calculs suivants et détaillant les calculs (on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible) :

- $D = \frac{1}{39} - \frac{1}{26}$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{39} - \frac{1}{26} = \frac{1}{3 \times 13} - \frac{1}{2 \times 13} = \frac{2}{3 \times 13 \times 2} - \frac{3}{2 \times 13 \times 3} \\ &= \frac{2-3}{3 \times 13 \times 2} = -\frac{1}{78} \end{aligned}$$

- $E = \frac{26}{35} \times \frac{14}{39}$

$$E = \frac{26}{35} \times \frac{14}{39} = \frac{26 \times 14}{35 \times 39} = \frac{2 \times 13 \times 2 \times 7}{5 \times 7 \times 3 \times 13} = \frac{2 \times 2}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$$

- $F = \frac{\frac{15}{4}}{5}$

$$F = \frac{\frac{15}{4}}{5} = \frac{15}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3 \times 5}{2 \times 2 \times 5} = \frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

5. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers et b le plus petit possible (on détaillera les calculs) :

- $H = \sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{75}$

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{2 \times 2 \times 3} + \sqrt{3 \times 3 \times 3} + \sqrt{3 \times 5 \times 5} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{5^2} \\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 3 + 5)\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

- $I = 3\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{216}$

$$\begin{aligned} I &= 3\sqrt{3 \times 5 \times 2 \times 5} + \sqrt{2 \times 3 \times 3 \times 3} - \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= 3 \times \sqrt{3 \times 2} \times \sqrt{5^2} + \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2 \times 3} \\ &= 3 \times 5 \times \sqrt{6} + 3 \times \sqrt{6} - 2 \times 3 \times \sqrt{6} \\ &= 15\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = (15 + 3 - 6)\sqrt{6} = 12\sqrt{6} \end{aligned}$$

6. Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a , b et c sont des entiers et c est le plus petit entier possible (on détaillera les calculs) :

- $J = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$

$$\begin{aligned} J &= (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{5} + \sqrt{2}) \\ &= \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{5} + \sqrt{2}^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{5} + 2 = 7 + 2\sqrt{2 \times 5} \\ &= 7 + 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

- $K = (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2$

$$\begin{aligned} K &= (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2 = (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \times (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \\ &= \sqrt{10}^2 - \sqrt{10}\sqrt{6} - \sqrt{6}\sqrt{10} + \sqrt{6}^2 = 10 - 2\sqrt{6 \times 10} + 6 \\ &= 16 - 2\sqrt{2 \times 3 \times 2 \times 5} = 16 - 2 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3 \times 5} \\ &= 16 - 2 \times 2 \times \sqrt{15} = 16 - 4\sqrt{15} \end{aligned}$$