
Devoir maison n°2

Intersection d'une droite et d'un cercle

À rendre pour le vendredi 16 octobre.

Le devoir doit être fait à deux ou trois (une seule copie manuscrite ou numérique pour 2 ou 3 élèves).

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Un cercle

1. On rappelle que le cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$.

Justifier qu'alors :

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Une telle équation est appelée *équation cartésienne* de \mathcal{C} .

2. Soit $\Omega(3; -2)$ et $B(4; 0)$ et \mathcal{C} , le cercle de centre Ω et passant par B .

- (a) Montrer que :

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 4y + 8 = 0$$

- (b) Déterminer le rayon r de \mathcal{C}
- (c) Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
- (d) Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des ordonnées.

Partie B : Une droite

Soit $A(0; 2)$, $\vec{v}(1; m)$ où m est un réel quelconque et \mathcal{D} la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{v} .

Montrer qu'une équation cartésienne de \mathcal{D} est $y = mx + 2$.

Partie C : Intersection de \mathcal{C} et de \mathcal{D} .

\mathcal{C} et \mathcal{D} sont, respectivement, le cercle défini dans la partie A, question 2, et la droite définie dans la partie B.

1. Quelques cas particuliers.
Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} dans chacun des cas suivants :

- (a) $m = 1$
- (b) $m = -0,5$
- (c) $m = -2$

2. On se place dans le cas général où m n'a pas de valeur particulière donnée au préalable.

- (a) Montrer que $M(x; y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + 2 \\ (1 + m^2)x^2 + (8m - 6)x + 20 = 0 \end{cases}$

- (b) Montrer que le trinôme $(1 + m^2)x^2 + (8m - 6)x + 20$ a pour discriminant

$$\Delta = -16m^2 - 96m - 44$$

- (c) Étudier le signe de Δ selon les valeurs de m .
- (d) En déduire le nombre d'intersections de \mathcal{D} et \mathcal{C} selon les valeurs de m .