Calculs

Nombres entiers, divisibilité

Définition. On appelle l'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres suivants : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
On appelle l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres suivants : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Si on ne précise pas « naturels », on parle d'entiers relatifs.

Théorème. *Pour tous entiers naturels a et b tels que $b \neq 0$, il existe deux nombres entiers naturels uniques q et r tels que :* $\begin{cases} a = b \times q + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$
a est appelé dividende*, b le* diviseur*, q le* quotient *et r le* reste.

Définition. Les deux définitions suivantes sont équivalentes.
Soit a et b deux entiers (relatifs).

- Si le reste de la division euclidienne de a par b est 0 alors on dit que b *divise* a
- S'il existe un entier (relatif) n tels que $a = b \times n$ alors on dit que b *divise* a

On dit dans ce cas que b est un *diviseur* de a ou que a est un *multiple* de b.

Propriété. *Soit a un entier. La somme de deux multiples de a est aussi un multiple de a.*

Définition. Les deux définitions suivantes sont équivalentes.

- Un nombre pair est un entier multiple de 2 ; un nombre impair est un entier qui n'est pas pair.
- Un nombre pair est un entier pouvant s'écrire sous la forme $2 \times k$; un nombre impair est un entier pouvant s'écrire sous la forme $2 \times k + 1$, où k est un entier.

Nombres premiers

Définition. Un entier naturel p est dit *premier* s'il a exactement 2 diviseurs.

Comme 1 divise tout nombre et que p divise p, ces deux diviseurs sont 1 et lui-même.

Propriété. *Tout entier naturel supérieur à 2 peut s'écrire de façon unique, à l'ordre des facteurs près, comme le produit de facteurs premiers.*

Exemple. 360 est un entier naturel supérieur à 2.

$$\begin{aligned} 360 &= 2 \times 180 \\ &= 2 \times 2 \times 90 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 45 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

Tous les facteurs sont premiers : ce produit est la décomposition (unique) en produits de facteurs premiers de 360.

Une telle décomposition peut se rédiger comme suit :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Ainsi $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

La décomposition en produit de facteurs premiers est particulièrement utile dans les calculs sur les nombres entiers impliquant des puissances, des racines carrées et des fractions. Nous les verrons dans les exercices à venir.

Puissances entières d'un nombre entier

Définition. Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre a :

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (si $a \neq 0$)
- $a^0 = 1$

a^n, lu « a puissance n » ou « a exposant n » est appelé *puissance n-ième de a* et n est appelé l'*exposant*.

http://perpendiculaires.free.fr/

Propriété. *Pour tous nombres a et b et pour tous entiers n et m :*

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ *(si $a \neq 0$)*
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $(a^n)^m = a^{n\times m}$

Fractions irréductibles

Définition. Une fraction $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers ($b \neq 0$) est dite écrite sous forme irréductible si a et b n'ont aucun diviseur commun.

Propriété .1. *Toute fraction admet une unique forme irréductible.*

Exercices

1. (a) Rappeler un critère permettant d'affirmer qu'un entier est divisble par 3, sans avoir à poser la division euclidienne.
   En utilisant ce critère, préciser quels sont les multiples de 3 parmi les entiers suivants : 152, 457, 1 289, 6 051 et 8 541.

   (b) Rappeler des critères permettant d'affirmer qu'un entier est divisible par 2, par 5, par 9, par 10.

   (c) Parmi les nombres suivants : 12, 30, 27, 246, 325, 4 238, 6 139, indiquer ceux qui sont des multiples de 2, de 3, de 4, de 5, de 6, de 8, de 9 ou de 10.

   (d) Pour chaque entier N suivant, remplacer le point par un chiffre manquant de façon que N soit divisible par 15 :
   - $N = 63.$
   - $N = 7.5$
   - $N = .25$

2. (a) Rappeler une défintion d'un nombre premier.
   Pour déterminer la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un entier naturel N donné, ÉRATOSTHÈNE, au II$^{\text{è}}$ siècle av. J.-C., a proposé l'algorithme suivant, traduit en langage moderne et appelé *crible d'*ÉRATOSTHÈNE :
   i. Écrire la liste L de tous les nombres entiers de 2 à N.
   ii. Garder le premier entier de la liste L et éliminer tous ses multiples dans L.
   iii. Passer à l'entier suivant dans L, le garder et éliminer tous ses multiples dans L.
   iv. Poursuivre ainsi jusqu'à avoir atteint la fin de la liste L.

   Appliquer cet algorithme avec $L = 100$.

3. Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres premiers :
   - 157
   - 311
   - 821
   - 762
   - 1 023
   - 231
   - 468
   - 861
   - 83

4. Décomposer chaque nombre en produit de nombres premiers.
   - 2 835
   - 1 323
   - 1 001
   - 45 600

5. Décomposer 800 et 650 en produits de facteurs premiers puis simplifier la fraction $\frac{650}{800}$.

6. Simplifier chaque fraction pour obtenir une fraction irréductible.
   - $\frac{48}{56}$
   - $\frac{63}{48}$
   - $\frac{45\,600}{7\,650}$
   - $\frac{56}{63}$
   - $\frac{540}{506}$
   - $\frac{12\,789}{5\,481}$

7. Effectuer les sommes suivantes.
   - $A = -\frac{12}{7} + \frac{5}{14}$
   - $B = \frac{8}{35} + \frac{6}{15}$
   - $C = \frac{23}{26} - \frac{12}{39}$

8. Effectuer les produits suivants.
   - $D = -\frac{63}{30} \times \frac{60}{-4}$
   - $E = \frac{10}{15} \times \frac{7}{20}$
   - $F = -\frac{5}{12} \times \frac{18}{13}$

9. Effectuer les divisions suivantes.
   - $G = \dfrac{\frac{21}{-24}}{\frac{14}{-32}}$
   - $H = \dfrac{\frac{45}{18}}{12}$
   - $I = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}$

10. Effectuer les calculs suivants.
    - $A = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\frac{7}{3} \times 8}{21}$
    - $C = \dfrac{\left(\frac{24}{15} + \frac{35}{25}\right) \times 20}{33}$
    - $B = \dfrac{\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) \times 3}{2}$
    - $D = \dfrac{\frac{5}{6} - \frac{5}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$