

## Proportions

**Définition.** On a les définitions suivantes :

**Population :** Une *population*  $E$  est un ensemble faisant l'objet d'une étude statistique.

**Sous-population :** Un échantillon d'individus (ou partie ou sous-ensemble) d'une population  $E$  est une *sous-population* de  $E$ .

**Élément :** Un élément de la population est un *individu*.

**Effectif :** Le nombre d'individus de la population est l'*effectif* de la population.

**Proportion :** Soit  $A$  une sous-population d'effectif  $n_A$  d'une population  $E$  d'effectif  $n_E$ .

La proportion  $p_A$  (ou fréquence) de  $A$  dans  $E$  est le quotient défini par

$$p_A = \frac{n_A}{n_E}$$

*Remarques.*

- Une proportion est un nombre réel compris entre 0 et 1 et n'a pas d'unité.
- Une proportion s'exprime souvent sous forme de pourcentage. On écrit aussi bien  $p = \frac{3}{5}$  ou  $p = 0,6$  ou  $p = \frac{60}{100} = 60\%$ .
- Si on connaît deux des trois nombres  $n_A$ ,  $n_E$  et  $p_A$ , on peut calculer le troisième :

$$\text{Comme } p_A = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{alors } n_A = p_A \times n_E \quad \text{ou encore } n_E = \frac{n_A}{p_A}.$$

## Évolutions

**Définition.** Dire qu'une quantité  $Q$  évolue de  $t\%$ , où  $t$  est un réel quelconque, signifie que  $Q$  est multiplié par  $k = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$  qui est appelé *coefficient multiplicateur* correspondant à une évolution de  $t\%$ .

*Remarques.*

- Cette évolution est une augmentation si  $t$  est positif et une diminution si  $t$  est négatif.
- Lorsque le pourcentage est exprimé sous forme décimale, par exemple  $+0,10$  pour une hausse de  $+10\%$ , la formule devient  $k = 1 + t$ .

**Propriété.** Le pourcentage d'évolution  $t$  d'une grandeur passant de la valeur initiale  $V_I \neq 0$  à la valeur finale  $V_F$  est donné par :  $t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$ .

Le coefficient multiplicateur  $k$  d'une grandeur passant de la valeur initiale  $V_I \neq 0$  à la valeur finale  $V_F$  est donné par :  $k = \frac{V_F}{V_I}$ .

On a de plus  $t = k - 1$ .

*Remarque.* Le pourcentage  $t$  ainsi obtenu est sous forme décimale.

## Évolutions successives

**Définition.** Soit  $t$  et  $t'$  deux taux d'évolution.

Lorsqu'on applique à une quantité  $Q$  une évolution de  $t\%$  pour obtenir une quantité  $Q'$  et qu'on applique à la quantité  $Q'$  une évolution de  $t'\%$  pour obtenir une quantité  $Q''$ , on dit que  $Q$  a subi deux évolutions *successives* de  $t\%$  et de  $t'\%$ .

Le taux d'évolution permettant de passer de  $Q$  à  $Q''$  est appelé *taux d'évolution globale*.

## Évolutions réciproques

**Définition.** Soit  $t$  et  $t'$  deux taux d'évolution successifs. Si le taux d'évolution globale est nul alors on dit que  $t$  et  $t'$  sont des *évolutions réciproques*.

# Exercices d'entraînement

## Proportions

- 35,89 millions de foyers fiscaux ont été recensés en France en septembre 2013. Sur ce total, 18,94 millions d'entre eux étaient imposables au titre de leur revenu de 2012.  
Calculer la proportion des foyers imposables en septembre 2013. Tra- duire le résultat avec un pourcentage arrondi à 0,01 près.
- Dans une grande entreprise, les  $\frac{5}{8}$  des 720 employés sont des commer- ciaux.  
Combien y a-t-il de commerciaux dans l'entreprise?
- Dans une administration, 23 employés sont des personnels administra- tifs, ce qui représente 18 % des employés.  
Combien y a-t-il d'employés dans cette administration?
- Un lycéen a travaillé pendant les vacances. Sur sa feuille de paye est ins- crit :
  - Salaire brut : 1 200,00 €
  - Retenue Sécurité Sociale : 151,20 €Quel pourcentage du salaire brut, la retenue représente-t-elle?
- En 2004, la population active française comptait 27 455 000 individus, dont 12 680 000 femmes. Quel pourcentage de la population active re- présentaient les femmes?
- 28 % de la surface du territoire français, ce qui représente environ 154 000 km<sup>2</sup>, est constitué de terrain boisé (forêts, etc.). Quelle est la sur- face totale du territoire français?
- Lors de l'achat d'un article coûtant 1 625 €, je dois verser un acompte de 130 €. Quel pourcentage de la somme totale cet acompte représente-t- il?
- Lors de l'achat d'un autre article, je dois verser un acompte de 15 %, et il me restera alors à déboursier 1 700 €. Quel est le prix de cet article?
- Dans la commune de Vachelle, sur 1 742 votants, 42 % ont choisi le candidat DESIRE. Combien cela fait-il de voix?
  - M. DESIRE a obtenu 428 voix sur 1 312 votants à Port-Blanc et 323 voix sur 918 votants à Saint-André. Où a-t-il fait le meilleur score en pourcentage?
- Une personne passe une petite annonce dans un journal diffusé dans 18 % des foyers d'un département. Elle passe aussi cette annonce dans un autre journal diffusé, lui, dans 25 % des foyers du département. À quelle condition cette personne peut-elle espérer que son annonce touche 43 % des foyers du département? Pourquoi?
- Vrai ou faux? Dans une entreprise 21 % des employés a moins de 25 ans et 36 % a plus de 45 ans; donc 43 % du personnel de cette entreprise a entre 25 et 45 ans.
- Dans cette entreprise, 40 % des employés ont suivi le stage de formation en comptabilité, tandis que 48 % ont suivi le stage d'anglais. Sachant que 35 % des employés ont suivi ces deux stages, quel pourcentage des em- ployés de l'entreprise peut prétendre avoir suivi au moins l'un des deux stages?
- Vrai ou faux? Dans cette même entreprise, 18 % des employés (hommes) a une ancienneté inférieure à 5 ans, tout comme 22 % des employées (femmes). Donc 40 % des employés de l'entreprise a une ancienneté in- férieure à 5 ans.
- Dans un établissement scolaire, il y a 30 % de garçons et 30 % des filles sont internes. Sachant que le pourcentage d'internes dans l'établisse- ment est de 27 %, quel est le pourcentage de garçons internes?
- Il y a 800 élèves au Lycée JACQUES CARTIER. dans ce Lycée :
  - 15 % des élèves de Lycée sont des filles de Première;
  - 48 % des élèves de Première sont des filles;
  - 25 % des filles du Lycée sont en Première.
  - Calculer l'effectif des filles de Première.

- (b) En déduire l'effectif des élèves de Première, puis des filles dans ce Lycée.
- (c) Compléter le tableau des effectifs :

	Fille	Garçon	Total
Première			
Autres			
Total			

- (d) Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce Lycée.

16. Dans une entreprise, 70 % des salariés sont des hommes, 6 % des femmes sont cadres et 4 % des hommes sont cadres.
- (a) Quel est le pourcentage des cadres dans cette entreprise?
- (b) Faire un tableau, en pourcentages de salariés de l'entreprise, résumant la situation.
- (c) L'entreprise compte 23 cadres. Quel est le nombre total de salariés?
- (d) Faire un tableau, en nombres de salariés de l'entreprise, résumant la situation.
17. Un Lycée compte 1 250 élèves; 26 % d'entre eux sont en classe de Première et 24 % des élèves de Première sont en Première ES.
- (a) Quel calcul doit-on effectuer pour déterminer le nombre d'élèves de Première du Lycée?
- (b) Quel calcul doit-on faire pour déterminer le nombre d'élèves en Première ES dans ce Lycée?
- (c) Combien y a-t-il d'élèves en Première ES dans ce Lycée? Quel pourcentage cela représente-t-il vis-à-vis de l'ensemble des lycéens?
- (d) Quel calcul aurait-on pu faire directement pour déterminer ce pourcentage?
18. 75 % des foyers d'un pays ont une connexion Internet, dont 80 % de type ADSL. Quel est le pourcentage de foyers équipés d'une connexion ADSL dans ce pays?

19. Dans une population, 65 % des individus partent en vacances et 20 % de ceux qui partent en vacances vont à la montagne. Quelle est la proportion de départs à la montagne dans cette population?

20. Considérons les statistiques (fictives) suivantes :

- en janvier 2 004 : 2 183 500 chômeurs, dont 624 200 jeunes (moins de 25 ans);
- en janvier 2 005 : 2 008 700 chômeurs, dont 617 400 jeunes.

Le nombre de chômeurs a-t-il diminué? Le nombre de jeunes chômeurs a-t-il diminué? Le pourcentage de jeunes chômeurs parmi l'ensemble des chômeurs a-t-il diminué?

21. Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1 997	1 998	1 999	2 000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

- (a) De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire?
- (b) De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire?

## Évolutions

1. Calculer les coefficients multiplicateurs dans chacun des cas suivants :
- hausse de 20 %;
  - baisse de 5,2 %;
  - hausse de 300 %;
  - baisse de 15 %;
  - hausse de 100 %;
  - hausse de 0,1 %;
  - baisse de 85 %;
  - baisse de 100 %.
2. Donner les pourcentages de hausse ou de baisse associés aux coefficients multiplicateurs suivants :
- 1,25;
  - 3;
  - 1,0049;
  - 0,5;
  - 0,98;
  - 1,001;
  - 1,0101;
  - 0,999;
  - 1,175;
  - 1,01;
  - 0,875;
  - 0,1.

3. Donner le pourcentage d'évolution pour une grandeur qui passe :
- de 12 540 à 13 620;
  - de 5,7 à 2,6;
  - de 21 000 à 84 000.
4. En août un loyer était de 564 €. Un an plus tard il est de 589 €. Quelle est son évolution en pourcentage?
5. Le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2004 était de 124 000 €. En 2005, les prévisions donnent un chiffre d'affaire de 117 000 € seulement. Quelle est son évolution en pourcentage?
6. Pour un même produit, le magasin A propose 20 % de produit en plus pour la même prix et le magasin B propose 20 % de remise sur le prix pour une même quantité.  
Si 1 Kg de produit coûte 100 euros, quelle est la proposition la plus avantageuse pour le client?
7. Après une augmentation de 15 %, un produit coûte 89,70 €. Quel était son prix initial?
8. Dire que la TVA est de 19,6 % revient à dire que le prix hors taxe (HT) a été augmenté de 19,6 % de TVA pour obtenir le prix toutes taxes comprises (TTC).
- (a) Par quel nombre doit-on multiplier le prix HT pour obtenir le prix TTC?
  - (b) Un article vaut 120 € HT. Combien va-t-on le payer en magasin?
  - (c) Vous payez un article en magasin (donc TTC) à 200 €. À combien s'élève le prix HT et la TVA en €?
  - (d) Laquelle de ces deux propositions est la plus avantageuse :
    - Proposition 1 : Faire une remise de 10 % sur le prix HT, puis appliquer la TVA.
    - Proposition 2 : Appliquer la TVA, puis faire une remise de 10 % sur le prix TTC.
9. Au moment des soldes, un magasin propose une baisse de 10 % sur un article, suivie d'une nouvelle baisse de 20 % sur ce même article. Quel est le taux d'évolution globale de cet article?
10. Le prix d'un article augmente de 22 % puis diminue de 15 %. Quel est le taux d'évolution globale de cet article?
11. Le prix d'un produit subit successivement une hausse de 12 %, une baisse de 5 %, une baisse de 8 % et une hausse de 2 %. Quel est le taux d'évolution globale du prix de ce produit?
12. Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2 % par mois pendant un an, quel sera le taux d'évolution globale du nombre de chômeurs sur l'année?
13. Un client veut acheter un véhicule qui coûtait 17 000 € le mois dernier mais qui, depuis, a augmenté de 4 %. Le vendeur consent une remise de 3,85 %. Le modèle coûte-t-il plus ou moins de 17 000 €?
14. Après une augmentation de 5 % suivie d'une hausse de  $t$  %, on obtient une hausse globale de 17,6 %. Combien vaut  $t$  ?
15. À la bourse de Paris, l'action Renault :
- a augmenté de 1,45 % entre le 10 juin 2000 et le 11 juin 2000;
  - a baissé de 0,5 % entre le 10 juin 2000 et le 12 juin 2000.
- Quelle a été son évolution entre le 11 juin 2000 et le 12 juin 2000?
16. Après deux augmentations successives de  $t$  % le prix d'un produit a globalement augmenté de 20 %. Combien vaut  $t$  ?
17. Après une augmentation de  $t$  % suivie d'une baisse de  $t$  %, on obtient une baisse globale de 4 %. Combien vaut  $t$  ?
18. Un article subit une augmentation de 10 %. Quel est le taux d'évolution réciproque?
19. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 2 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 6 % ?
20. Est-il pertinent de dire qu'une hausse de 1 % suivie d'une baisse de 3 % suivie d'une hausse de 2 % sont approximativement équivalentes à une évolution globale de 0 % ?
21. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 20 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 60 % ?