Chapitre 12

Systèmes d'équations

Sommaire

Dans tout ce chapitre, on considère que le plan est muni d'un repère quelconque.

12.1 Rappels

On a vu dans le chapitre 9 les choses suivantes :

Propriété. *Toute droite $\mathscr{D}$ du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ ou $ax + by = c$ où a, b et c sont des réels avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ appelée équation cartésienne de $\mathscr{D}$*

Propriété. *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites du plan d'équations respectives $ax+by+c = 0$ et $a'x+b'y+c' = 0$.*

$$\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$$

12.2 Activités d'introduction

ACTIVITÉ 12.1 (Droites parallèles, droites sécantes)**.**
Droites parallèles.

1. On considère les droites $\mathscr{D}_1 : 2x+5=0$ et $\mathscr{D}_2 : x=-1$.
   Expliquer pourquoi elles sont parallèles.
2. On donne $\mathscr{D}_3 : y=3x+4$, $\mathscr{D}_4 : 3x-y=9$ et $\mathscr{D}_5 : 3x+y=0$.

   Reconnaître parmi ces trois droites celles qui sont parallèles.

Droites sécantes.
On considère les droites $\mathscr{D}_1 : 2x+y=5$ et $\mathscr{D}_2 : 3x-5y=3$.

1. Montrer qu'elles sont sécantes.
2. Tracer ces deux droites et lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection I.
3. Expliquer pourquoi les coordonnées $(x\,;\,y)$ de I vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-5y=3 \end{cases}$$

ACTIVITÉ 12.2 (Résolution par combinaisons linéaires)**.**
On cherche à étudier le point d'intersection, s'il existe, des droites suivantes : $\mathscr{D}_1 : 20x+30y-219=0$ et $\mathscr{D}_2 : 15x+25y-174=0$.

1. Dans un repère, représenter ces deux droites.
2. Graphiquement, quelles semblent être les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites ?
3. Vérifier par le calcul si ce point appartient à l'une des deux droites ou bien aux deux.

   Le point d'intersection a des coordonnées $(x\,;\,y)$ qui vérifient donc les deux équations en même temps. On dit qu'elles sont solutions d'un système $\mathscr{S}$ que l'on écrit sous la forme :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 20x+30y-219=0 \\ 15x+25y-174=0 \end{cases}$$

4. Mon professeur propose de transformer ce système sous la forme :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 60x+90y-657=0 \\ -60x-100y+696=0 \end{cases}$$

   (a) Quelles opérations a-t-il effectuées ? Quels savantages y voyez-vous ?
   (b) En déduire alors la valeur de y.
   (c) Remplacer cette valeur dans les deux équations pour vérifier que vous obtenez la même valeur de x.
   Donner alors les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

5. Essayer d'effectuer des opérations sur les équations pour éliminer y en partant du système $\mathscr{S}$ de départ.

   Retrouver alors la même valeur de x précédente.

6. Procéder de la même manière pour résoudre par le calcul le système obtenu dans l'activité 12.1 précédente.

ACTIVITÉ 12.3 (Résolution par substitution)**.**
Au café « Chez Jules », des professeurs de Maths et de Physique-Chimie se retrouvent après les cours.
Ils commandent 2 cafés et 3 chocolats. Le serveur leur réclame 10,10 €.
Puis quatre autres collègues arrivent et commandent 3 cafés et 1 chocolat.
Cette fois-ci, le serveur leur réclame 7,10 €.
Pour obtenir que chacun paye ce qu'il a commandé, on cherche à déterminer le prix d'un café et d'un chocolat.
On notera x le prix d'un café et y celui d'un chocolat.

1. Donner l'équation qui traduit le total de 10,10 €.
2. Faire de même pour l'équation qui traduit le total de 7,10 €.
3. Vérifier qu'on obtient un système équivalent à : $\mathscr{S} : \begin{cases} 2x+3y-10,1=0 \\ 3x+y-7,1=0 \end{cases}$
4. Dans la deuxième équation, isoler l'inconnue y pour l'exprimer en fonction de l'inconnue x.
5. Dans la première équation, remplacer l'inconnue y par le résultat de la question précédente.

   On obtient ainsi une nouvelle équation dans laquelle il n'y a plus qu'une inconnue x.
6. Résoudre cette dernière équation pour trouver la valeur de x.
7. Remplacer alors cette valeur dans l'équation de la question 4 pour trouver la valeur de y.
8. Rédiger une conclusion au problème posé.
9. Procéder de la même manière pour résoudre par le calcul le système obtenu dans l'activité 12.1.

12.3 Bilan et compléments

12.3.1 Définition

Définition 12.1. On dit qu'un couple $(x; y)$ vérifie le système suivant de deux équations linéaires de 1^{er} degré à deux inconnues

$$\mathscr{S} \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des constantes, si ce couple vérifie les deux équations

Remarques.

- 1^{er} degré signifie que les inconnues sont « à la puissance 1 » c'est-à-dire qu'il n'y a pas de carrés, de cubes, de quotient, de racines, etc.
- On peut rencontrer des systèmes à une, deux, trois, etc. inconnues même si dans ce chapitre on se limitera essentiellement à deux systèmes à 2 inconnues.

12.3.2 Interprétation graphique

L'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant une équation de la forme $ax+by+c=0$ est, on l'a vu, une droite.
L'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant un système de deux équations linéaires de 1^er^ degré à deux inconnues peut donc être interprété comme l'ensemble des points appartenant à deux droites.

- Si elles sont sécantes, c'est un seul point, donc le système admet un unique couple solution $(x\,;\,y)$;
- Si elles sont strictement parallèles le système n'admet aucune solution ;
- Si elles sont confondues, le système a un nombre infini de solutions.

Propriété 12.1. *Soit $\mathscr{S}$ le système d'équation*

$$\mathscr{S}\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

- *$\mathscr{S}$ a une unique solution $(x\,;\,y)$ si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$;*
- *sinon $\mathscr{S}$ a soit une infinité de solution, soit aucune solution.*

Le nombre $ab'-a'b$ est parfois appelé déterminant du système.

Preuve. Les droites d'équation $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont sécantes si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$, sinon elles sont parallèles.
Dans ce cas elles peuvent être confondues (une infinité de points d'intersection) ou distinctes (aucun point d'intersection). ◊

12.3.3 Résolution d'un système

Deux méthodes ont été vues en activités, elle peuvent être utilisées en même temps (on trouve l'une des inconnues par une méthode puis l'autre par l'autre méthode) :

Par combinaisons linéaires

Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des niombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine. On trouve alors la valeur de l'inconnue restante. On peut procéder de la même manière pour trouver l'inconnue éliminée lors de la première étape.

Par substitution

Cette méthode consiste à isoler dans l'une des équations une des inconnues et de la remplacer dans l'autre équation par la valeur obtenue. On trouve alors la valeur de l'inconnue restante. On peut alors retrouver l'inconnue choisie au départ.

12.4 Exercices

D'autres exercices que ceux présentés ci-dessous seront puisés dans le manuel de la classe.

EXERCICE 12.1 (Prévoir sans calcul)**.**
Pour chacun des systèmes suivants déterminer, sans le résoudre, s'il admet une solution unique. Dans les cas où le système n'admet pas de solution unique, préciser ce que l'on peut dire de l'ensemble solution.

1. $\begin{cases} 4x-6y=-26 \\ 5x+2y=-4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -2y+6x=5 \\ -9x+3y=-7,5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x=6y+7 \\ 8,5-2,5x+5y=6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -3x+4y=9-5x \\ -x+5y=25 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 3x+7y=5 \end{cases}$

EXERCICE 12.2 (Quelle méthode choisir ?)**.**
Pour résoudre les systèmes, on dispose depuis la classe de troisième de deux méthodes principales et d'une troisième qui combine les deux précédentes.

1. Décrire ces trois méthodes.
2. Pour chacun des systèmes suivants, choisir la méthode de résolution la plus appropriée :
   (a) $\begin{cases} 2x+7y=1 \\ 2x-7y=-3 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x-y=7,5 \\ 3x+y=9 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} x-2=1+2y-5 \\ 3x=1-(y-1) \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} -8(x-1)-7y-18=0 \\ 5y+8x=16 \end{cases}$

EXERCICE 12.3 (Système 2 × 2 : équilibre sur le marché pour un bien)**.**
Une entreprise possède le monopole de la vente d'un certain type de café. Ce café est vendu sous forme de paquets d'un kg.
Une étude de marché a fourni les résultats suivants.

- **Offre :** Compte tenu des coûts de production, l'entreprise a fixé le prix minimal de vente à 2 €.
  Pour un prix de vente de 6 €, la production idéale pour l'entreprise est de 250 000 paquets.
- **Demande :** Compte tenu du marché, on estime que pour un prix de vente de 5,5 €, la demande serait de 50 000 paquets et pour un prix de vente de 3 €, elle serait de 175 000 paquets.

1. **Fonction d'offre**
   On considère le marché du point de vue de l'entreprise qui se préoccupe avant tout de sa rentabilité.
   On note p_o le prix de vente (en €) et Q_o le nombre optimal de paquets produits par l'entreprise (en milliers d'unités) pour ce prix de vente p_o.
   (a) Vérifier que la fonction $f : Q_o \longmapsto p_o = 0,016Q_o + 2$ vérifie les conditions de l'offre.
   (b) Dans un repère, représenter graphiquement la fonction f (on placera les quantités en abscisses et les prix en ordonnées).
2. **Fonction de demande**
   On se place ici du point de vue du consommateur qui a tendance à réduire sa consommation quand les prix de vente augmentent.

On note p_d le prix payé (en €) et Q_d (en milliers d'unités) le nombre de paquets que les consommateurs sont prêts à acheter au prix p_d.
La fonction de demande notée g associe à Q_d le prix p_d.
On suppose que g est une fonction affine, $g : Q_d \longmapsto p_d = aQ_d + b$.

(a) En utilisant les conditions sur la demande, établir un système de deux équations dont $(a\,;\,b)$ est solution.

(b) Résoudre ce système et en déduire l'expresion de g.

(c) Sur le graphique précédent, représenter la fonction g.

(d) Quel est le prix maximal qu'accepterait de payer le consommateur ?

(e) Quelle est la quantité maximale que les consommateurs sont disposés à acheter ?

3. **Équilibre sur le marché**
L'idéal sur le marché serait que l'offre coïncide avec la demande. Ce point d'équilibre est atteint quand $p_o = p_d$ et $Q_o = Q_d$.

(a) Graphiquement où se situe ce point d'équilibre ?

(b) Déterminer algébriquement le prix de vente du paquet et la quantité produite à l'équilibre du marché.

EXERCICE 12.4 (Organiser la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues)**.**
On s'intéresse à des systèmes de trois équations à trois inconnues.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :
$(S) : \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - z = -4 \\ 5x - 2y - z = -7 \end{cases}$ Expliciter la méthode employée.

2. Voici la méthode exposée par GAUSS pour résoudre le système (S) (on appelle E_1 la première équation, E_2 la deuxième, E_3 la troisième) :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 0 & (E_1) \\ -4y - 16z = -4 & (E_2 - 3E_1) = (E_2') \\ -7y - 26z = -7 & (E_3 - 5E_1) = (E_3') \end{cases}$$
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 0 & (E_1) \\ y + 4z = 1 & \left(E_2' \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = (E_2'') \\ -7y - 26z = -7 & (E_3') \end{cases}$$
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 0 & (E_1) \\ y + 4z = 1 & (E_2'') \\ 2z = 0 & (E_3' + 7E_2'') \end{cases}$$

(a) En quoi le dernier système obtenu est-il intéressant pour la résolution de (S) ?

(b) Décrire la méthode permettant d'obtenir ce système.

(c) Donner l'ensemble solution de (S).

3. Résoudre à l'aide de la méthode précédente le système :
$$\begin{cases} x + 1,5y = 5,5 - z \\ 7x = 2y - z + 26 \\ 25x - 3y + 6z - 97 = 0 \end{cases}$$