Chapitre 9

Fonction exponentielle

Sommaire

9.1 Activités d'introduction

ACTIVITÉ 9.1 (Datation au carbone 14)**.**
Le carbone 14 est un isotope du carbone, noté ^{14}C, présent en infime proportion dans la nature mais de manière constante.
Quand un être vivant (animal ou végétal) meurt, les atomes de carbone 14 qu'il contient se désintègrent de telle sorte que le nombre de désintégrations par unité de temps (appelée *vitesse de désintégration*) est proportionel à la quantité d'atomes encore présents et, comme il n'y a en général pas d'ajouts d'atomes après sa mort, la proportion d'atomes de carbone 14 restants rapportée aux nombres d'atomes estimés au moment de sa mort permet de dater sa mort.

On note λ le coefficient de proportionnalité.
Le graphique de la figure 9.1 page précédente représente cette désintégration au cours du temps.
Les points A, B, C et D sont de coordonnées respectives $(20;78,51)$, $(40;61,63)$, $(100;29,82)$ et $(120;23.41)$ (l'ordonnée est un arrondi au centième).

1. (a) Vérifier sur les deux intervalles de temps [20 ; 40] et [100 ; 120] que la propriété énoncée précédemment est bien vérifiée.
   (b) On appelle demi-vie du carbone 14 le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de ses atomes. Estimer à l'aide de la courbe représentative cette demi-vie.
2. (a) Soit :

- $N(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un corps à l'instant t
- h une durée donnée.

Exprimer en fonction de t et de h le nombre de désintégrations entre les instants t et $t+h$.

(b) La vitesse de désintégration du carbone 14 à l'instant t est donnée par la limite du taux de variation de la fonction N lorsque la durée h tend vers 0 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\text{Nombre de désintégrations entre } t \text{ et } t+h}{h}$$

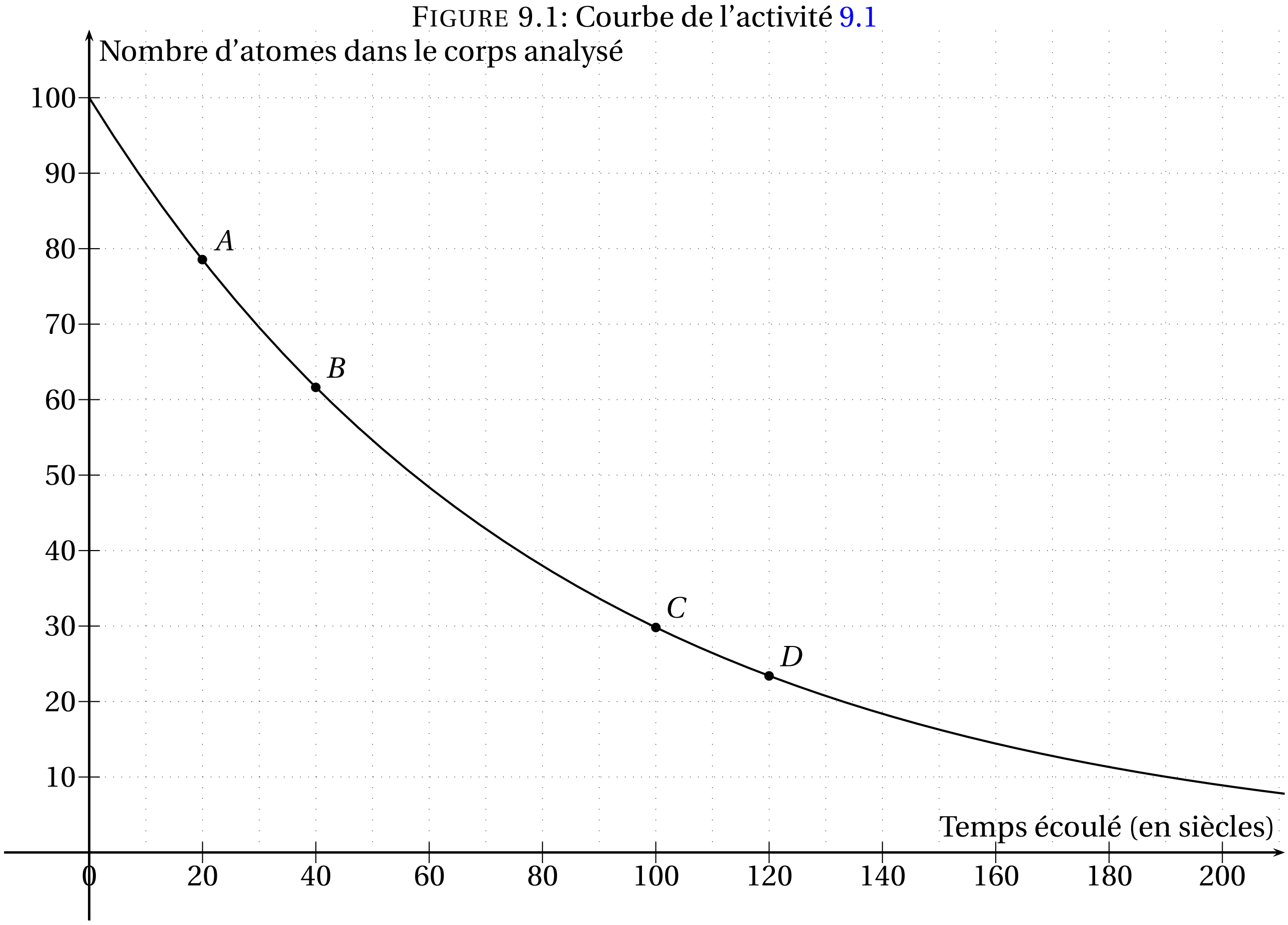
En déduire une expression de la vitesse de désintégration en fonction de t.

(c) Déterminer, d'après l'énoncé, une relation entre la vitesse de désintégration et le nombre d'atomes.

Cette relation est appelée « équation différentielle » caractéristique de la fonction N.

3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.
Montrer que, s'il existe un réel λ tel que, pour tout réel t, $N(t) = f(\lambda t)$, alors la fonction N est solution de l'équation différentielle précédente.

FIGURE 9.1: Courbe de l'activité 9.1



ACTIVITÉ 9.2 (Une équation dont l'inconnue est une fonction)**.**
La principale façon de modéliser une situation est la suivante : on suppose qu'une quantité est fonction d'une autre. On observe ce que doit vérifier alors cette fonction et on essaye de l'obtenir. C'est rare que cela suffise.
On observe alors ce que doit vérifier la dérivée de cette fonction et l'on obtient parfois un lien entre la fonction et sa dérivée (ou parfois la dérivée de sa dérivée...). Ce lien est parfois une équation qui implique f et f' (ou f''). Une telle équation est appelée « équation différentielle ».
De nombreux problèmes de physique, d'économie, de sciences, etc. mettent en jeu ces équations différentielles. Et c'est alors vers les mathématiques qu'on se tourne pour les résoudre et finaliser la modélisation.
C'est ainsi, par exemple, qu'on a vu dans l'activité précédente que si nous trouvions telle que $f'(x) = f(x)$, alors nous pourrions modéliser la désintégration du nombre d'atomes de carbone 14.

On considère ici une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$
Le but de cette activité est d'étudier quelques propriétés remarquables de cette fonction, sans pour autant connaître son expression.
On admettra qu'une telle fonction existe.

1. Soit k une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $k'(x) = 0$. Proposer trois expressions possibles de $k(x)$.

   Pour la suite on admettra que les seules fonctions dont la dérivée est nulle sur un intervalle I sont les fonctions ....sur I.

2. Soit h la fonction définie pour tout réel x par :

$$h(x) = f(x) \times f(-x)$$

   (a) Montrer que, pour tout réel x, $h'(x) = 0$.
   Indication : Penser à la dérivée de $u \times v$ et à celle de $f(ax+b)$.
   (b) En déduire que, pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$.
   (c) Justifier que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

3. Supposons qu'il existe une autre fonction, g, définie sur $\mathbb{R}$, telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$. Soit $i(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.
   (a) Justifier que i est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $i'(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour i ?
   (c) Déterminer $i(0)$.
   (d) Conclure.

4. Soit $j(x) = \frac{f(x+b)}{f(b)}$
   (a) Justifier que j est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer une expression de $j'(x)$.
   (c) Déterminer $j(0)$.
   (d) On rappelle qu'on a démontré que la fonction f était l'unique fonction vérifiant $f = f'$ et $f(0) = 1$. Que peut-on en conclure pour j ?
   (e) En déduire que, pour tous réels a et b, $f(a+b) = $ ....
   (f) En déduire que, pour tout réel a et pour tout entier naturel n $f(na) = $ ....

9.2 Exponentielle

La plupart des propriétés ont été démontrées en activité. Les autres, sauf exception, seront admises.

9.2.1 Fonction exponentielle

Théorème 9.1. *Il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :*

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f' = f$$

On l'admettra.
On a démontré que cette fonction était unique dans les activités.

Définition 9.1. On appelle *fonction exponentielle* l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note exp.

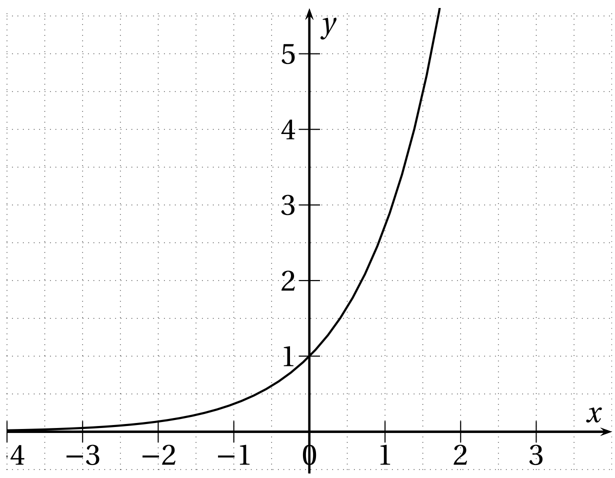
Ainsi $\exp(0) = 1$.
On a démontré dans les activités que cette fonction ne s'annulait jamais. On démontrera plus tard qu'elle est strictement positive.

Propriété 9.2. *Pour tout x, $\exp(x)$ est strictement positif.*

Enfin, comme $(\exp(x))' = \exp(x)$ strictement positif :

Propriété 9.3. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Sa courbe représentative est la suivante :



9.2.2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

Propriété 9.4. *Pour tous réels a et b :*

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Preuve. La preuve a été faite en activité. ◊

Il en découle les propriétés algébriques suivantes :

Propriété 9.5. *Pour tous réels a, b et tout entier naturel n :*
- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Le dernier point est énoncé pour n entier naturel mais on démontre facilement qu'il est aussi vrai pour $n \in \mathbb{Z}$ et on admettra qu'il l'est tout autant quand $n \in \mathbb{R}$. Il s'énonce alors de la manière suivante :

Propriété 9.6. *Pour tous réels a et b,* $\exp(a \times b) = (\exp(a))^b = (\exp(b))^a$.

9.2.3 e

Définition 9.2. Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle. Ainsi $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Remarque. Ce nombre e est un nombre irrationnel, comme π, et il a, en mathématiques, autant d'importance que ce dernier. La calculatrice permet d'en obtenir une valeur approchée $\mathrm{e} \approx$ ....

La propriété 9.6 nous permet alors d'obtenir une nouvelle notation de la fonction exponentielle. En effet : $\exp(x) = \exp(x \times 1) = (\exp(1))^x = \mathrm{e}^x$.
On a alors :

Propriété 9.7. *Pour tout réel x,* $\exp(x) = e^x$.

Et les propriétés vues précédemment peuvent s'écrire alors :

Propriété 9.8. *Pour tous réels x et y :*
- $e^0 = 1$ *et* $e^1 = e$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- e^x *strictement positif et* $(e^x)' = e^x$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x \times y} = (e^x)^y = (e^y)^x$

9.3 Exercices

9.3.1 Technique

EXERCICE 9.1.
Exprimer en fonction du nombre e chacun des nombres suivants :
- $A = \exp(-2)$
- $B = \exp(0,8) \times \exp(1) \times \exp(1,2)$
- $C = \frac{\exp(1,23}{\exp(0,23)}$

EXERCICE 9.2.
Simplifier chacune des expressions :
- $A = \frac{\mathrm{e}^{1,5}}{\mathrm{e}}$
- $B = \left(\mathrm{e}^{0,5}\right)^4 \times \mathrm{e}^{-1}$
- $C = (\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x})^2$
- $D = \left(\frac{\mathrm{e}^{1+0,25x}}{\mathrm{e}^{1-0,25x}}\right)^2$

EXERCICE 9.3.
Développer chacune des expressions :
- $A = \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\right)^2$
- $C = \mathrm{e}^2\left(\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}\right)$
- $E = \left(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{-4}\right)^2$
- $B = \left(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}\right)\left(1 - \mathrm{e}^2\right)$
- $D = \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2\right)$
- $F = \left(1 - \mathrm{e}^3\right)\left(1 + \mathrm{e}^3\right)$

EXERCICE 9.4.
Factoriser les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e}$
- $C = \mathrm{e} - \mathrm{e}^3$
- $E = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{4x}$
- $B = \mathrm{e}^4 - 1$
- $D = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x$
- $F = 2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x$

EXERCICE 9.5.
Simplifer les expressions suivantes :

1. $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}$
2. $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 1)$
3. $\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)$
4. $\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x+1}$

EXERCICE 9.6.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x = 1$
2. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1}$
3. $\mathrm{e}^x - \mathrm{e} = 0$
4. $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}$
5. $\mathrm{e}^x \leqslant 0$
6. $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^{-2}$
7. $(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e})^2 = 0$
8. $\mathrm{e}^x(-2x+4) = 0$
9. $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^3)\mathrm{e}^x = 0$
10. $(x+2)(\mathrm{e}^x - 1) = 0$
11. $(x^2-1)\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{2x-1}\right) = 0$
12. $(1-\mathrm{e}^x)(x+4) = 0$

EXERCICE 9.7.
Étudier le signe des expressions suivantes selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

1. e^{x^2-5x}
2. $-2\mathrm{e}^{x+2}$
3. $\mathrm{e}^{x+3} - 1$
4. $\mathrm{e}^{-x+7} - \mathrm{e}$
5. $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x+3}$
6. $\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{5x}$
7. $\mathrm{e}^x + 1$
8. $-3x\mathrm{e}^x$
9. $x\mathrm{e}^x - x$
10. $(x^2 - x - 6)\mathrm{e}^x$
11. $\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^x)$
12. $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$

9.3.2 Études de fonctions comportant e^x

EXERCICE 9.8.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto (x-1)(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^2)$.

1. Observer sa courbe représentative dans un repère à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.
2. Étudier le signe de $f(x)$.
3. Vérifier graphiquement le résultat de la question précédente.

EXERCICE 9.9.
Dériver chacune des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$ sauf mention contraire) et étudier leurs variations :

- $f : x \longmapsto 3 - 2\mathrm{e}^x$
- $h : x \longmapsto (1+x)\mathrm{e}^x$
- $l : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{2+\mathrm{e}^x}$
- $g : x \longmapsto 1 + x + \mathrm{e}^x$
- $k : x \longmapsto \frac{1+x}{\mathrm{e}^x}$
- $m : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

EXERCICE 9.10.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
2. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
3. Donner le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en I. Tracer cette tangente dans le repère précédent.

EXERCICE 9.11.
Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \frac{2e^x}{e^x+3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

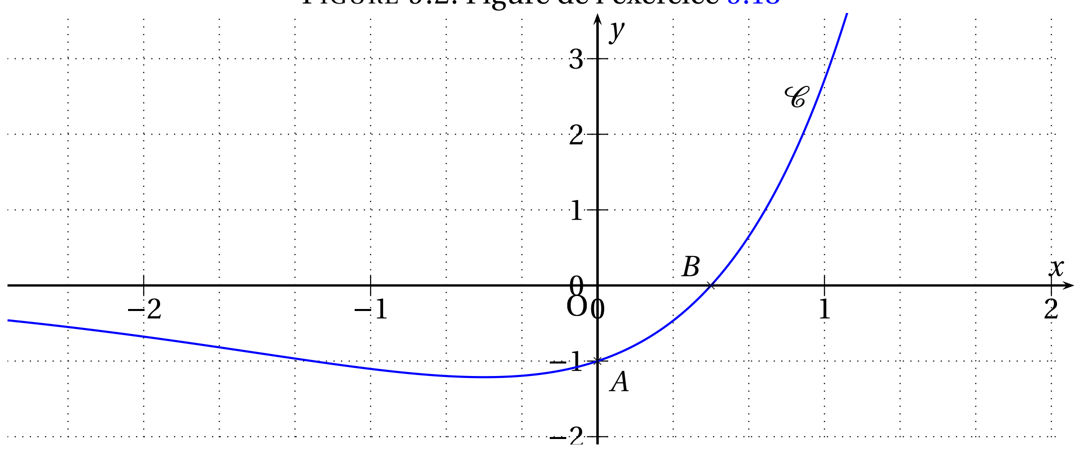
1. Déterminer une expression de $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que $0 < f(x) < 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 9.12.
Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto x+3+\frac{2}{e^x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$.
2. Déterminer le sens de variation de f.
3. $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente horizontale?
4. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+3$.
5. Tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ dans un même repère.

EXERCICE 9.13.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^x$; sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée sur la figure 9.2 de la présente page.

FIGURE 9.2: Figure de l'exercice 9.13

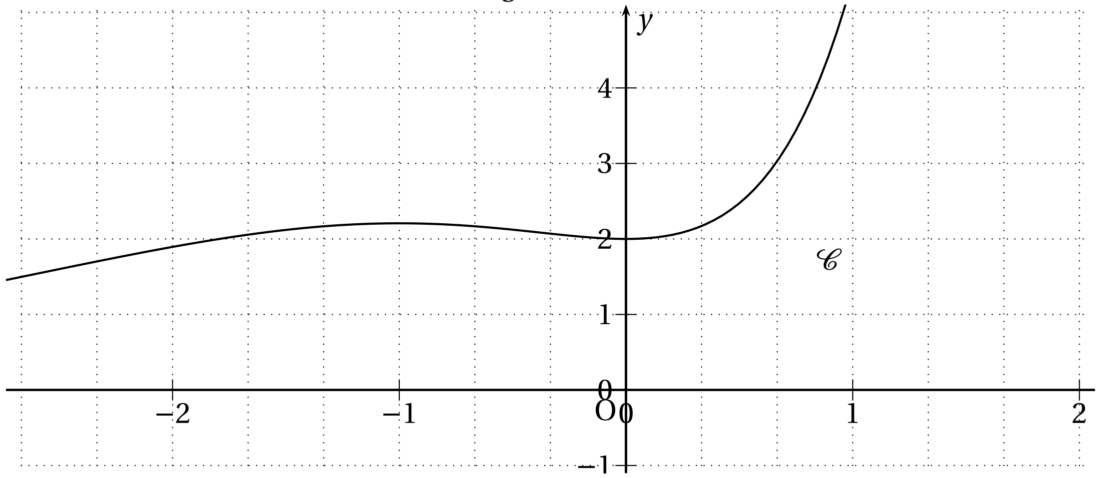


1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Montrer que f', la dérivée de f, peut s'écrire $f'(x) = (2x+1)e^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x puis en déduire le tableau des variations de f (on indiquera la valeur exacte du minimum de $f(x)$).
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et la tracer sur le graphique.

EXERCICE 9.14.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 2(x^2-x+1)e^x$. Une partie de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère de la figure 9.3 page suivante.

1. Conjecturer les variations de la fonction f.
2. Démontrer la conjecture énoncé dans la question précédente.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

FIGURE 9.3: Figure de l'exercice 9.14



9.3.3 Études de fonctions comportant e^{ax+b}

EXERCICE 9.15.
Dériver chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = e^{-0,5x}$
- $g(x) = x + e^{-x}$
- $h(x) = 3e^{1-2x}$

EXERCICE 9.16.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = (e^{x})^2$
3. $f(x) = e^{-x}$
4. $f(x) = 3e^{2x} - 5e^{x}$
5. $f(x) = xe^{-x}$
6. $f(x) = (2x+1)e^{2x}$
7. $f(x) = e^{-x}(1-x)+1$
8. $f(x) = \frac{2}{8+e^{-x}}$

EXERCICE 9.17.
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 3x - 2\right)e^{-x}$.
   (b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
3. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.

   Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0;8]$ dans le plan.

EXERCICE 9.18.
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0;+\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0;1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$

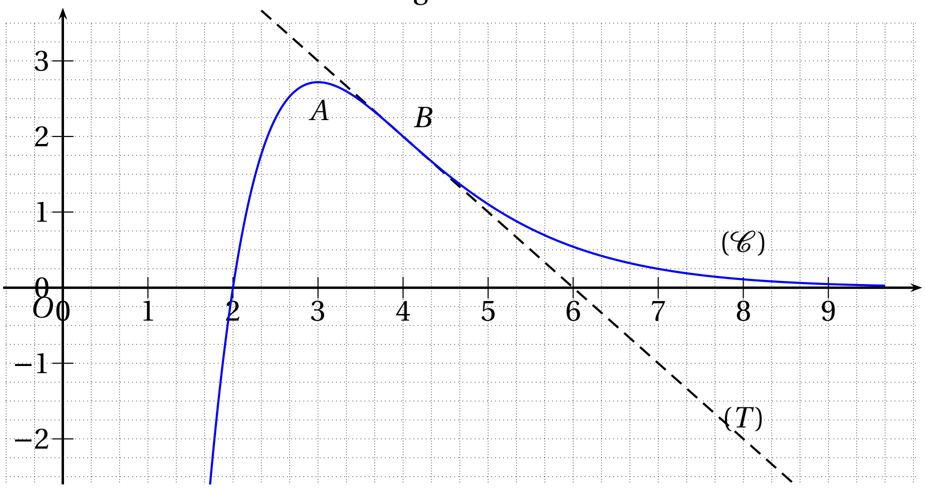
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

4. Calculer $f'(x)$, étudier son signe puis dresser le tableau de variations complet de f.

EXERCICE 9.19.

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée sur la figure 9.4 de la présente page, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur R. On note f' sa fonction dérivée. Les points $A(3\,;\,\mathrm{e})$ et $B(4\,;\,2)$ appartiennent à cette courbe. La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

FIGURE 9.4: Figure de l'exercice 9.19



Partie I : Lectures graphiques

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3\,;\,10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

Partie II : Étude de la fonction

La fonction f représentée sur la figure 9.4, est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

1. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.
   (b) Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie III : Étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leqslant x \leqslant 4,5$.

Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8\,;\,4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?