Un corrigé du devoir maison n°6

On lance n dés ($n \geqslant 1$). On note A l'évènement « obtenir au moins un 6 ».

1. Décrire $\overline{A}$.

Lorsqu'on lance plusieurs dés, l'évènement $\overline{A}$, contraire de A, est « n'obtenir aucun 6 ».

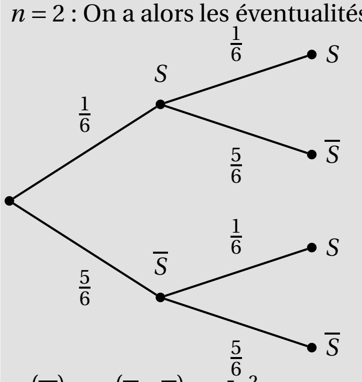
2. Exprimer en fonction de n la probabilité $p(\overline{A})$.

On n'attendait ici aucune explication, mais montrer la façon dont on a raisonné est appréciable pour le correcteur. Sans que cela soit une démonstration rigoureuse, on pouvait mettre en évidence quelques exemples, et généraliser.

Nommons S l'évènement : « Un 6 est obtenu au lancer de dé »

$n = 1$: Dans ce cas il n'y a qu'un seul lancer de dés et $p\left(\overline{A}\right) = p\left(\overline{S}\right) = \frac{5}{6}$

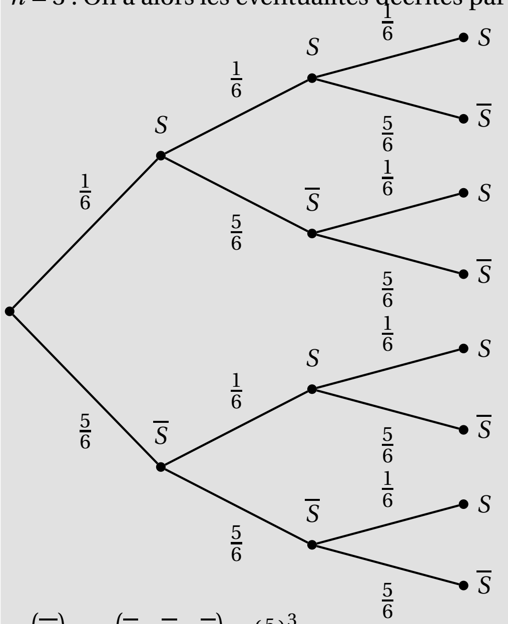
$n = 2$: On a alors les éventualités décrites par l'arbre ci-dessous :



$p\left(\overline{A}\right) = p\left(\overline{S} \cap \overline{S}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2$

Beaucoup ont oublié les parenthèses !

$n = 3$: On a alors les éventualités décrites par l'arbre ci-dessous :



$p\left(\overline{A}\right) = p\left(\overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

Finalement, pour tout $n \geqslant 1$, $p\left(\overline{A}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

$p(A) = 1 - p\left(\overline{A}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

4. Compléter le tableau suivant.

Il n'était pas précisé si la réponse attendue était en valeur exacte ou approchée, ce qui sous-entend en général, en mathématiques, que ce sont les valeurs exactes qui étaient attendues, cependant, ici, c'est plutôt un oubli de l'énoncé, les valeurs exactes n'ayant pas grand sens, aussi les deux ont été acceptées mais faire trop d'erreurs d'arrondis a été sanctionné.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$	0,167	0,306	0,421	0,518	0,598	0,665	0,721	0,767

5. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?

D'après le tableau ci-dessus, il faut lancer au moins 8 dés pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$.

6. Le lièvre et la tortue font la course.

   On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :

   - si le 6 sort, le lièvre avance ;
   - sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné.

   (a) Déterminer la probabilité que le lièvre l'emporte et celle que la tortue l'emporte.

   Des explications étaient attendues. Certain·e·s ont représenté l'arbre pondéré permettant de représenter les éventualités (voir la réponse à la question ci-dessous). On pouvait aussi rapprocher la course entre le lièvre et la tortue des questions précédentes.

   Appelons T l'évènement « la tortue l'emporte » et L l'évènement « le lièvre l'emporte ».
   La tortue ne gagne que si, au bout de 4 lancers de dés, aucun 6 n'est sorti. On a donc, avec $n=4$, $p(T)=p\left(\overline{A}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0,482$
   La lièvre, quant à lui, remporte la course si, au cours des 4 lancers, au moins un 6 est sorti. On a donc, avec $n=4$, $p(L)=p(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0,518$.

   (b) En combien de lancers de dés peut-on espérer finir la partie en moyenne ?

   Cette question a été la plupart du temps très mal traitée. Le terme « espérer » devait pourtant vous guider. Ce qui a été le cas pour certain·e·s, cependant la plupart du temps la variable aléatoire a été mal définie.

Commençons par définir la variable aléatoire X.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque course entre le lièvre et la tortue, associe le nombre de lancer de dés qu'il a fallu pour qu'elle se termine.
On a $X(\Omega)=\{1;2;3;4\}$ car il faut au moins un lancer de dés et au bout de 4 lancers de dés la partie est forcément terminée par la victoire de l'un ou l'autre.

Déterminons maintenant la loi de probabilité de X.
Pour que la partie termine en 1 lancer de dé, il faut que le lièvre l'emporte au premier lancer et donc qu'un 6 soit obtenu au premier lancer.
Donc $p(X=1)=p(S)=\frac{1}{6}$
Pour que la partie termine en 2 lancers de dé, il faut que le lièvre l'emporte au deuxième lancer et donc qu'autre chose qu'un 6 soit obtenu au premier lancer et qu'un 6 soit obtenu au second lancer.
Donc $p(X=2)=p\left(\overline{S}\cap S\right)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$
Pour que la partie termine en 3 lancers de dé, il faut que le lièvre l'emporte au troisième lancer et donc qu'autre chose qu'un 6 soit obtenu au premier et au deuxième lancers et qu'un 6 soit obtenu au troisième lancer.
Donc $p(X=3)=p\left(\overline{S}\cap\overline{S}\cap S\right)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$
Enfin pour que la partie termine en 4 lancers de dé, il faut que le lièvre n'ait pas gagné avant donc qu'aucun 6 n'ait été obtenu aux trois premiers lancers. Par contre, quoiqu'il arrive au quatrième lancer, l'un des deux l'emporte.
Donc $p(X=4)=p\left(\overline{S}\cap\overline{S}\cap\overline{S}\right)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$
Finalement :

k	1	2	3	4	Total
$p(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{216}$	$\frac{216}{216}$

Pour répondre à la question, il ne reste plus qu'à obtenir l'espérance de X :
$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{5}{36}+3\times\frac{25}{216}+4\times\frac{125}{216}=\frac{671}{216}\approx 3,106$
On peut espérer finir chaque partie en environ 3,106 lancers.