

Chapitre 11

Une application du produit scalaire : Équations cartésiennes de droite et de cercle

Sommaire

11.1 Produit scalaire et coordonnées	155
11.1.1 Rappels	155
11.1.2 D'autres définitions et propriétés du produit scalaire	156
11.2 Équations cartésiennes de droites	157
11.2.1 Rappels	157
11.2.2 Compléments	157
11.3 Équations cartésiennes de cercle	158
11.3.1 Rappels	158
11.3.2 Compléments	158
11.4 Exercices	158

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère **orthonormal**.

11.1 Produit scalaire et coordonnées

11.1.1 Rappels

Rappelons certaines choses déjà vues dans le chapitre 6.

Définition. Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan, on appelle produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, le nombre :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Et en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et en remarquant que $BC^2 = CB^2 = \|\overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2 = \|- \vec{v} + \vec{u}\|^2$, on peut généraliser le produit scalaire à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les représentants ne sont pas forcément de la même origine et obtenir une définition équivalente :

Définition. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

11.1.2 D'autres définitions et propriétés du produit scalaire

On rappelle que, dans un repère orthonormal où $\vec{u}(x; y)$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ACTIVITÉ 11.1.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit les vecteurs $\vec{u}(x; y)$, $\vec{v}(x'; y')$ et $\vec{w}(x''; y'')$.

1. Démontrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
2. Comparer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{u}$.
3. Comparer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
4. Soit k un réel. Comparer $(k\vec{u}) \cdot \vec{v}$ et $k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
5. Calculer $\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$. En déduire une autre expression du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Bilan et compléments

On vient de démontrer le théorème et les propriétés suivantes :

Théorème 11.1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormal où $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ alors Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Propriété 11.2. Le plan est muni d'un repère orthonormal où $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Propriété 11.3 (Règles de calcul). Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

On a aussi :

Propriété 11.4 (Identités remarquables). Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
3. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Preuve. En appliquant le deuxième point de la propriété précédente on obtient facilement ces résultats. $\diamond$

Propriété 11.5. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal. $\vec{u}(x; y)$ un vecteur.

$$x = \vec{u} \cdot \vec{i} \quad \text{et} \quad y = \vec{u} \cdot \vec{j}$$

Preuve. • $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{i}(1; 0)$ donc $\vec{u} \cdot \vec{i} = x \times 1 + y \times 0 = x$.

• $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{j}(0; 1)$ donc $\vec{u} \cdot \vec{j} = x \times 0 + y \times 1 = y$. $\diamond$

11.2 Équations cartésiennes de droites

11.2.1 Rappels

Définition. Soit $\mathcal{D}$ une droite et A et B deux points distincts de cette droite. On appelle vecteur directeur de $\mathcal{D}$ tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Propriété 11.6. $\mathcal{D}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ si et seulement si $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

11.2.2 Compléments

Le produit scalaire nous permet d'obtenir d'une autre manière une équation cartésienne de droite.

Définition 11.1. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle vecteur normal à une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Théorème. Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ **orthonormal**. Soit $\vec{n}(a; b)$ un vecteur non nul. Alors :

- Toute droite de vecteur normal $\vec{n}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
- Toute droite admettant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n} = (a; b)$ comme vecteur normal.

Preuve. Démontrons ces deux points :

- Soit une droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ et $A(x_A; y_A)$ un point de cette droite.
 $M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n}(a; b) = (X; Y)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A) = (X'; Y')$ orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow XX' + YY' = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0$. En posant $c = -ax_A - by_A$, on obtient une équation cartésienne de $\mathcal{D}$: $ax + by + c = 0$.
- Soit une droite $\mathcal{D}$ ayant comme équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et $\vec{n} = (a; b)$. On a vu qu'alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ était $\vec{v}(-b; a)$.
 À l'aide du produit scalaire, montrons que ces deux vecteurs sont orthogonaux.
 $\vec{n} = (a; b) = (X; Y)$ et $\vec{v}(-b; a) = (X'; Y')$.
 $\vec{n} \cdot \vec{v} = XX' + YY' = a \times (-b) + b \times a = -ab + ab = 0$.

◇

On peut le reformuler de la manière suivante :

Théorème 11.7. $\mathcal{D}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ si et seulement si $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Propriété 11.8 (Distance d'un point à une droite). Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ **orthonormal**.

Soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite et $M(\alpha; \beta)$ un point quelconque du plan.

La distance de M à $\mathcal{D}$, notée $d(M, \mathcal{D})$ est

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

On l'admettra.

11.3 Équations cartésiennes de cercle

11.3.1 Rappels

Rappelons que le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $r \geq 0$ est l'ensemble des points M qui sont situés à la distance r de Ω .

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = r (\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2)$$

Lorsque le plan est muni d'un repère orthonormal, cette définition devient :

Propriété 11.9. *Le plan est muni d'un repère orthonormal. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon $r \geq 0$, noté $\mathcal{C}(\Omega; r)$ est l'ensemble des points vérifiant l'équation suivante, appelée équation cartésienne de $\mathcal{C}$:*

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

11.3.2 Compléments

Le produit scalaire nous permet d'obtenir un autre type d'équation cartésienne de cercle.

Théorème 11.10. *Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.*

Soit $A(x_a; y_a)$ et $B(x_b; y_b)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.

Alors tout point M de $\mathcal{C}$ a ses coordonnées qui vérifient $(x - x_a)(x - x_b) + (y - y_a)(y - y_b) = 0$.

Preuve. On a vu au collège que M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M . Donc :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x - x_a; y - y_a) = (X; Y) \text{ et } \overrightarrow{BM}(x - x_b; y - y_b) = (X'; Y') \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \\ &0 \Leftrightarrow XX' + YY' = 0 \Leftrightarrow (x - x_a)(x - x_b) + (y - y_a)(y - y_b) = 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

11.4 Exercices

EXERCICE 11.1.

On donne $A(1; 2)$, $B(2; 1)$ et $C(-3; 0)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 11.2.

Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5; 1)$ et tangent à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + y - 4 = 0$.

EXERCICE 11.3.

On considère un triangle ABC avec $A(-1; 2)$, $B(3; 1)$ et $C(2; 4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

EXERCICE 11.4.

On donne $\Omega(2; -3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $r = 5$.

2. Démontrer que le point $A(-2; 0)$ est un point du cercle $\mathcal{C}$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 11.5.

Soit $A(3; 5)$. Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$ de centre O , origine du repère, et passant par A .

EXERCICE 11.6.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient : $(x - 3)(x + 2) + (y - 1)(y - 4) = 0$.