

Chapitre 11

Variables aléatoires

Sommaire

11.1 Deux exemples	111
11.2 Définition	111
11.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire	112
11.4 Espérance, variance, écart type	112
11.5 Exercices	113

11.1 Deux exemples

On illustrera toutes les notions avec les situations suivantes :

1. on tourne une roue dans une fête foraine qui est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue;
2. on lance deux dés et on s'intéresse à la somme des deux dés.

11.2 Définition

Définition 11.1. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω , fait correspondre un nombre réel k .
- L'évènement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X .
- L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X . Cet ensemble est noté $X(\Omega)$; c'est un ensemble de nombres.

Avec nos situations de départ on peut imaginer les variables aléatoires suivantes :

1. La partie de roue à la fête foraine coûte 1 € et l'on gagne :
 - 0 € si le bleu sort;
 - 2 € si le vert sort;
 - 5 € si le rouge sort;

Lorsqu'on lance la roue, l'univers est donc $\Omega = \{\text{bleu}; \text{vert}; \text{rouge}\}$ et l'on peut définir la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain engendré.

Ainsi, en enlevant la mise (1 € pour pouvoir jouer), on a :

- $X : \text{bleu} \mapsto -1$
- $X : \text{vert} \mapsto 1$
- $X : \text{rouge} \mapsto 4$

2. On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :

- $X = 0$ si la somme des deux dés est paire;
- $X = 1$ si elle est impaire.

L'ensemble image de Ω par X est $X(\Omega) = \{0; 1\}$

Remarques.

- Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
- Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
- En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z .

11.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 11.2. Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X .

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur $X(\Omega)$, qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

On démontre facilement que $\sum_i p'_i = 1$.

En reprenant les deux situations de départ, on a :

1. Dans le cas de la roue on a :
2. $p(X = 0)$ est la probabilité que la variable aléatoire soit égale à 0, c'est-à-dire que la somme soit paire.
On a ainsi $p(X = 0) = p(2) + p(4) + p(6) + \dots + p(12) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. De même $p(X = 1) = \frac{1}{2}$.

x_i	-1	1	4
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

11.4 Espérance, variance, écart type

Définition 11.3. L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X , dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i w_i \quad V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (\omega_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 \right) - (E(X))^2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V}$$

Toujours avec les exemples de la situation de départ :

1. (X est le gain à la roue de la fête foraine)
 - $E(X) = \frac{4}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{3}{8}$
(le gain qu'on peut espérer à chaque partie est en moyenne de 0,375 €)
 - $V(X) = \frac{4}{8} \times (-1)^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{175}{64}$
 - $\sigma(X) = \sqrt{\frac{175}{64}} \approx 1,654$

2. ($X = 0$ si la somme des dés est paire, $X = 1$ si elle est impaire)

$$\bullet E(X) = \sum_i p'_i x_i = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\bullet V(X) = \sum_i p'_i x_i^2 - (E(X))^2 = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2}$$

Remarques.

- Le fait que $\sum_{i=1}^n p_i (\omega_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 \right) - (E(X))^2$ est plus une propriété qu'une définition; on l'admettra;
- $\sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2$ est l'espérance de la variable X au carré; on peut donc écrire $E(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - E^2(X)$.

11.5 Exercices

EXERCICE 11.1.

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « tirage » le résultat obtenu. Ainsi (Face; Face; Pile) est un tirage (qu'on notera *FFP*).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω , l'univers des possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de « Pile » obtenues.
 - (a) Décrire $X(\Omega)$, l'univers des possibles pour X .
 - (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
 - (c) Calculer puis interpréter dans le contexte de l'exercice :

• $p(X = 2)$	• $p(X \leq 2)$
• $p(X > 1)$	• $p(X \leq 0)$
 - (d) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X .

EXERCICE 11.2.

Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose

que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant les deux tiers du temps et rouge ou orange un tiers du temps. On dit que l'automobiliste a obtenu le feu au vert quand il est passé sans s'arrêter.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
 - les trois feux verts?
 - deux des trois feux verts?
 - au moins un feu au vert?
 - au plus un feu au vert?
3. Combien de feux au vert l'automobiliste peut-il espérer?

EXERCICE 11.3.

Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
 - (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.

- (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.
- (c) On appelle X la variable aléatoire qui a chaque tirage associe la somme des deux dés. Calculer l'espérance de X . Comment interpréter ce nombre ?

EXERCICE 11.4.

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'ensemble E des couples $(x; y)$, avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$, est associé à une loi de probabilité équirépartie.

À chaque couple $(x; y)$, on associe $|x - y|$. On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E qui peut s'interpréter comme étant « l'écart entre les deux dés ».

- Définir la loi de probabilité de X .
- Calculer puis interpréter dans le contexte de l'exercice :
 - $p(X = 5)$ • $p(X \leq 4)$
 - $p(X > 1)$ • $p(X = 6)$
- Calculer l'espérance et la variance de X .

EXERCICE 11.5.

On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :

- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.

Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le vert sort;
- 1 € si le bleu sort;
- x € si le rouge sort;

On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain – mise de départ) du joueur.

- Décrire l'univers $X(\Omega)$ associé à X .
- Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
- Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
- On suppose que $x = 2$ € .
 - (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
 - (b) Qui est le plus avantageux : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
- Mêmes questions pour $x = 15$ € .
- On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantageux. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 11.6.

On considère le jeu suivant : Le joueur lance deux dés à six faces; s'il fait un double 6, il gagne un million d'euros, sinon il perd dix mille euros. Faut-il lui conseiller le jeu ?

EXERCICE 11.7.

On dispose d'une roue qui comporte dix secteurs identiques, neuf verts et un rouge.

On propose les deux jeux suivants :

Jeu 1 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur gagne 2 000 euros, sinon il perd 8 000 euros.

Jeu 2 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur ne gagne ni ne perd rien, sinon, il gagne 10 000 euros.

- Intuitivement, quel jeu semble le plus avantageux ?
- Calculer, pour chaque jeu, l'espérance et la variance de gain du joueur. Que constate-t-on ?