Devoir maison n°4

Probabilités – Suites

À rendre pour le lundi 13 avril.

EXERCICE 4.1.
Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés.
Aucun participant n'abandonne la course.
Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures ; les autres en plus de 5 heures.
Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours en plus de 5 heures ; les autres en moins de 5 heures.
On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

- L l'évènement « le cycliste est licencié dans un club » et $\overline{L}$ son évènement contraire,
- M l'évènement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\overline{M}$ son évènement contraire.

1. À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)$.
2. Construire un arbre pondéré suivant représentant la situation.
3. Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.
4. Justifier que $P(M) = 0{,}513$.
5. Un organisateur affirme qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison ? Justifier la réponse.
6. Un journaliste interroge indépendamment trois cyclistes au hasard. On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de trois cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.
   (a) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement deux des trois cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins une des trois cyclistes ait réalisé le parcours en moins de cinq heures.

EXERCICE 4.2.
La suite (u_n) est définie par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. (a) Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   (b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? *On justifiera.*
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$. On admet que la suite (v_n) est bien définie.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la valeur exacte de u_{100}.

PROBLÈME 4.1.

On a vu dans les exercices faits en classe plusieurs suites de la forme $u_{n+1} = m \times u_n + p$ où m et p des réels.

La multiplication systématique par m et l'addition systématique de p font penser respectivement aux suites géométriques et aux suites arithmétiques. Bien qu'elles ne soient ni l'un, ni l'autre quand $m \neq 0$ et $m \neq 1$ de telles suites sont appelées suites *arithmético-géométriques*.

Dans les exercices on vous a fourni systémtiquement une suite (v_n), dite *suite auxiliaire* à (u_n), de la forme $v_n = u_n - q$, qui, parce que le nombre q était bien choisi, avait le bon goût d'être géométrique. Nous allons dans ce problème voir qu'une telle suite existe toujours et voir comment trouver ce nombre q.

Soit f une fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$ où m est un réel différent de 0 et 1 et p un réel quelconque.

Soit (u_n) la suite telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude théorique

1. Déterminer, en fonction de m et de p, le nombre q tel que $f(q) = q$.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - q$ est géométrique.
   La suite (v_n) est appelée suite auxiliaire de la suite (u_n).
3. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de u_0, m, p et n.

Partie B : Application

Martin a le projet de partir 6 mois en voyage à la recherche de bons *spots* de surf. Pour cela, il souhaite acquérir un *van* et l'aménager. Il estime le coût final de son véhicule à 15 000 €.
Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2014, il dépose 6 000 € sur un compte-épargne à intérêts composés rémunéré à 2,5 % par an. Il décide de plus de s'astreindre à déposer chaque 1$^{\text{er}}$ janvier des années suivantes 800 € sur ce compte.
Il se demande quand il pourra partir.
Pour répondre à cette question, on pose u_n la somme disponible sur son compte le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2014 + n$.

Les résultats seront, au besoin, arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}025 u_n + 800$.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. (a) Déterminer la suite (v_n) auxiliaire de (u_n).
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.
4. (a) Étudier la monotonie de (u_n).
   (b) Déterminer à quelle date il pourra partir.