Chapitre 6

Produit scalaire

Sommaire

6.1 $\vec{AB}.\vec{AC}$

6.1.1 Introduction

On sait, d'après Pythagore, que, lorsque le triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow AB^2+AC^2-BC^2=0$.
On sait aussi, d'après la réciproque de Pythagore, que, lorsque le triangle n'est pas rectangle $AB^2+AC^2 \neq BC^2 \Leftrightarrow AB^2+AC^2-BC^2 \neq 0$.
On s'intéressera dans ce chapitre à ce à quoi est égal cette différence quand le triangle est, ou n'est pas, rectangle.
La quantité qui va nous interesser sera plus précisement $p=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$. La présence du coefficient $\frac{1}{2}$ sera justifiée ultérieurement.

Activité 6.1.
Soit un triangle ABC.
On appelle H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) et $p=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$.

1. Montrer que si $A=B$ ou $A=C$ alors $p=0$.

   On supposera pour la suite que A, B et C sont distincts.

2. Vérifier que, lorsque ABC est rectangle en A, $p=0$.

3. Montrer que $p = \frac{1}{2}\left(AH^2 + AC^2 - CH^2\right)$
4. On va calculer p selon la position de H sur la droite (AC).

Premier cas : $H \in [AC]$
En écrivant $CH = AC - AH$, montrer que $p = AC \times AH = AC \times AB \times \cos \widehat{BAC}$.

Deuxième cas : $H \notin [AC]$ et $H \in [AC)$
En écrivant $CH = AH - AC$, montrer que $p = AC \times AH = AC \times AB \times \cos \widehat{BAC}$.

Troisième cas : $H \notin [AC]$ et $H \in [CA)$
En écrivant $CH = AC + AH$, montrer que $p = -AC \times AH = AC \times AB \times \cos \widehat{BAC}$.

Que peut-on en déduire sur le signe de p selon les valeurs de $\widehat{BAC}$?

6.1.2 Définition et premières propriétés

Nous allons donner à p son nom mathématique :

Définition 6.1. Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan, on appelle produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, le nombre :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

On vient de démontrer quelques unes de ses propriétés :

Propriété 6.1. *Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.*
Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs non nuls alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (AB) \perp (AC)$.

On démontre facilement la propriété suivante :

Propriété 6.2. *Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

On admettra la propriété suivante :

Propriété 6.3. *Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non nuls.*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

On en déduit facilement que, lorsque $\widehat{BAC}$ est aigu, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \geqslant 0$ et, lorsque $\widehat{BAC}$ est obtus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \leqslant 0$. Et comme $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, on retrouve le fait que, si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ef $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas nuls, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (AB) \perp (AC)$. Enfin :

Propriété 6.4. *Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non nuls. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires et :*
- *de même sens $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$*
- *de sens contraire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$*

Preuve. On a vu que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires et de même sens alors $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 0$ et $\cos \widehat{BAC} = 1$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times 1 = AB \times AC$
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires et de sens contraire alors $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \pi$ et $\cos \widehat{BAC} = -1$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times (-1) = -AB \times AC$ ♢

Propriété 6.5. *Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB \times AB$. Et on notera $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$. Donc :*

$$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$$

6.1.3 Lien avec H, le projeté orthogonal de B sur (AC)

Propriété 6.6. *Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de B sur (AC).*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$$

Preuve. On a vu dans l'activité que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AH^2 + AC^2 - CH^2\right)$.
Or $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AH^2 + AC^2 - CH^2\right)$. D'où l'égalité. ♢

On en déduit :

Propriété 6.7. *Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de B sur (AC).*

- *$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.*
- *$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposé.*

6.2 $\vec{u}.\vec{v}$

On peut généraliser le produit scalaire à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en notant $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ l'angle entre ces deux vecteurs.

6.2.1 Une autre définition

Définition 6.2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

On démontre que cette définition est équivalente à la précédente en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et en remarquant que $BC^2 = CB^2 = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right\|^2 = \|-\vec{v} + \vec{u}\|^2$.

6.2.2 D'autres propriétés

Les propriétés précédentes deviennent alors :

Propriété 6.8. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls :*

- *$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.*
- *$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$.*
- *$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.*
- *$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.*
- *En notant $\vec{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction donnée par $\vec{u}$, on a $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'}$.*

Ces propriétés sont des re-écritures de propriétés précédentes.

6.3 Exercices

6.3.1 Calculs de produits scalaires, de longueurs ou d'angles

EXERCICE 6.1.
$MNPQ$ est un carré avec $MN = 6$.
I est le centre du carré.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP}$;
2. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN}$;
3. $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP}$;
4. $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{NI}$.

EXERCICE 6.2.
ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm.
I est le milieu de $[BC]$.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$;
2. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI}$;
3. $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AI}$.

EXERCICE 6.3.
ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$.
De plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.
   (b) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
   (c) Calculer BC.
2. Ce triangle est-il rectangle ?

EXERCICE 6.4.
$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire BD.

EXERCICE 6.5.
$ABCD$ est un parallélogramme de sens direct tel qu'indiqué sur le schéma ci-dessous (qui n'est pas en taille réelle) où $DA = 4$, $DC = 8$ et $DB = 7$.

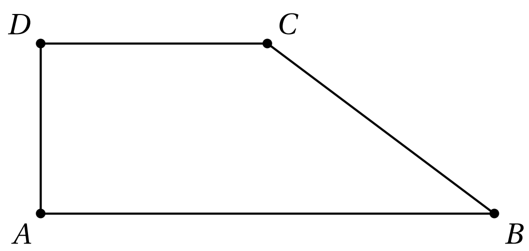
1. Déterminer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$.
2. En déduire AC^2 puis la valeur exacte de AC.

EXERCICE 6.6.
$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm et $AC = 9$ cm.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{29}{2}$.
2. En déduire la longueur BD. *La valeur exacte est attendue.*
3. En déduire une mesure de $\widehat{BAD}$ à 0,01° près.

EXERCICE 6.7.
$ABCD$ est un trapèze rectangle de base $AB = 2a$ et $CD = a$ et de hauteur $AD = h$.

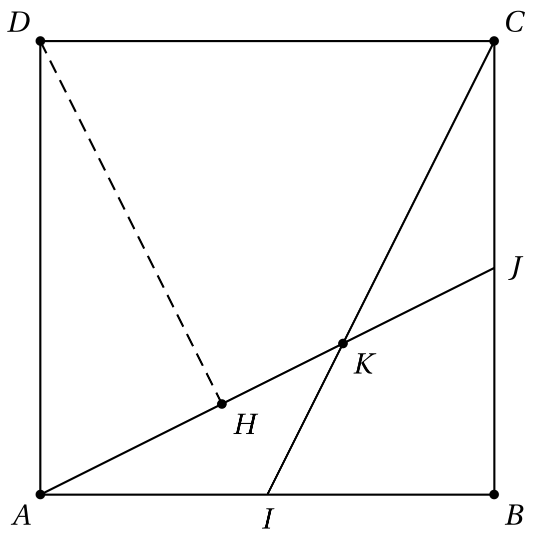
1. Exprimer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ en fonction de a et de h.
2. Existe-t-il une valeur de h telle que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires ?



EXERCICE 6.8.

$ABCD$ est un carré de côté a.
I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.
H est le projeté orthogonal de D sur la droite (AJ) et K le point d'intersection des segments $[AJ]$ et $[CI]$.

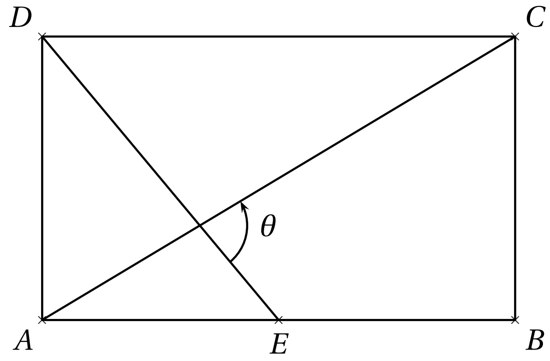
1. En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD}$:
   (a) Calculer la longueur AH en fonction de a ;
   (b) En déduire la distance du point D à la droite (AJ) en fonction de a.
2. En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{CI}$, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{JKI}$ puis donner la valeur approchée à 0,1° près par défaut de la mesure de $\widehat{JKI}$.



EXERCICE 6.9.

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$.
E est le milieu de $[AB]$.

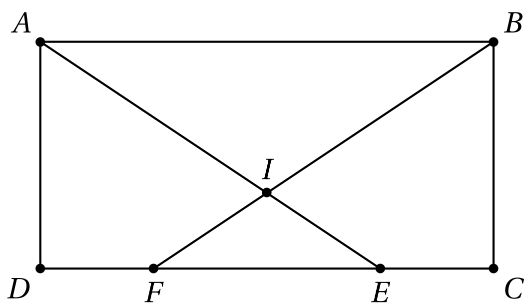
1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)$ en degrés à 0,01 près.



EXERCICE 6.10 (6 points)**.**

$ABCD$ est un rectangle de sens indirect tel qu'indiqué sur le schéma ci-dessous (qui n'est pas en taille réelle) tel que $AD = 2$ et $DC = 4$.
E et F sont des points du segment $[DC]$ tels que $DF = EC = 1$.
On appelle I l'intersection des droites (AE) et (BF).

1. Montrer que $AE = \sqrt{13}$.
   On admettra que $AE = BF$ si besoin.
2. En exprimant $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FB}$ de deux manières différentes, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{EIB}\right)$ puis une valeur approchée $\widehat{EIB}$ à 0,01°près.

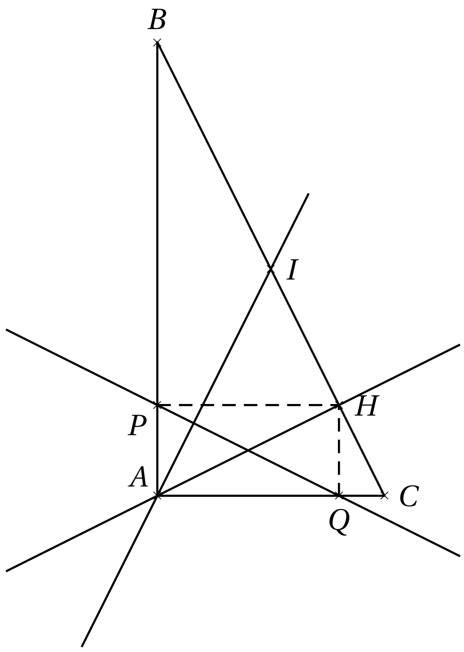


6.3.2 Hauteurs ou perpendicularités

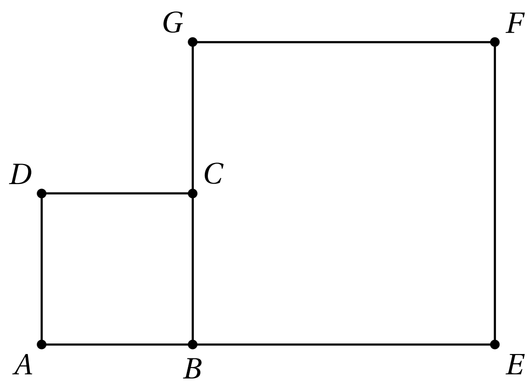
EXERCICE 6.11.
$ABCD$ est un carré. I est le milieu de $[AB]$. J est le milieu de $[BC]$.
À l'aide du produit scalaire, montrer que les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

EXERCICE 6.12.
ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A ; I est le milieu de $[BC]$; P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC).

1. Montrer que $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$ et que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{PQ}=0$.
4. Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (PQ) ?



EXERCICE 6.13.
B est un point appartenant à $[AE]$. $ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés situés dans le même demi-plan par rapport à (AE), comme sur la figure ci-contre.
Montrer que (EC) est la hauteur issue de E dans le triangle AEG.



EXERCICE 6.14.
Soit $ABCD$ un carré de sens direct de côté a. On construit un rectangle $APQR$ de sens direct tel que :

- $P\in[AB]$ et $R\in[AD]$;
- $AP=DR=b$.

1. En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ selon des directions orthogonales, calculer $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{PR}$.
2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.