Chapitre 10

Suites arithmétiques
Suites géométriques

Sommaire

10.1 Suites arithmétiques

10.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 10.1 (par récurrence)**.** On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où $r \in \mathbb{R}$ est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

EXERCICE.

1. La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est-elle une suite arithmétique ? Et celle formée par les nombres entiers naturels impairs ?
2. La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n - 2$ est-elle arithmétique ?
3. La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$ est-elle arithmétique ?

Propriété 10.1 (Formule explicite)**.** *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n-p)r$.*

En particulier, avec $p = 0$: $u_n = u_0 + nr$.
Nous l'admettrons.

10.1.2 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 10.2. *Soit (u_n) une suite arithmétique et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Alors :*

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$

La preuve sera faite en classe.
Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite arithmétique est :*

$$S = \frac{(\text{1}^{er} \text{ terme} + \text{dernier}) \times (\text{nb de termes})}{2}$$

10.2 Suites géométriques

10.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 10.2 (par récurrence)**.** On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

où $q \in \mathbb{R}$ est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.

   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.

   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.

2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

EXERCICE.

1. La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$ est-elle géométrique ?

2. La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ est-elle géométrique ?

Propriété 10.3 (Formule explicite)**.** *Soit (u_n) une suite géométrique et de raison q. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = q^{n-p} u_p$.*

En particulier, avec $p = 0$: $u_n = q^n u_0$.
Nous l'admettrons.

10.2.2 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété 10.4. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Alors :*

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
La preuve sera faite en classe.
Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite géométrique est :*

$$S = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

10.2.3 Exponentielle et suite géométrique

Propriété 10.5. *Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{na}$ est une suite géométrique de raison e^a.*

Preuve. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^a$.
On a donc $u_{n+1} = e^a \times u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = e^{na}$ est donc une suite géométrique de raison e^a. ◇

10.3 Exercices et problèmes

10.3.1 Exercices

EXERCICE 10.1.
Pour chacune des suites données ci-dessous :

- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $v_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $x_n = \frac{3^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer les trois premiers termes.
2. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
3. Si elle est arithmétique ou géométrique :
   (a) calculer le terme de rang 100 ;
   (b) calculer la somme des termes jusqu'au rang 100.

EXERCICE 10.2.
Les suites (u_n) de cet exercice sont arithmétiques.

1. La suite (u_n) est de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$.
   Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
   (a) Déterminer r et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

EXERCICE 10.3.
On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.
3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

EXERCICE 10.4.
Les suites (u_n) de cet exercice sont géométriques.

1. La suite (u_n) est de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait que $u_8 = -1$.
   Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est de raison q. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$.
   (a) Déterminer q et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

EXERCICE 10.5.
Après avoir mis en évidence la suite dont il s'agit et prouver qu'elle est, le cas échéant, arithmétique ou géométrique, calculer les sommes suivantes :

- $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 998 + 999$
- $S_2 = 2\,006 + 2\,007 + \ldots + 9\,999$
- $S_3 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots + 4\,096$
- $S_4 = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 59\,049$
- $S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 999$
- $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{28}}$
- $B = 3 + 6 + 9 + \ldots + 99$

10.3.2 Exponentielle et suites

EXERCICE 10.6.
Donner la nature et la raison des suites ci-dessous puis déterminer leur sens de variation.

- (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^n$;
- (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \mathrm{e}^{-6n}$;
- (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \mathrm{e}^{3n}$;
- (r_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $r_n = \mathrm{e}^2 n$.

EXERCICE 10.7.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme :

$$S = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{e}^i = 1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^3 + \ldots + \mathrm{e}^n$$

1. Démontrer que S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. Déterminer S en fonction de n.
3. Pour quelle valeur de n la somme S va-t-elle dépasser un milliard ?

EXERCICE 10.8.
Après administration d'un médicament à un patient, on modélise la concentration (en microgramme par litre) de son principe actif dans le sang par une fonction f définie par $f : t \longmapsto 15\mathrm{e}^{-0,2t}$ avec $t \in [0\,;+\infty[$, t correspondant au temps en heure après l'administration.

1. Déterminer la concentration initiale.
2. Déterminer la concentration au bout de deux heures.
3. Estimer au bout de combien de temps la concentration aura diminué de moitié après l'administration.

EXERCICE 10.9.
On étudie l'évolution d'une population de bactéries élevée en laboratoire.
On modélise la nombre de bactéries après t jours par une fonction f de la forme $f(t) = N_0\mathrm{e}^{kt}$ où N_0 et k sont des paramètres réels fixés et où $t \in [0\,;+\infty[$.

1. Déterminer une estimation de la population initaile en fonction des paramètres.
2. On a estimé que le nombre de bactéries avait été multiplé par 2,72 au bout de 19 jours.
   Déterminer une estimation de la valeur de k.
3. Déterminer au bout de combien de jour la population de bactéries aura été multiplée par 10 selon ce modèle.

10.3.3 Problèmes

PROBLÈME 10.1.
Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

Question : Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

Indications :

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du $36^{\text{è}}$ mois.
3. Répondre à la question.

PROBLÈME 10.2.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
Question : le nombre d'adhérents peut-il doubler et, si oui, en quelle année ?

Indications :
Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990 + n$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?
2. Préciser la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
3. Étudier la monotonie de (u_n).

4. Utiliser la calculatrice pour répondre à la question.

PROBLÈME 10.3.
Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.

1. À quelle page en est Jean ?
2. Combien de pages comporte ce livre ?

On supposera que le livre commence à la page n°1.

PROBLÈME 10.4.
Lequel des deux nombres suivants est le plus grand ?

- $A = 2\,005(1+2+3+\ldots+2\,006)$
- $B = 2\,006(1+2+3+\ldots+2\,005)$

PROBLÈME 10.5.
Monsieur X désire financer un voyage dont le coût est de 6 000€.
Pour ce faire, il a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
Question : En quelle année aura-t-il assez d'argent pour financer son voyage ?

Indications :
On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de l'année $(2003+n)$, où n est un entier naturel. Ainsi, on a $C_0 = 2000$.

1. (a) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2004.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = C_n + 20000$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $C_n = 22000 \times (1,035)^n - 20000$.
3. Étudier la monotonie de la suite (C_n) puis, à l'aide de la calculatrice, répondre à la question.

PROBLÈME 10.6.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.
Question : En supposant que cette évolution se poursuive, comment va se comporter le nombre de clients sur le long terme ?

Indications :

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n.
   Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la monotonie de (u_n). Interpréter le résultat.
   (e) Calculer u_{100}, u_{1000} et u_{10000}.
   Que peut-on alors conjecturer concernant le nombre de clients du fournisseur ?

PROBLÈME 10.7.
Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Question : En supposant que cette évolution se poursuive, comment va se comporter le nombre d'employés sur le long terme ?

Indications :
Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005+n)$
.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3
2. (a) Montrer que $u_{n+1}=0,9u_n+100$.
   (b) Cette suite est-elle arithmétique? Cette suite est-elle géométrique?
3. On pose $v_n=u_n-1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire v_n en fonction de n.
   (d) En déduire u_n en fonction de n.
   (e) Étudier la monotonie de (u_n) et interpréter le résultat.
   (f) Conjecturer le comportement de (u_n) quand n devient grand et interpréter le résultat.

PROBLÈME 10.8.
Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que, entre les nouveaux arrivants et les nouvelles naissances, la population augmente de 5% chaque année. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.
Question : À partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950?

Indications :

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951?
2. On note p_n la population de la ville à l'année $1950+n$.
   Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On pose $q_n=p_n-16000$.
   (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.
4. Montrer que $\left(p_n\right)$ est croissante.
5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la réponse à la question.

PROBLÈME 10.9.
Soit la suite (u_n) définie par :

$$(u_n):\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n}, \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. (a) Déterminer u_1, u_2 et u_3.
   (b) La suite (u_n) est arithmétique? Géométrique? *On justifiera.*
2. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$ et on définit la suite (v_n) par, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{1}{u_n}$.
   (a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de u_n, en fonction de n.
   Déterminer alors $u_{5\,000}$.